直観几何

上册

D. 希尔伯特 著
S. 康福森
王 联 芳 譯
江澤涵校訂

人民教育出版社

俄譯本出版者的話

D. 希尔伯特和 S. 康福森合著的“直观几何”是世界通俗文献中为数不多的出于大数学家手笔的书籍中的一本，由于叙述的循序漸进而又生动，著者就使得极其丰富的几何知識能为对数学有兴趣的广大讀者所接受、所理解。

原书著者之一 S. 康福森在 1934 年由希特勒德国迁居到苏联来，并且参加了俄譯本第一版的准备工作。1936 年 S. 康福森在重病之后死于莫斯科。

必須指出，原书还是有些較大的缺点的。一般地說，书中沒有关于数学发現的历史方面的闡述。某些地方虽也有带点历史性質的注釋，却往往只詳細地引証比較不重要的著作，可是对于直接关联到所講內容而属于我国科学家的重大的数学研究，有时連提也不提。在这次再版俄譯本时，各个地方加了脚注，希望尽可能地弥补这个缺陷。

序

在数学中，象在任何科学研究中那样，有两种傾向。一种是抽象的傾向，即从所研究的錯綜复杂的材料中提炼出其內在的邏輯关系，并根据这些关系把这些材料作系統的、有条理的处理。另一种是直观的傾向，即更直接地掌握所研究的对象，側重它們之間的关系的具体意义，也可以說領会它們的生动的形象。

就几何方面說，抽象的傾向已經引导到代数几何、黎曼几何和拓扑学等宏偉的系統的理論；在这里抽象的思考方法、以及代数性質的符号运算获得广泛的运用。然而，直观在几何中起的作用却是更大，过去如此，現在还是如此。具体的直观不仅对于研究工作有巨大的价值，对于理解和欣賞几何中的研究結果也是这样。

本书的目的在于从直观形象这一側面来介紹今日的几何。借助于直观想象，我們能够闡述几何中的各种各样的事实和問題；不但如此，在許多情况下我們还能够描述有关的研究方法和証明方法的几何輪廓，而无須詳究概念的严格定义和实际計算。例如，具有一个洞（不管这个洞多么小）的球面恒能攤平的証明，或一般地不能把两个不同的环面中的一个保角地映射成另一个环面的証明，都可如此处理，使得不愿追究解析推演的細节的人，也可以領会到应如何証明和为什么能这样証明。

由于几何的方面很广而且它跟許多数学分支发生关系，因而我們甚至于能够从它获得整个数学的概观、能够認識数学問題的变化多端、以及数学思想的丰富多彩，因此从直观形象出发而且用粗綫条的方式来描繪几何，应該会使专家圈子以外更广大的群众

对于数学有更合理的評价。因为，一般地說，数学并不是普通人特别喜爱的学科，虽然它的重要性可以說已經得到公認了。此中原因是由于有一种流行的誤解，認为数学不过是算术的延續和提高，用数目来变戏法。本书用图形来替代公式；这里的图形是讀者看得見的，而且讀者容易制作模型来加以补充。本书要通过这种方式来和这种流行的誤解作斗爭。希望本书能使讀者易于看透数学的本質，不致于在繁难的学习面前望而却步，从而使数学更易于为人所欣賞。

本书的目标旣是如此，自然不能顾到把各方面的材料搜罗完备和把所討論的材料按严格系統安排，也不能把所討論的每个課題討論得詳尽无遺。再者，书中各节对于讀者預先具有的数学訓練的要求也不能完全相同；虽然本书大部分的叙述是很初等的，但是，若要避免冗长而厌煩的叙述，有一些美丽的几何的探討是只有对于具有一定程度的訓練的人才能完全解釋清楚。

各章的附录都假定讀者已具有某些預备知識，这些附录是补充性的，而不是解釋正文的。

几何各部門的相互关系甚为密切，而且密切得往往出人意料之外。这一情况在本书中多处出現。虽然如此，由于所处理的材料多种多样，有必要使各章在一定程度上各自独立，以免为了理解后面的几章就必需完全熟悉前面的各章。我們希望，由于有了一些叙述上的重复，讀者可能自由地閱讀各别的章，有时甚至是各别的节，而不致于难以接受或不感到兴趣。我們愿意領着諸位讀者在几何的大花园里作一次幽閑的散步，让每人摘取一束自己心爱的花朵。

本书的底稿是我在古庭根于 1920—1921 年冬季每周四次的"直观几何"的講演，經 W. 罗塞曼 (Rosemann) 記录的。本书里基本上保存了原講稿的結构和內容，但是 S. 康福森 (Cohn-Vossen)

改写了許多細节，并且补充了不少的材料

D. 希尔伯特

1932 年 6 月于古庭根

上册目录

第一章　最簡单的曲綫和曲面

§1. 平面曲綫

最簡单的曲面是平面。最簡单的曲綫是平面曲綫；平面曲綫当中最簡单的是直綫。直綫可以定义为两点間最短的路程，也可以定义为二平面的交綫，或者旋轉的軸。

直綫之外最簡单的曲綫要算圓。即使象这样簡单的图形，也能够对它作出繁多而深入的研究，以致可写成专书。我們給圓下这样的定义：它是曲綫，曲綫上的各点与一已知点的距离相等。我們通常用众所共知的繩綫作法或圓規作法来作圓。从这种作法显然可知：圓是閉合的曲綫，到处是凸的。因此通过圓周上任一点可作一条定直綫（切綫），使唯有这一点（切点）才是直綫与圓共同的，同时直綫上其余所有的点都在圓外（图1）。切点 B 上的半徑 MB 必为从圓心 M 到切綫 t 的最短路程，因为 t 上除 B 外的所有点都在圓外，因此这些点跟 M 的距离应較切点跟 M 的距离为远。由此可以推出，圓的半徑 MB 垂直于半徑上的切綫。要証明这句話，我們作圓心 M 对于切綫 t 的反射点，即从 M 作切綫 t 的垂綫，延长一倍到 M'；这 M' 叫做 M 的象点。現在因为 MB 是从 M 到 t 的最短路程，又因为对称关系，得知 $M'B$ 是从 M' 到 t 的最短路程。因此綫路

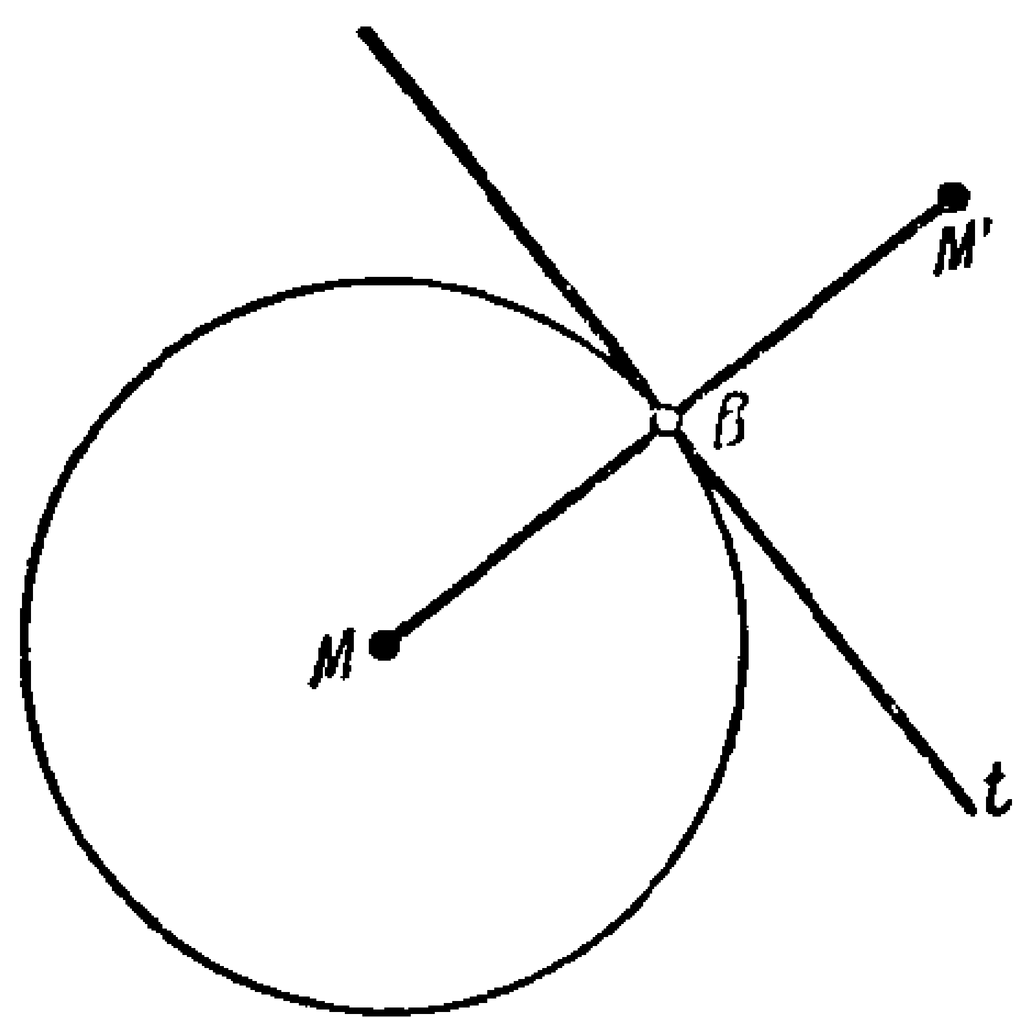


图 1

MBM' 一定是 M 和 M' 两点間的最短路程，所以在点 B 处不会弯折，也就是說，MB 的确垂直于 t。

从圓的作法很自然地会想起一种推广情形。我們知道在用繩索作圓时，須將閉合的繩綫套在一个固定的点（圓心）上，并且在画圓的过程中时时将繩綫拉紧。現在假如将此繩綫套在两个固定的点上，則得出与圓类似的曲綫。这种曲綫叫做椭圓，两个定点叫做椭圓的焦点。由繩綫作图法可知，椭圓是具有下列性质的曲綫：曲綫上任一点到二已知点的距离之和是一常量。如果让二点重合，則得到椭圓的极限情形，即圓。椭圓也有几个簡单的性质，跟上面列举的圓的各种性质相当：它是閉合的曲綫，到处是凸的，在椭圓上任一点均可作其切綫，切綫上每一点除切点外均在椭圓之外。与圓半徑相当的，是連接椭圓上一点和二焦点的二綫段。这二綫段叫做椭圓的焦半徑。与圓的切綫必垂直过切点的半徑这件事相当的，是椭圓的切綫同过切点的二焦半徑作成等角。依图 2 上的記

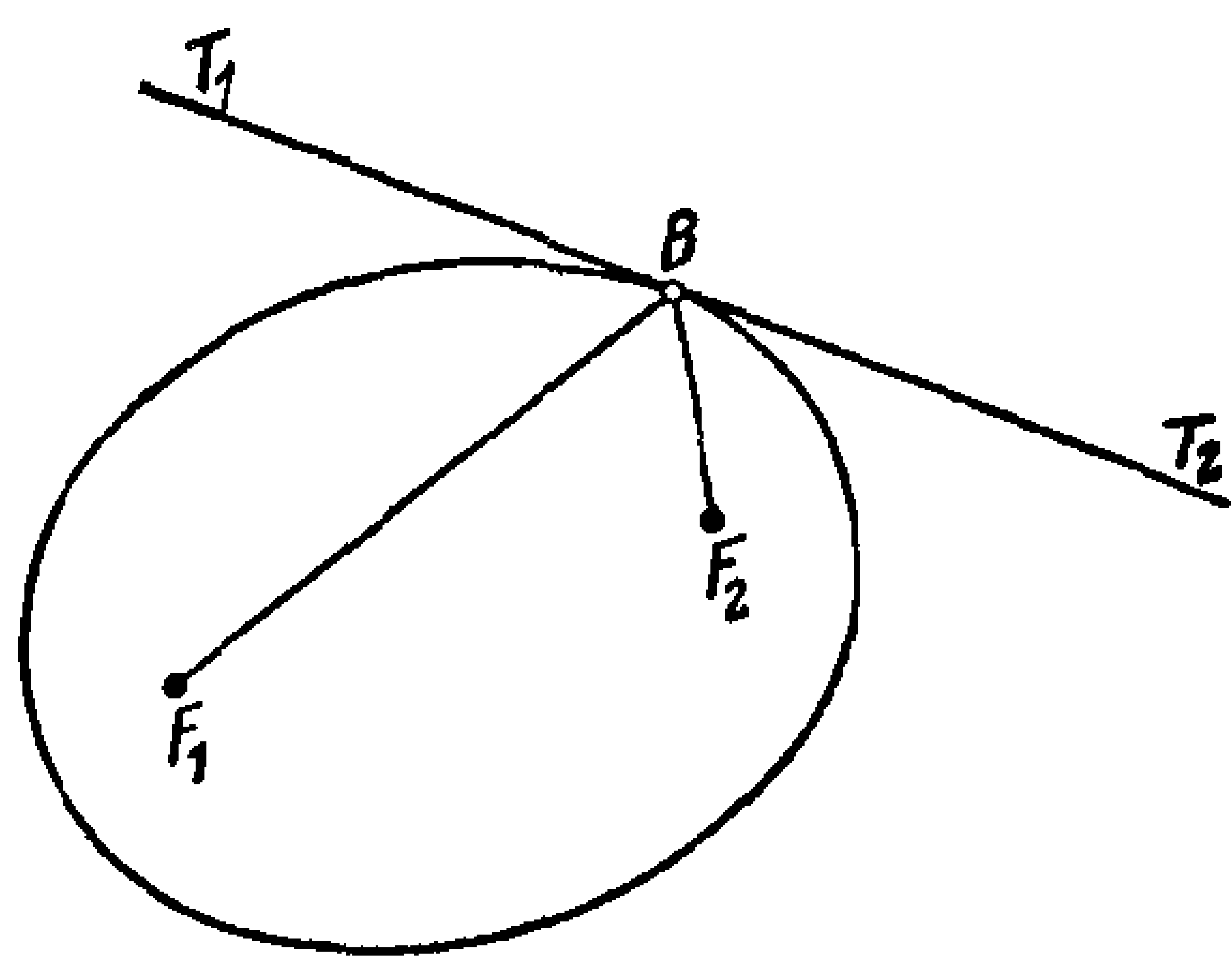


图 2

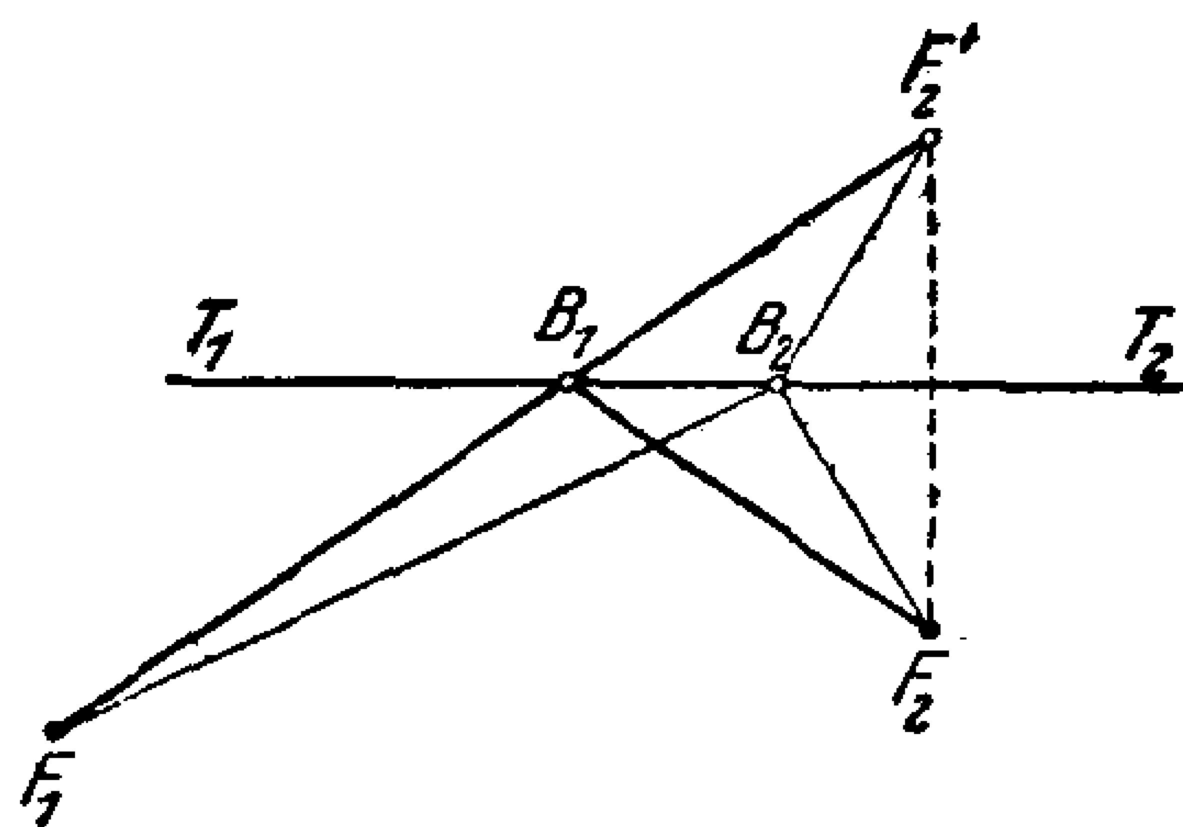


图 3

法，这句断語可写成 $\angle F_1BT_1=\angle F_2BT_2$。証明如下：作 F_2 对于切綫的反射点 F_2'（图 3）。同切綫交于 B_1 的綫段 F_1F_2' 是 F_1 和 F_2' 两点間最短的路綫。因为，設 B_2 是切綫上任意另外一点，那么綫段 $F_1B_2F_2=F_1B_2F_2'$ 必大于 $F_1B_1F_2=F_1B_1F_2'$。另一方面，F_1 和 F_2 两点間最短的并且与切綫相交的路綫是由过切点 B 的二焦半徑

組成的。这是由于切綫上任何其他的点都在椭圓之外，从而从二焦点到这样一点的距离之和必定大于从二焦点到椭圓上 B 点的距离之和。所以 B 同 B_1 重合。因为 F_2 和 F'_2 对于直綫 T_1T_2 对称，而且 $\angle F_1B_1T_1$ 和 $\angle F'_2B_1T_2$ 成对頂角，因此我們的断語得証。

椭圓切綫的这种性質在光学上获得应用，焦点和焦半徑二名詞也是从这里来的。这是說，假如置光源于椭圓鏡面的一个焦点处，其反射綫必将聚集于另一焦点。

另外有一种曲綫，它的作法虽不如椭圓那样容易，但原理同样簡单。这种曲綫上的任一点到二定点距离之差为一常数。这曲綫名为双曲綫，二定点名为双曲綫的焦点。这样，对曲綫上任一点 B 或 B'（图 4），关系式 $F_1B-F_2B=$ 常数 a 或 $F_2B'-F_1B'=a$ 应該成立。据此，双曲綫由两个分支組成。直覌上显然，双曲綫到处是凸的，并且經过曲綫上任一点都可作一切綫。以后我們还要証明（参看第 9 頁上脚注 2）：切綫上除去切点外，同曲綫再沒有公共点。仿照椭圓的情形，可以証明，双曲綫的切綫平分过切点的二焦半徑的夹角（图 6）。

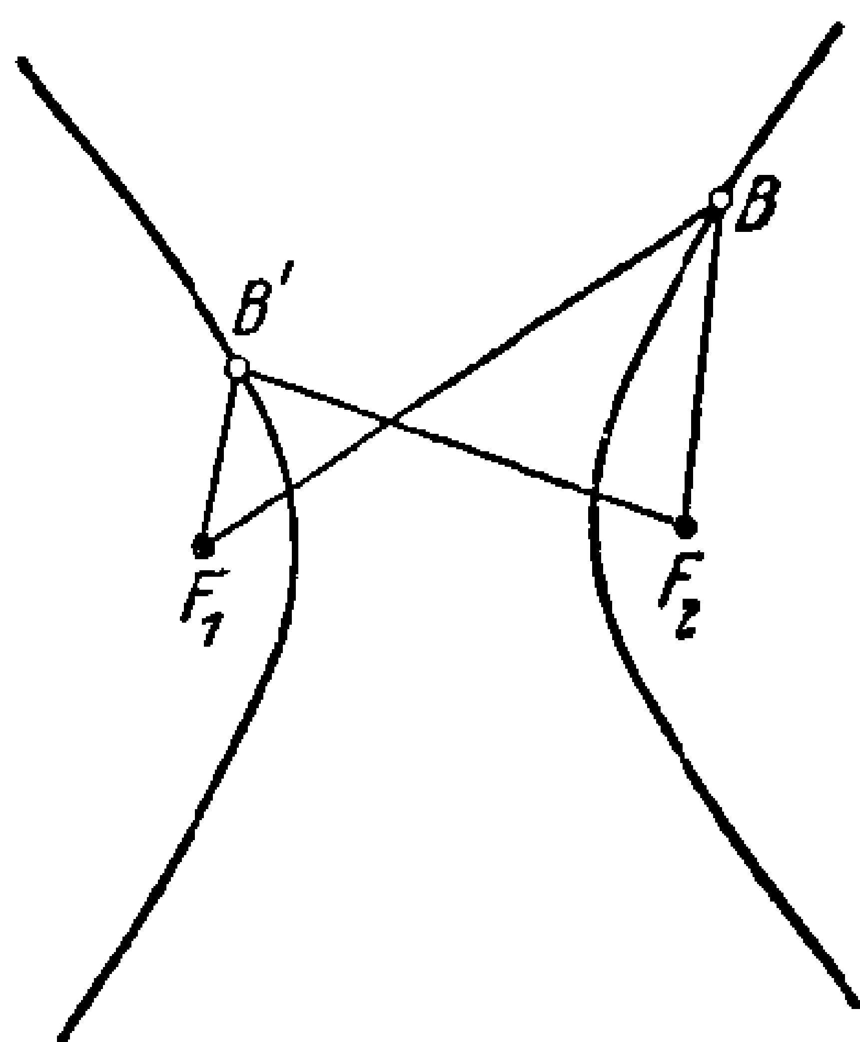


图 4

运用极限过程，可以从椭圓得出另外一种曲綫——抛物綫（图 5）。为了达到这个目的，先固定一个焦点，比如說 F_1，再固定同此焦点最近的頂点 S（所謂椭圓的頂点，是說椭圓与两焦点連綫的交点）。現在我們来考虑，假如第二个焦点 F_2 在 SF_1 的延长綫上移动，离 F_1 越来越远，椭圓将如何变化。我們說这些椭圓趋近于一极限曲綫，这极限曲綫就是抛物綫。从这个极限过程我們可导出抛物綫的一个簡单定义。闡述如下：

假如椭圓的焦距 F_1F_2 充分地大，而在繩綫作图中鉛笔始終貼

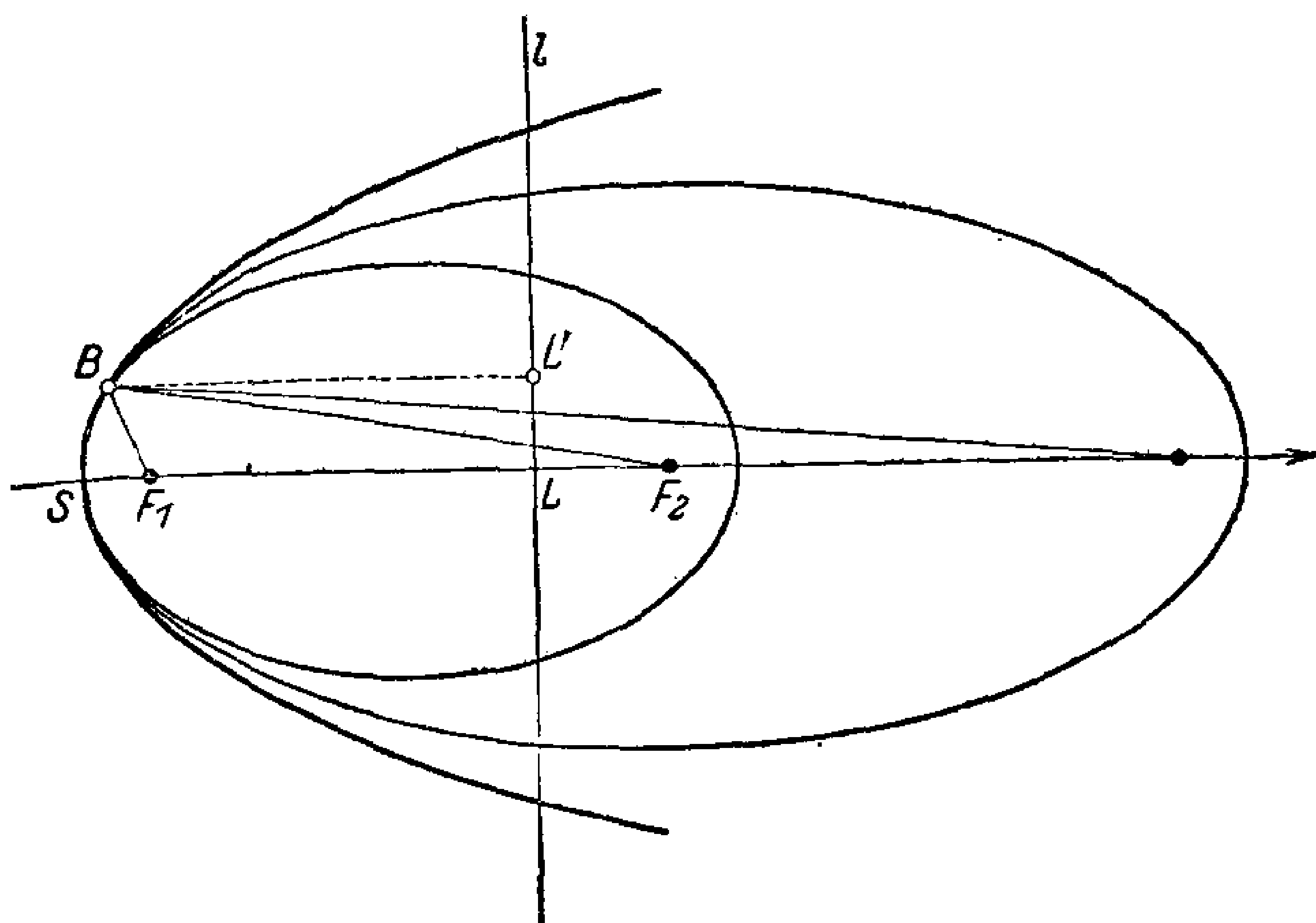


图 5

紧繩綫走动，一直走到頂点 S 的邻近，則由 F_2 引出的繩綫几乎平行于 SF_2（图 5）。过 F_1F_2 上任一点 L 作直綫 F_1F_2 的垂綫 l，則有下面的近似的等式成立：

$$F_1B+BF_2=F_1B+BL'+LF_2=\text{常数}$$

（其中的 L' 是从 B 到 l 的垂綫的垂足）。如用一个新的常数去代替

$$\text{“常数}-LF_2\text{”},$$

便得到

$$F_1B+BL'=\text{常数}$$

（因为就一个定曲綫来說，LF_2 是常数）。距离 F_1F_2 越大，上式越正确，因之在极限的情形下，上式就严格地成立了。这样，我們說，抛物綫是这样的曲綫，从曲綫上任一点到一定点及一定直綫的距离之和是一常数。換句話說，从抛物綫上任一点到一定点的距离，等于从这点到一条定直綫的距离。这条定直綫是这样得到的：在 S 的和 l 不同的一側，与 S 的距离等于 SF_1 的某处作 l 的平行綫；这条直綫叫做抛物綫的准綫。

設有一道平行于 SF_1 的光綫，落在抛物形鏡面上，則反射綫将聚于 F_1，这是从上述极限过程中推导出来的另一結果。

上面我們講的椭圓"族"有一个共同的頂点和一个共同的离頂点最近的焦点。現在让我們看一下有两个共同焦点的椭圓族。"共焦点"的椭圓族"简单而无空隙地"复盖平面，这是說，对于平面上任意一点，族中恰有一条曲綫通过它。这是因为二焦点到已知点距离之和是一个定值，所以已知点就在以此定值为和的椭圓上①。

现在我們再将与上述椭圓族共焦点的双曲綫族也加进来研究。这种双曲綫族也是简单而无空隙地复盖平面②。这样一来，对于平面上任一点，恰好有共焦点的椭圓族和双曲綫族中各一条曲綫通过它（图 6）。在任一已知点（二焦点例外），对过这点的椭圓和双曲綫分别所作的二切綫必平分通过这点的二焦半徑所作的角及其补角，因此这二切綫相互垂直。

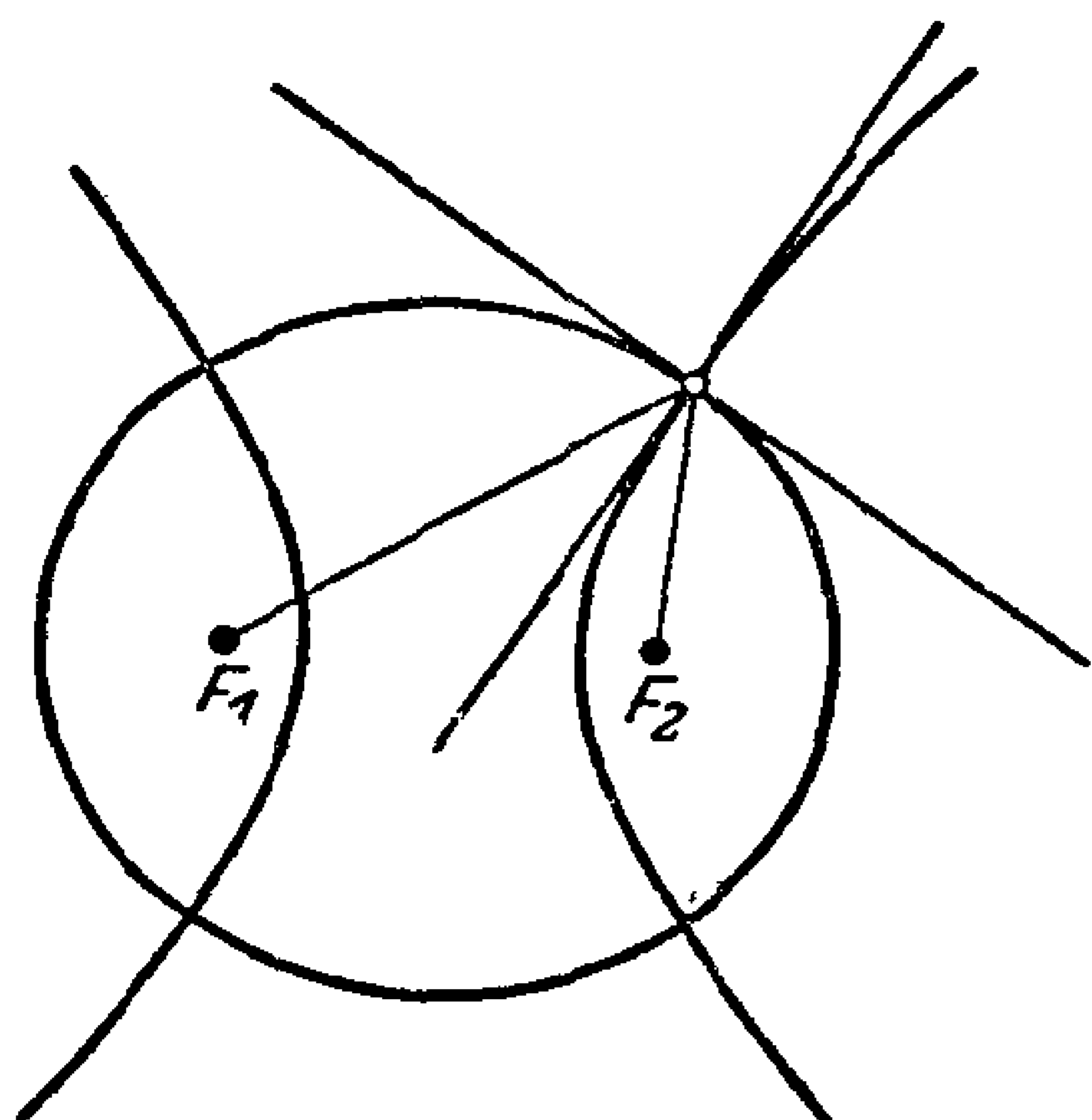


图 6

由此可知，共焦点的椭圓族和双曲綫族形成"正交曲綫族"（两族曲綫，如果一族中的每条曲綫与另一族中的每一曲綫直交时，称为正交曲綫族；二曲綫的交角，按定义为在其交点处二切綫所成的角）。为了获得正交曲綫族的整个面貌，我們从 F_1F_2 的垂直平分綫开始，来看看双曲綫族。这些双曲綫越来越扁平，最后变为綫段

① 連接二焦点的綫段是退化的椭圓。在此椭圓上任一点，距二焦点距离之和等于二焦点間的距离。

② 連接二焦点的直綫，但去掉焦点之間的部分，是退化的双曲綫。連接二焦点的綫段的垂直平分綫也是退化的双曲綫。在后面的情形中，距离之差是常数零。

F_1F_2 的延长綫——一对射綫。如此平面完全被复盖了。現在我們再跳到綫段 F_1F_2 上去。这一綫段逐漸膨脹，起初是扁平的椭圓，而当它的大小无限扩張时，形状越来越象圓。这样，平面第二次被复盖了。

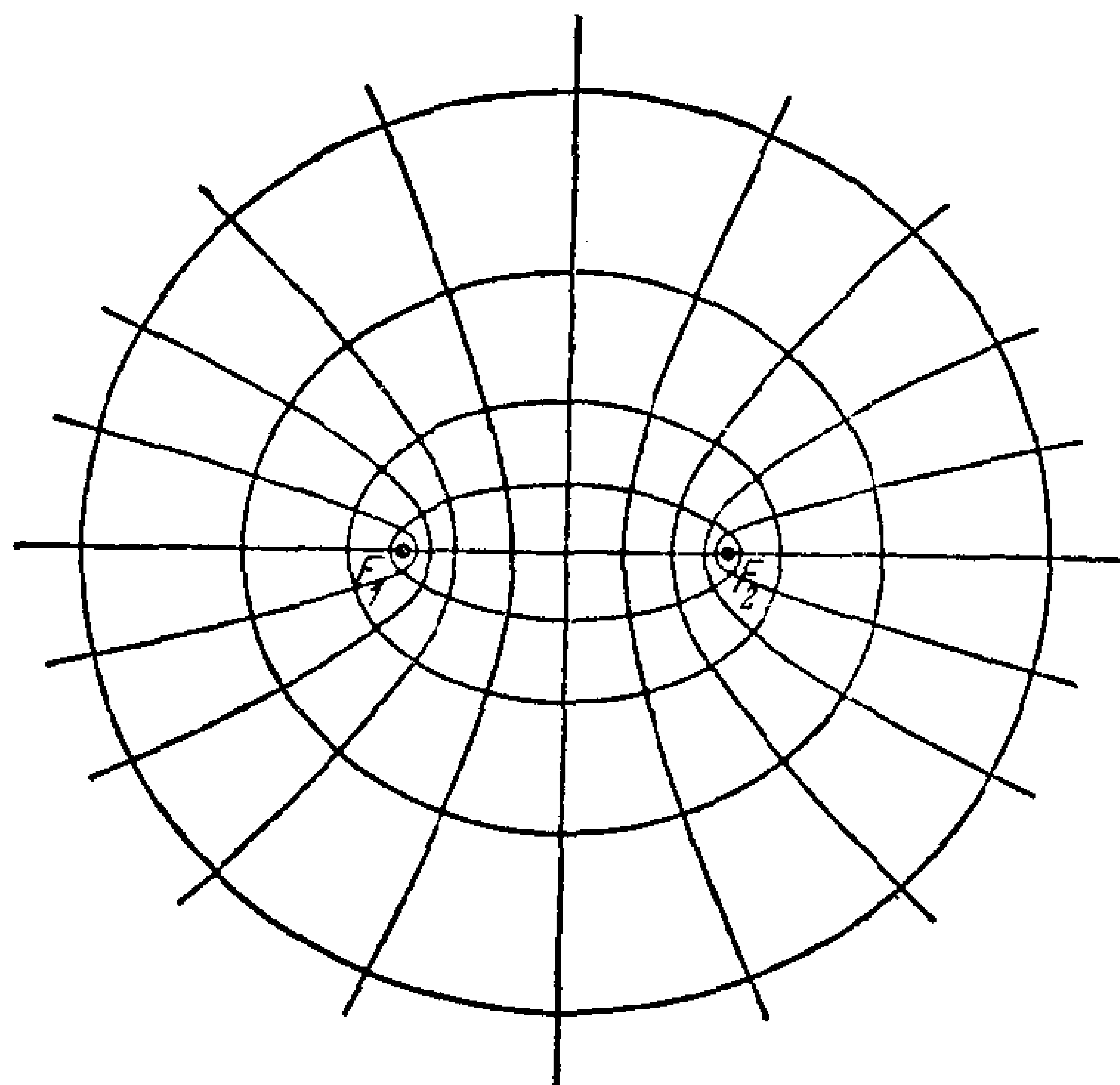


图 7

正交曲綫族另一个非常簡单的例子是同心圓組和通过公共圓心的諸直綫。这样的图形可以由上例用极限过程得到，卽当二焦点趋近以至重合时。这时椭圓都变为圓，双曲綫都变为成对的直綫。

地图上的等高綫和最大坡度綫，也是正交曲綫族的一个例子。

最后，让我們再講一种用繩綫作出的正交曲綫族。把一根繩綫纏繞在一个凸的曲綫上，比如說圓。現在要找出一面将繩綫拉紧一面打开时繩綫端点所描繪的曲綫（图 8）。如此得出的曲綫叫做圓的"漸伸綫"，它繞着圓走，一圈比一圈寬，亦卽它是一条螺綫。由上面的作图法显然可知，螺綫垂直于由其

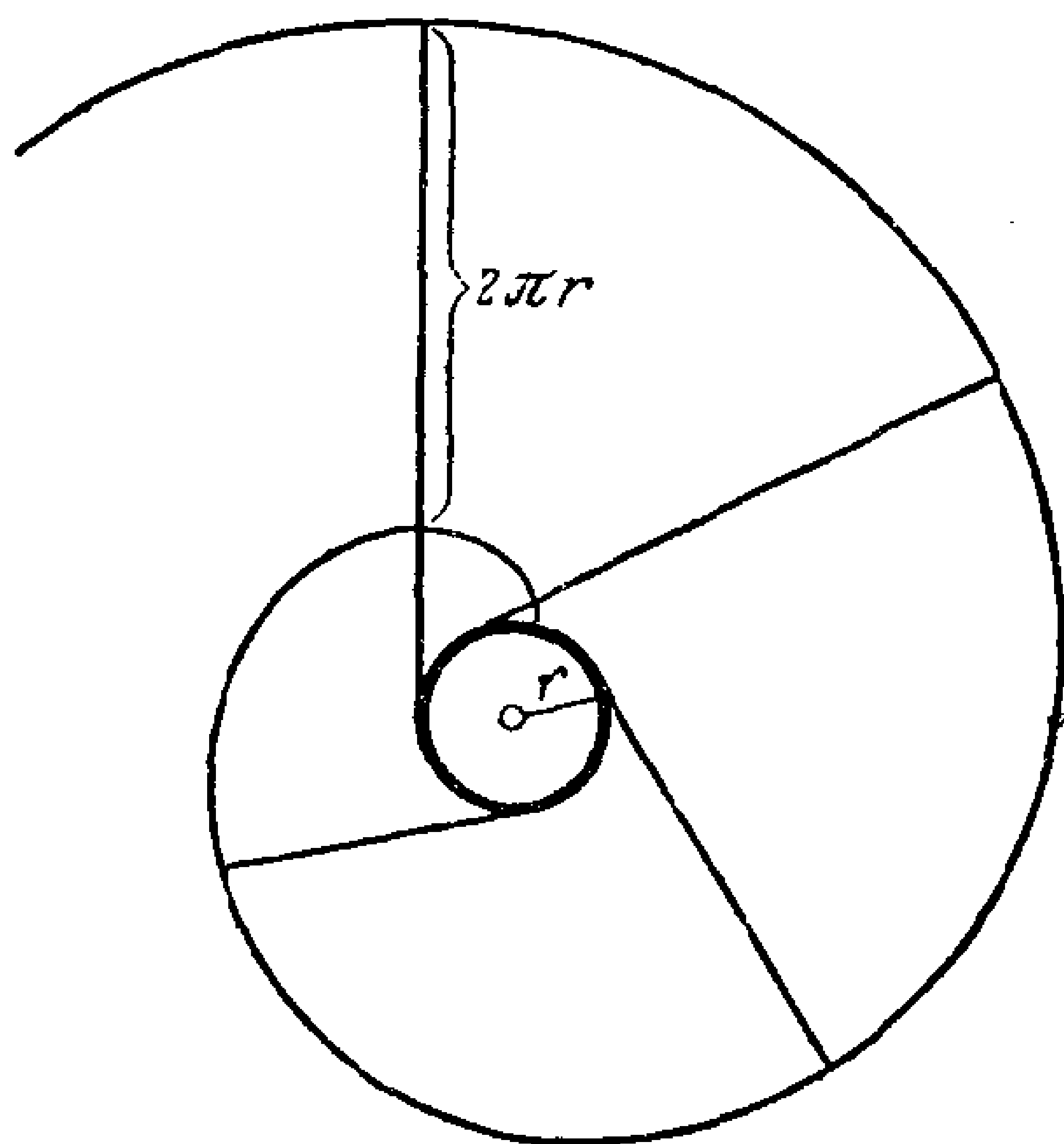


图 8

上任一点所作的圓的一条切綫。螺綫的其他各圈也跟这条切綫直交。由相邻二圈截出的切綫綫段，其长一定，等于母圓的圓周长。

我們可以由园周上不同的点开始打开繩索而作出同一圓的任意多个其他的漸伸綫。也可以只将漸伸綫族中的一条曲綫繞圓心旋轉而得到漸伸綫族的全部曲綫。漸伸綫族簡单而无空隙地复盖平面，但圓內的点除外。漸伸綫族正交于圓的两族半切綫之一。

对于其他任何直綫族，它的正交曲綫族也都是漸伸綫。它們的母綫（上例是圓）就是已知直綫族的包絡。我們将在微分几何（第四章）和运动学（第五章）中再回顾这一現象。

§ 2. 柱面、錐面、圓錐曲綫以及它們的回轉曲面

最簡单的弯曲的面是柱面。柱面可以由最簡单的曲綫——直綫和圓——用下法得出：沿一圓周移动垂直于圓面的直綫。得出柱面的另一种方法是：将一直綫繞着和它平行的軸回轉。由此可見，圓柱面是一种回轉曲面。回轉曲面是曲面中很重要的一类。在日常生活中常常碰到它，例如杯子、瓶子等等。这种曲面都具有这样的特征：它們可由一平面曲綫繞同一平面上的一軸回轉而产生。

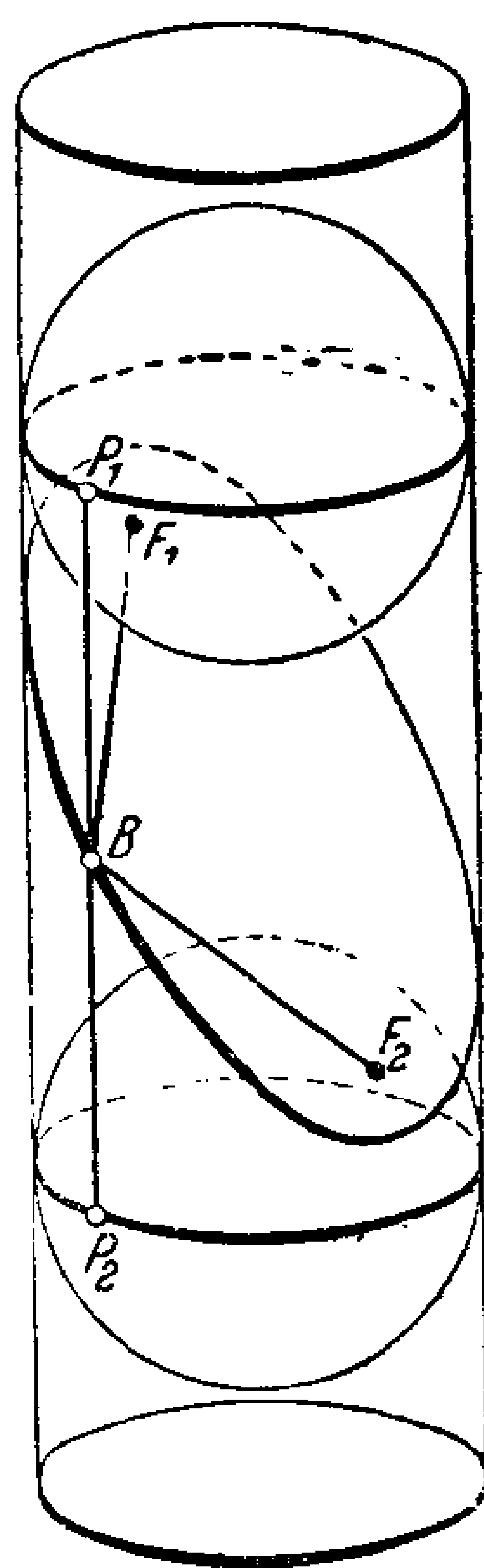


图 9

一个垂直于柱面軸的平面，同柱面交于一圓。与軸斜交的平面同圓柱面的截綫，給人的直观感觉好象是一个橢圓。現在我們来証明，这曲綫的确是橢圓。为了証明，我們取一个大小恰够放入柱面內的球，推动之，使与截面剛好接触（图 9）。另取一球，同法，放在截面的它側。这两个球与柱面切于二圓，与截面切于两点 F_1 和 F_2。将截面与柱面的交綫上任一点 B 同 F_1

和 F_2 連接起来。考虑柱面上經过 B 的母綫，它与球和柱面的交綫交于 P_1，P_2 两点。BF_1 和 BP_1 是一个球的两条通过 B 的切綫。所有这样的切綫綫段都相等，这可以从球有旋轉对称性立即知道。因此而有 $BF_1=BP_1$，同理 $BF_2=BP_2$。从此得出

$$BF_1+BF_2=BP_1+BP_2=P_1P_2。$$

但是由于图形有旋轉对称性，距离 P_1P_2 与曲綫上所选擇的 B 点的位置无关，因此截綫上的所有点到 F_1 和 F_2 的距离之和都相等；这就是說，这曲綫是以 F_1 和 F_2 为焦点的橢圓。

上述事实还可以表述成投影定理：假如光綫从垂直于圓所在的平面射进来，則圓在斜面（对圓所在的平面来說）上的投影是橢圓。

仅次于圓柱面的最簡单的回轉曲面是圓錐面。圓錐面由回轉一直綫而得，但回轉軸与該直綫相交。因此，从一定点到一定球的所有切綫形成一圓錐面，又从一圓的軸（譯者注：即通过圓心且垂直于該圓所在的平面的直綫）上一点作到該圓的所有投射綫也形成一圓錐面。

垂直于錐面軸的平面与錐面交于一圓；截面稍傾斜，交綫便成为橢圓。这可以借助于二輔助球来証明，証法同圓柱面的情形完全一样。

截面越傾向錐面軸，橢圓越扁长，截面与錐面的母綫一开始平行，交綫就不再是有界的閉合曲綫。用前面用过的极限过程的办法（参看图 5），可以証明交綫是抛物綫。

如果截面更傾向錐面軸，那末截面同两支錐面都相交（以前只是同一支相交）。它們的交綫看来好象是双曲綫的样子（图 10）。为了証明它的确是双曲綫，我們在两支錐面內各放进一球，使剛好与錐面和截面相接触。（这时二球居于截面的同側，与此相反，在橢圓的情形下，二球居于截面的异側。）仿照第 7 頁的証明，就有

(图 10):

$$BF_1=BP_1,$$

$$BF_2=BP_2,$$

$$BF_2-BF_1=BP_2-$$

$$-BP_1=P_1P_2=\text{常数}。$$

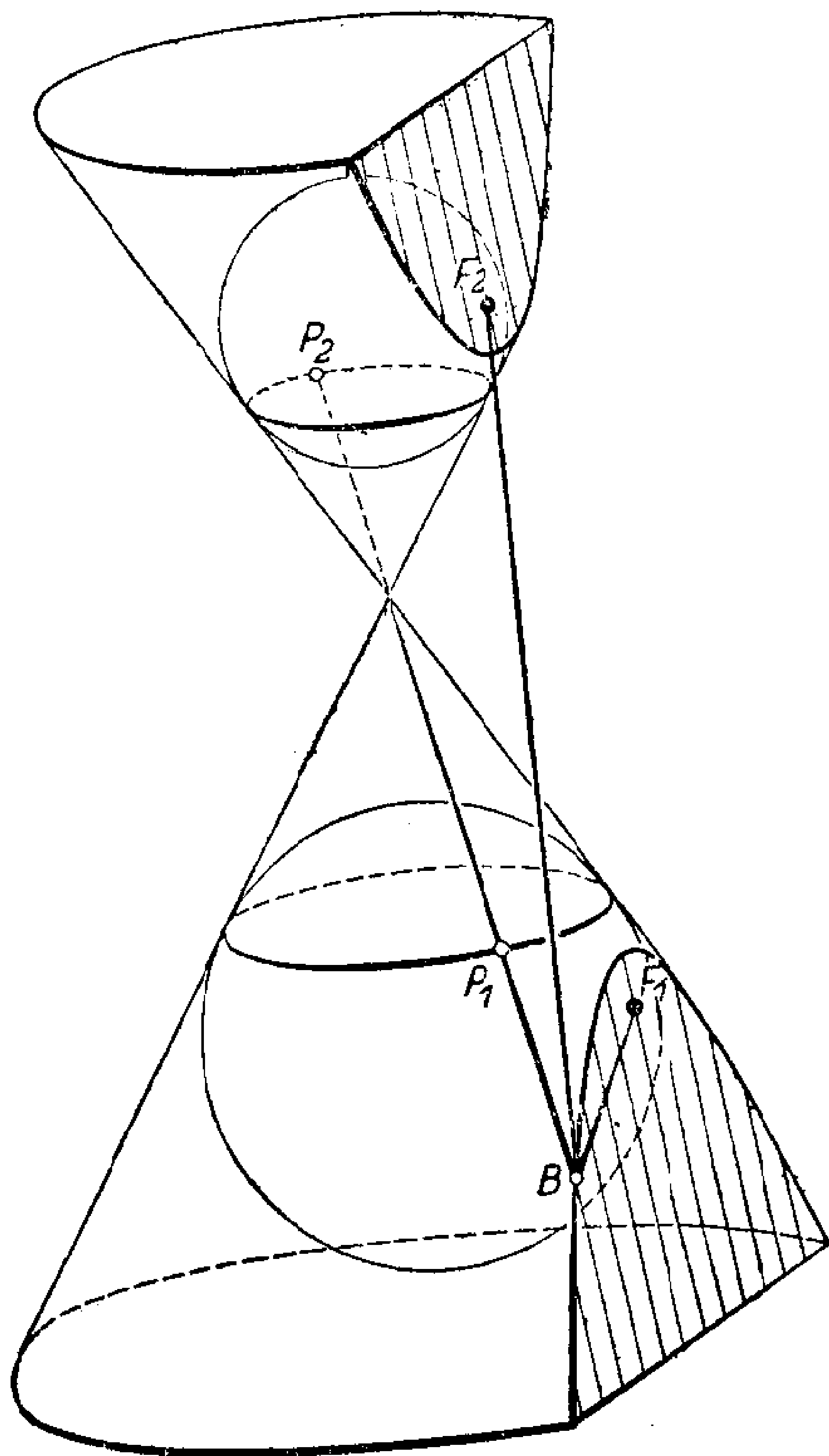


图 10

到現在为止我們知道了,任一不含錐面頂点的平面与錐面的交綫可以是椭圓,也可以是拋物綫或双曲綫①。这样来說,这三种曲綫有一种內在的联系。因为这个原故,我們总称之为**圓錐曲綫**②。除了上述的三种"常态"圓錐曲綫之外,还有几种"非常态"圓錐曲綫,这是当截面通过錐面的頂点,或者当錐面退化为柱面时得到的。这样一来,一点、"算两次"的一直綫、二相交直綫、二平行綫、空的平面,都可看作是退化的圓錐曲綫。圓錐曲綫也叫做**二阶曲綫**,因为在笛卡儿坐标中,圓錐曲綫用二次方程表示。曲綫是二阶的特性不能直接由直观形象表达。但由此特性可得出一个完全直观的推論:二阶曲綫不能与直綫交于两个以上的点。不过除了圓

① 圓可以看作椭圓的极限情形。

② 因此,如果光綫从圓的軸上一点出发,则圓在任一平面上的影子是圓錐曲綫。可以用实例說明,其中也包括双曲綫在內,例如公路被汽車前面的灯发出的錐形光綫所照亮的部分,就是双曲綫一支的內部。因为双曲綫的任何切綫都可以看作是圓的切綫的投影,可知双曲綫的切綫只在切点上与曲綫有公共点,这就是在第3頁上提到过的。

錐曲綫之外，还有其他的一些曲綫，也具有这种性質。

在本章附录里我們将討論圓錐曲綫的垂足点作法和准綫的性質这两个几何事項。象焦点作图法一样，它們也是一切非退化曲綫的特征。

我們已經知道柱面和錐面是由回轉直綫生成的。由此自然会想到把圓錐曲綫回轉生成回轉曲面。訨我們选取圓錐曲綫的一个对称軸作为旋轉軸，曲綫經过半轉之后只是把曲綫在軸的两側部分互相掉換，所以只能得出一个曲面。但是若选擇其他位置的回轉軸，得到的图形就复杂得多了。

因为椭圓有两个对称軸，所以可得出两种不同的回轉曲面。依照椭圓是繞着长軸回轉的或繞着短軸回轉的，分别得出长回轉椭球面(图 11) 或扁回轉椭球面 (图 12)。鸡蛋的表面近似长回轉椭球面，地球的表面是大家所熟悉的扁回轉椭球面。

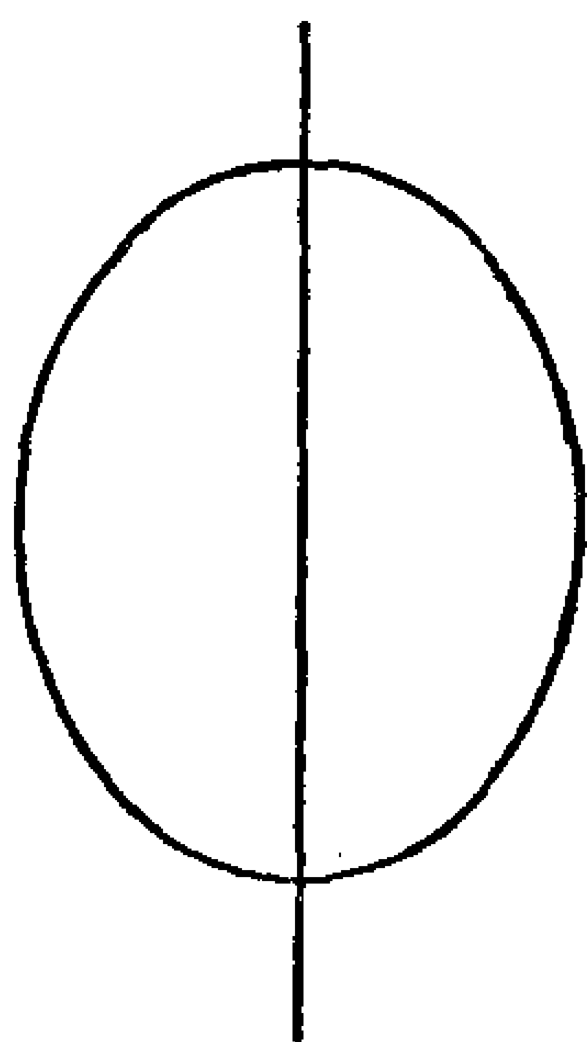


图 11

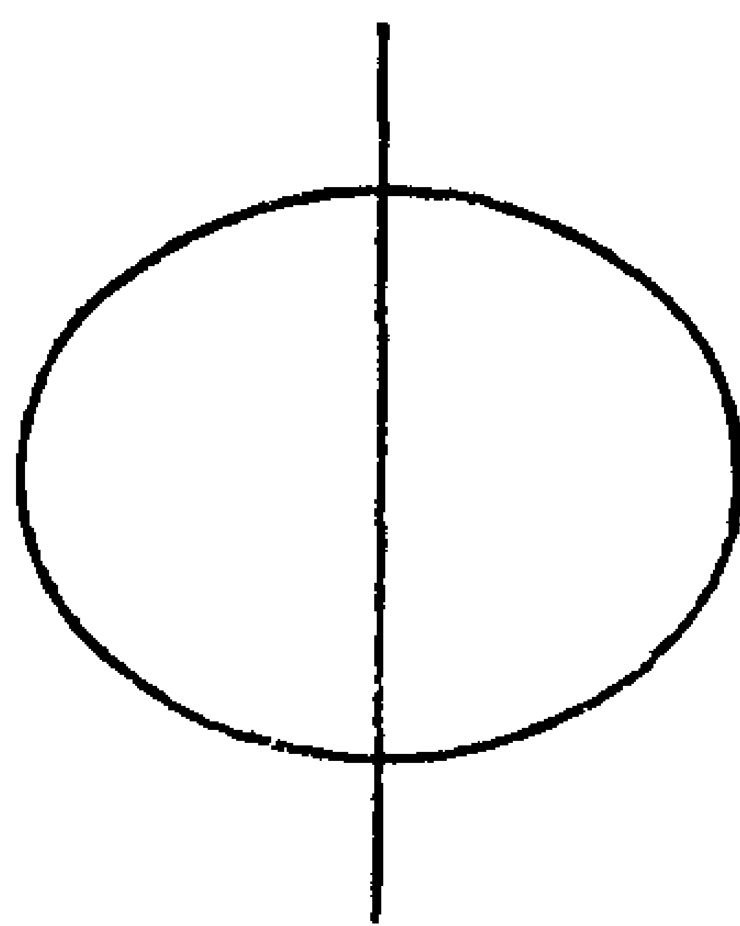


图 12

訨椭圓的长軸和短軸长度之差变成零，便得到两种回轉椭球面之間的过渡情形。此时椭圓变成了圓，回轉椭球面变成了球面。因为圓对于它的任一直徑对称，所以球面可用无穷多的回轉方式产生。这种性質正是球面的特征。球面是仅有的可用一种以上的回轉方式产生的曲面。

抛物綫只有一个对称軸，因此只能产生一种回轉曲面，这就是

回轉抛物面(图 13)。

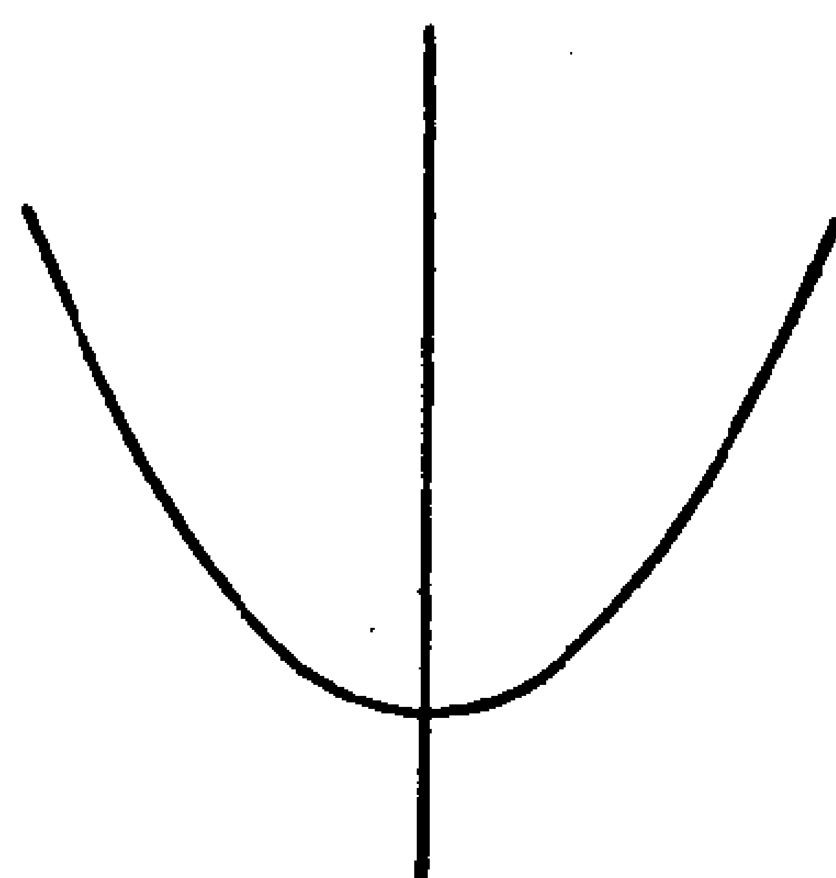


图 13

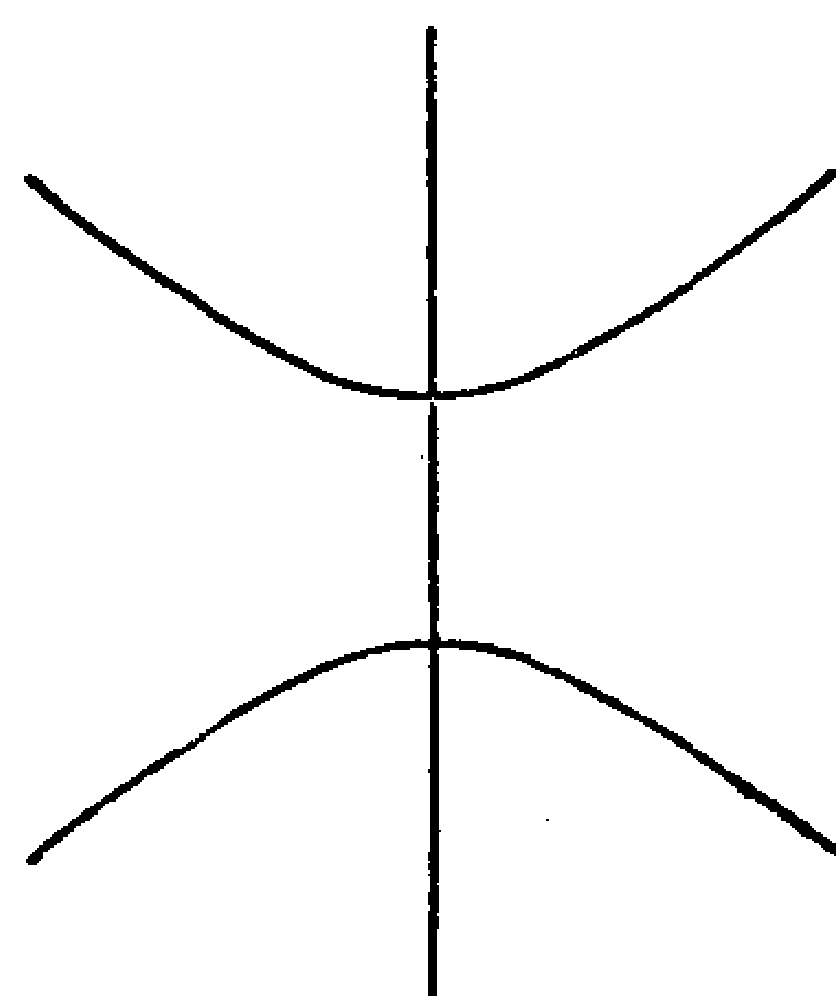


图 14

另一方面，双曲綫产生两种不同的回轉曲面。依照双曲綫或是繞着焦点的連綫回轉的，或是繞着这条綫段的中垂綫回轉的，分别得出双叶回轉双曲面(图 14) 或单叶回轉双曲面(图 15)。这里

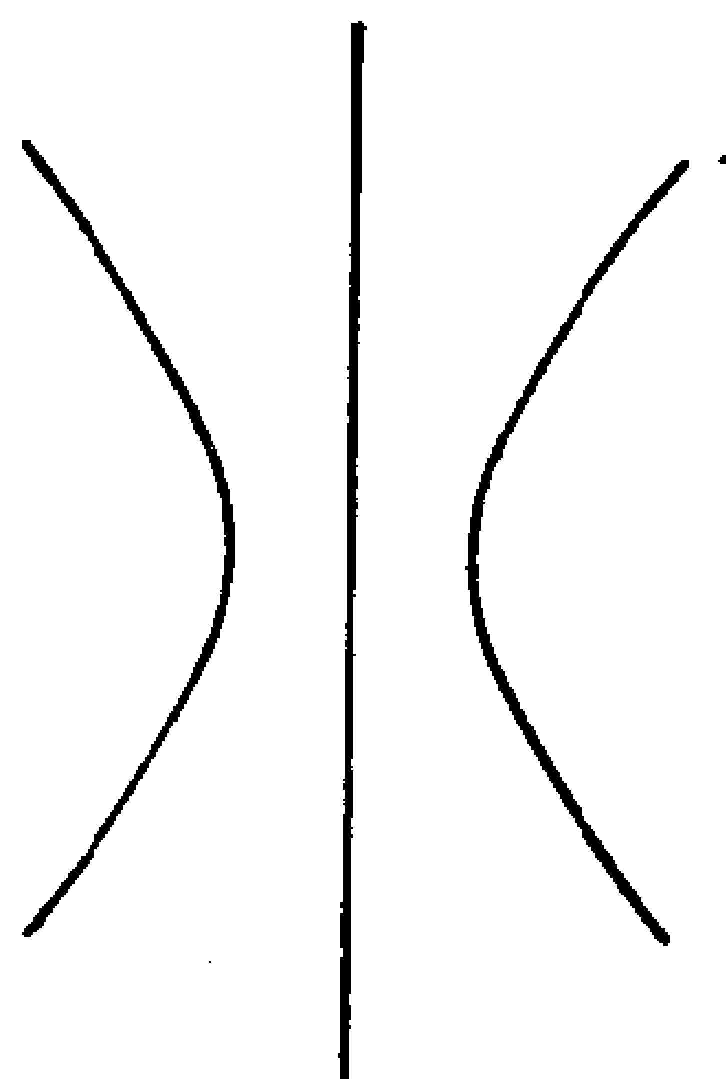


图 15

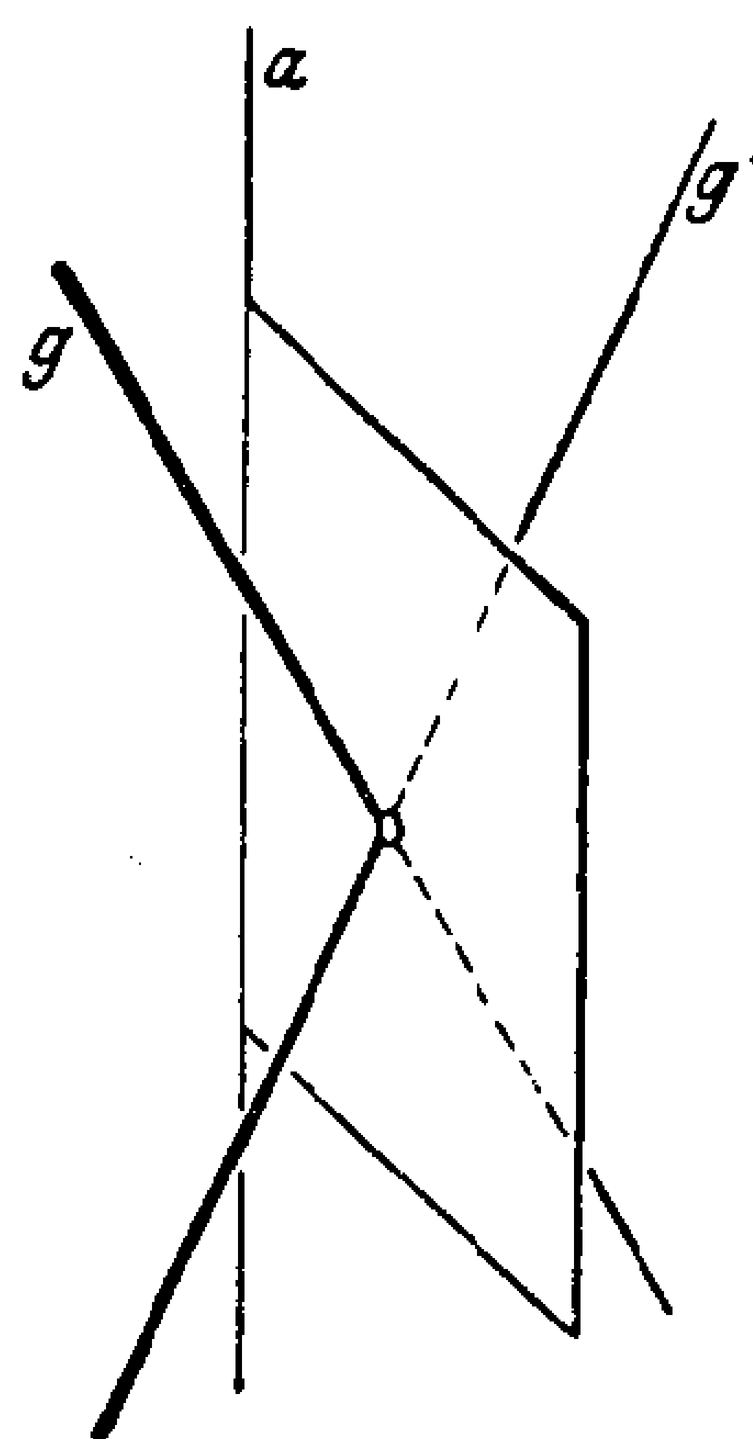


图 16

有一件令人惊奇的事情：在单叶回轉双曲面上有无穷多的直綫。事实上，这种曲面也可以用一条直綫圍繞与此直綫相敧斜的另一直綫回轉而产生（以前我們只談过圍繞与母綫同平面的軸回轉而产生的曲面)。这件事只能用解析方法証明。但是用直观可以看

出，单叶回轉双曲面的作图可以有两种方式。事实上，假如我們取一条直綫 g' 同原来的母綫 g 对于通过軸 a 的平面对称（图 16），那末新的直綫 g' 經过回轉之后，也象 g 一样，产生同一曲面。这样，在单叶回轉双曲面上含有两族直綫，每族直綫都复盖曲面，并且这两族直綫是这样配置的：一族的每一直綫与另一族的每一直綫相交（或平行），但同族的任二直綫相互敧斜（图 17）。

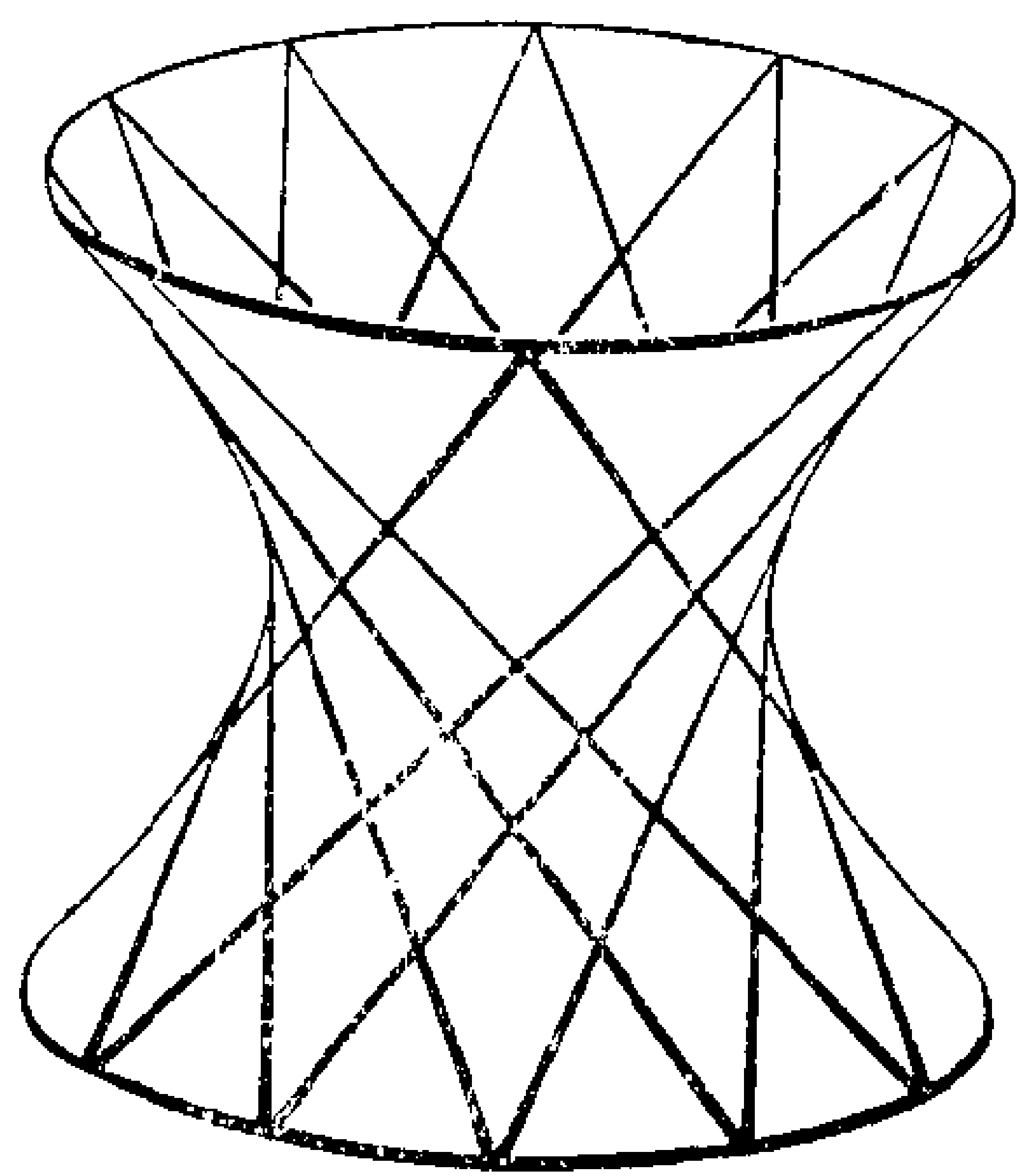


图 17

§3. 二阶曲面

由回轉圓錐曲綫产生的若干曲面，是一种更广泛的所謂二阶曲面（这是由于解析上的理由）的特殊类型。二阶曲面是在笛卡儿空間坐标中滿足二次方程的曲面。用解析方法容易証明，二阶曲面有下列性質：任一平面与一个二阶曲面交于圓錐曲綫（包括常态的和非常态的）；此外，由一定点到一个二阶曲面的所有切綫形成一錐面，此錐面同任一平面的交綫是一圓錐曲綫。还有，此錐面与曲面相切，其各切点也形成一圓錐曲綫。二阶曲面是同时具有这几种性質的唯一曲面①。下面我們討論二阶曲面的几种不同类型。

把圓柱面推广，得到椭圓柱面。椭圓柱面系由沿一椭圓移动一直綫，使直綫常垂直于曲綫的平面而得。用相同的办法，从抛物綫和双曲綫可得到抛物柱面和双曲柱面（图 18，19）。

① 从所說的第一个性質可以推出，一直綫如果不是整个綫段在曲面上，則此直綫不能同該曲面交于两个以上的点。不过除了二阶曲面之外，也还有其他的曲面具有这种性質的，例如正方体的表面就是。

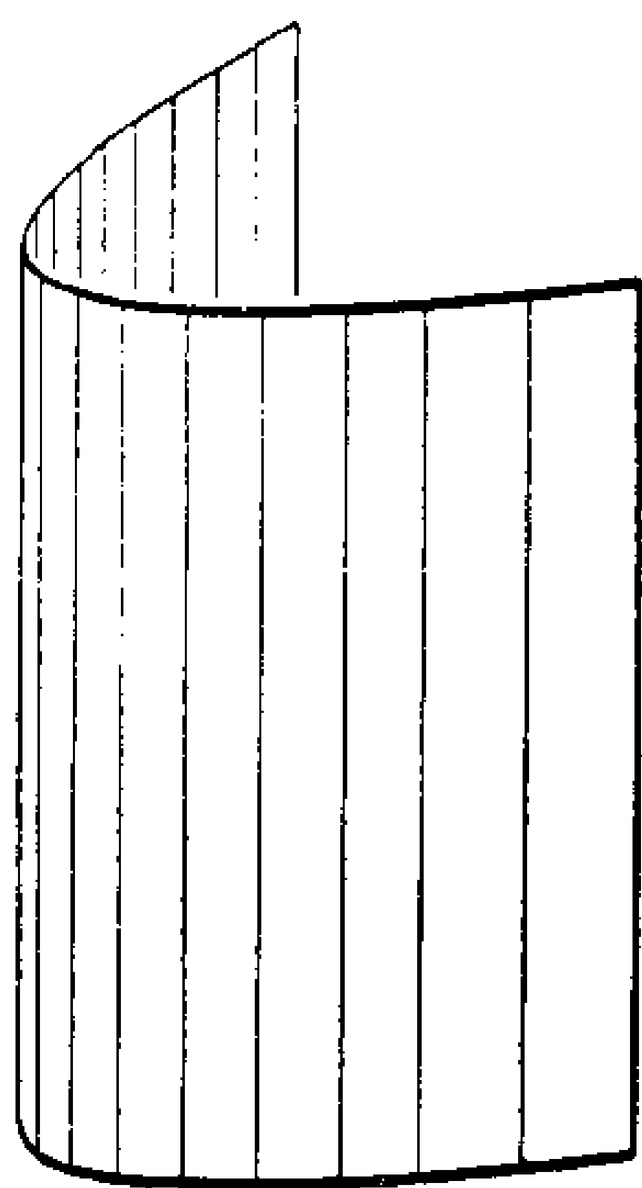


图 18

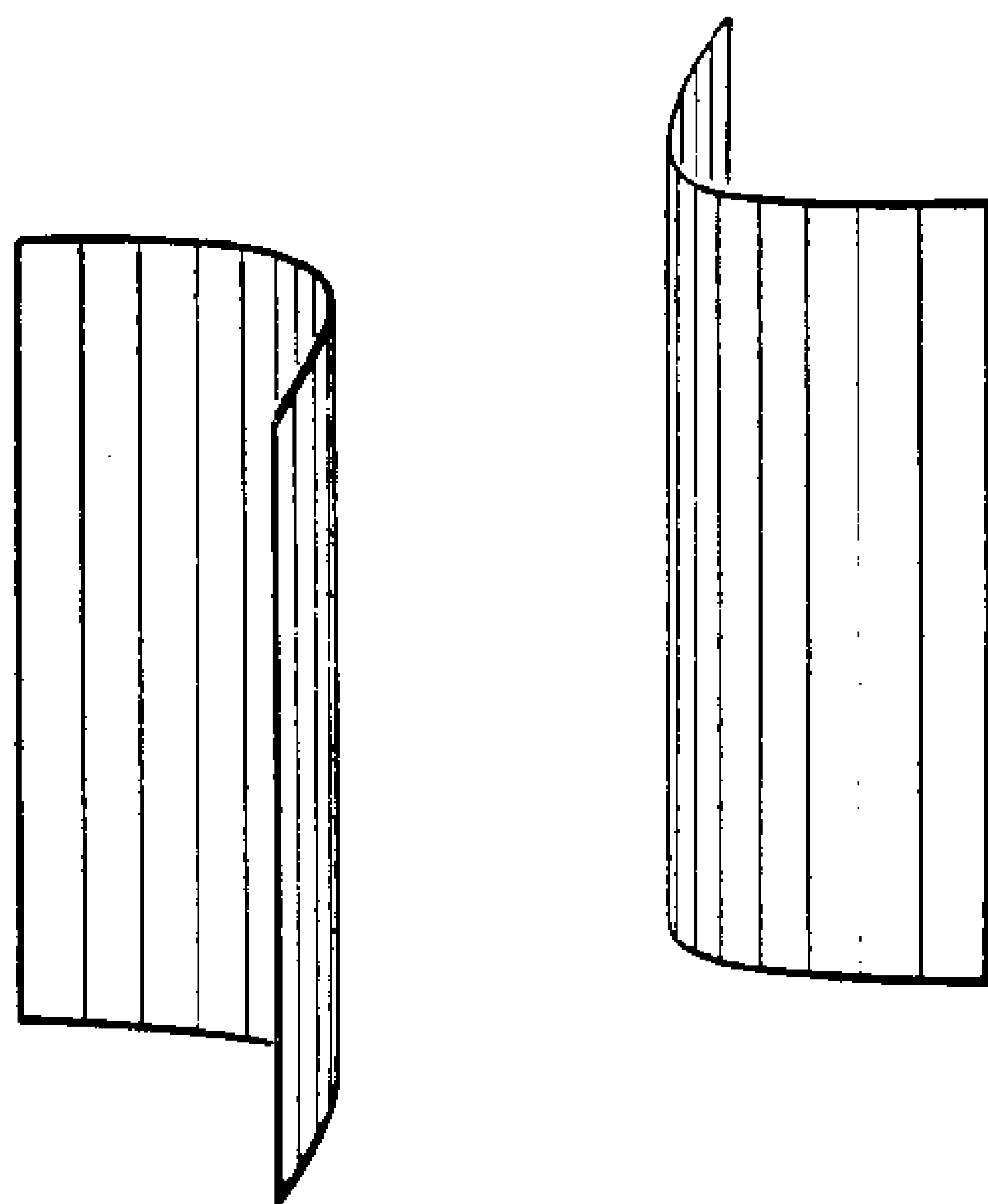


图 19

圓錐面相应的推广是一般的二阶錐面。二阶錐面由連接一常态圓錐曲綫上的各点与曲綫平面外一点的諸直綫做成。应該注意，跟柱面的情形不同，不能从橢圓、抛物綫、双曲綫得出三种不同的錐面。我們知道，一个动平面同一个定錐面的交綫是三种类型的圓錐曲綫，但对于柱面情形并不是这样。

用一种所謂伸縮变形法从相当的回轉曲面可得到一般的錐面和橢圓柱面。方法是这样：把通过旋轉軸的某一平面上的所有点固定，让空間其余的所有点朝着或背着这个平面移动，这些点在移动前后到平面的距离成一定比。可以証明，經过这样的变换，圓变成橢圓（或圓），直綫变成直綫，平面变成平面①，二阶曲綫和二阶曲面分别变成二阶曲綫和二阶曲面。

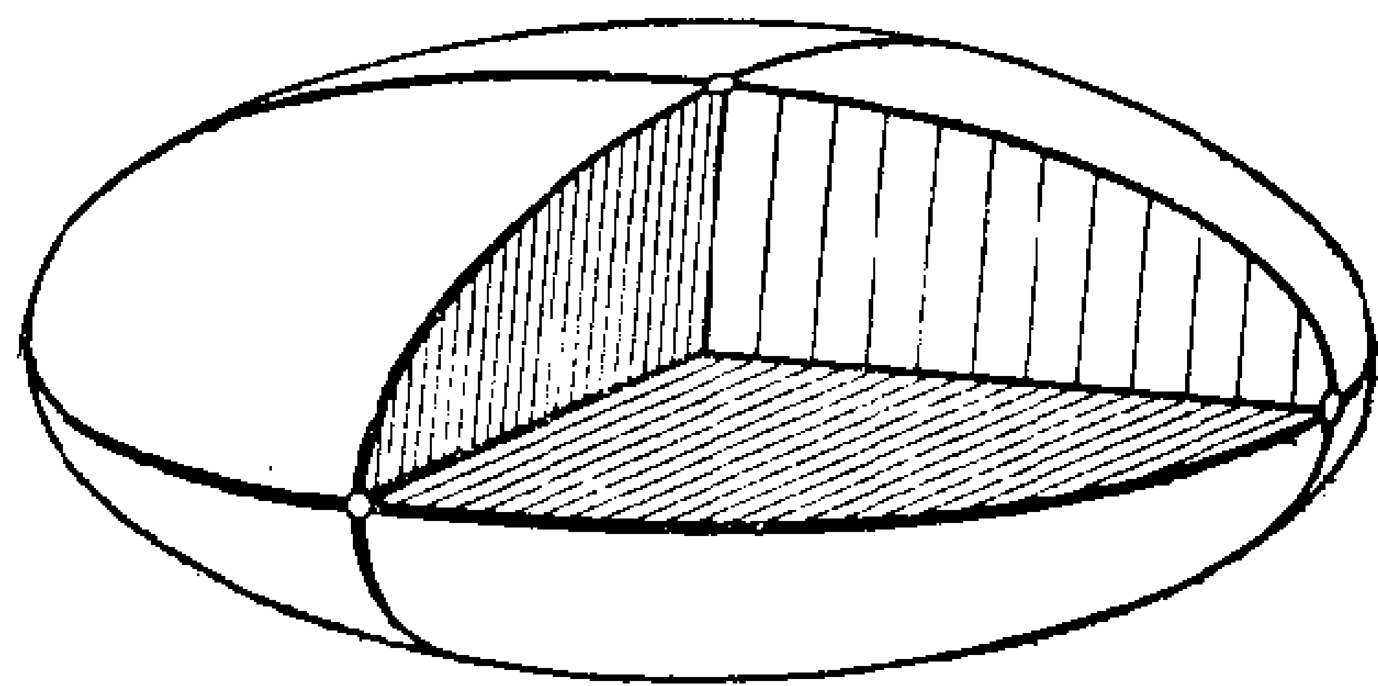


图 20

回轉橢球面（长的或扁的）經过伸縮变形，得到一般

① 施伸縮变形于平面上的图形，得到的图形与用平行投影投射到斜平面上的相同。

的椭球面。回轉椭球面对于通过其軸的任一平面对称，但一般的椭球面只有三个对称平面。这三个对称平面相互垂直。它們的交綫被曲面截出的三个不等的綫段，分别叫做**长軸**、**中軸**和**短軸**(图20)。用伸縮法可以把一般椭球面变回成一个扁的或长的回轉椭球面，只須令长軸和中軸相等或者令中軸和短軸相等即可。

在波浪冲刷之下的海岸上常露出三軸椭球(即一般的椭球)状的石头。任何形状的石头，在海水經常冲刷磨損下，漸漸变成类似椭球的形状。这种現象的数学探討，包含許多概率論上的問題。

单叶双曲面、双叶双曲面和椭圓拋物面，是可用伸縮变形法于回轉双曲面和回轉拋物面得出的最一般的曲面。两种类型的双曲面各有三个对称平面，椭圓拋物面有两个对称平面。

因为伸縮变形法仍将直綫变为直綫，所以一般的单叶双曲面有与单叶回轉双曲面相同的性質，即它包含两族直綫。直綫的配置也如同单叶回轉双曲面，即一族的每一直綫与另一族的每一直綫相交，但同一族的二直綫不相交，它們相互敧斜。

由此得出单叶双曲面的如下作法：在一族中任意取三条直綫(图21)。因为这三条直綫的每两条相互敧斜，因此通过一条直綫上的任一点 P 能作而且只能作一条与其他二直綫同时相交的直綫 p，这条直綫也就是这样的二平面的交綫：一个平面通过 P 和第二条直綫，一个平面通过 P 和第三条直綫。p 与双曲面有了三个公共点，所以它必定完全在这个曲面上，因为一直綫与作为二次曲面的双曲

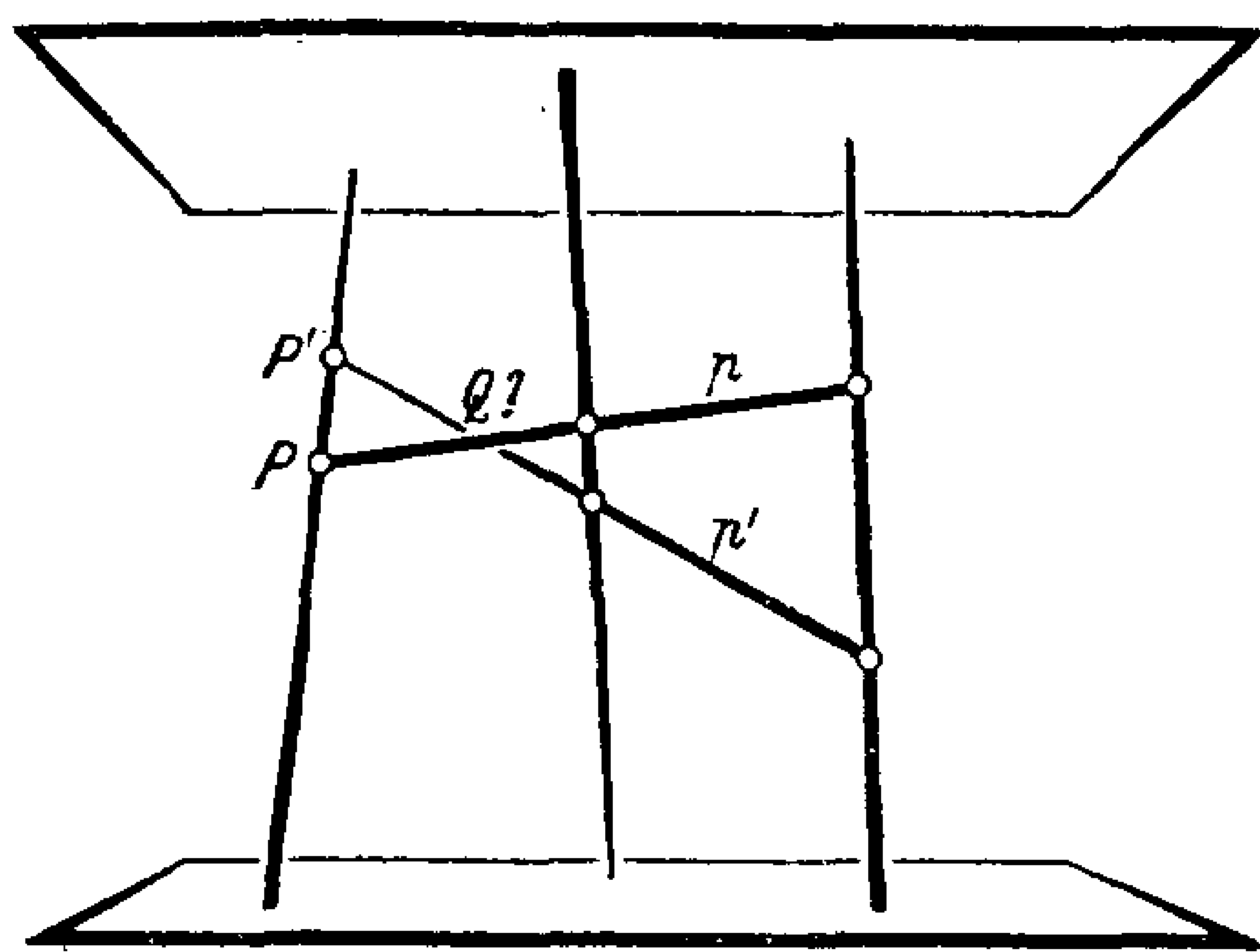


图 21

面不能有两个以上的交点。現在讓 P 在第一条直綫上走过，則相当的直綫 p 走过曲面上不属于第一条直綫的那一族所有直綫的位置。如果从第二族中选取任意三条直綫，用相同的方法又可得到第一族的所有直綫，当然这一族也包括开始的那三条直綫在內。这个作法表明，所有同一族的任意二直綫必相互敧斜；因为假若 P 和 p'（图 21）交于一点 Q，原来的三条直綫就将落在一平面 $PP'Q$ 上，但这是跟假設不合的。

由此可見，三条敧斜直綫常决定一单叶双曲面，除非它們同时平行于一平面（但不互相平行）。在这样的情况下，三直綫决定一个不可以从回轉曲面得到的新的二阶曲面；它叫做双曲抛物面，形状大致象个馬鞍子（图 22）。它有两个互相垂直的对称平面，各与曲面相交成抛物綫。它有两族直綫，象我們在起初作图时的三条直綫一样，每一族直綫平行于一个定平面。直觀上可以看出，一平面不能与双曲抛物面交于椭圓，因为任一平面与这个曲面的交綫延伸至无穷远。由于这种理由，可知双曲抛物面不能用伸縮变形法从回轉曲面得到；因为在任一回轉曲面上都不能不有圓，而圓經过伸縮变形以后变成了椭圓。

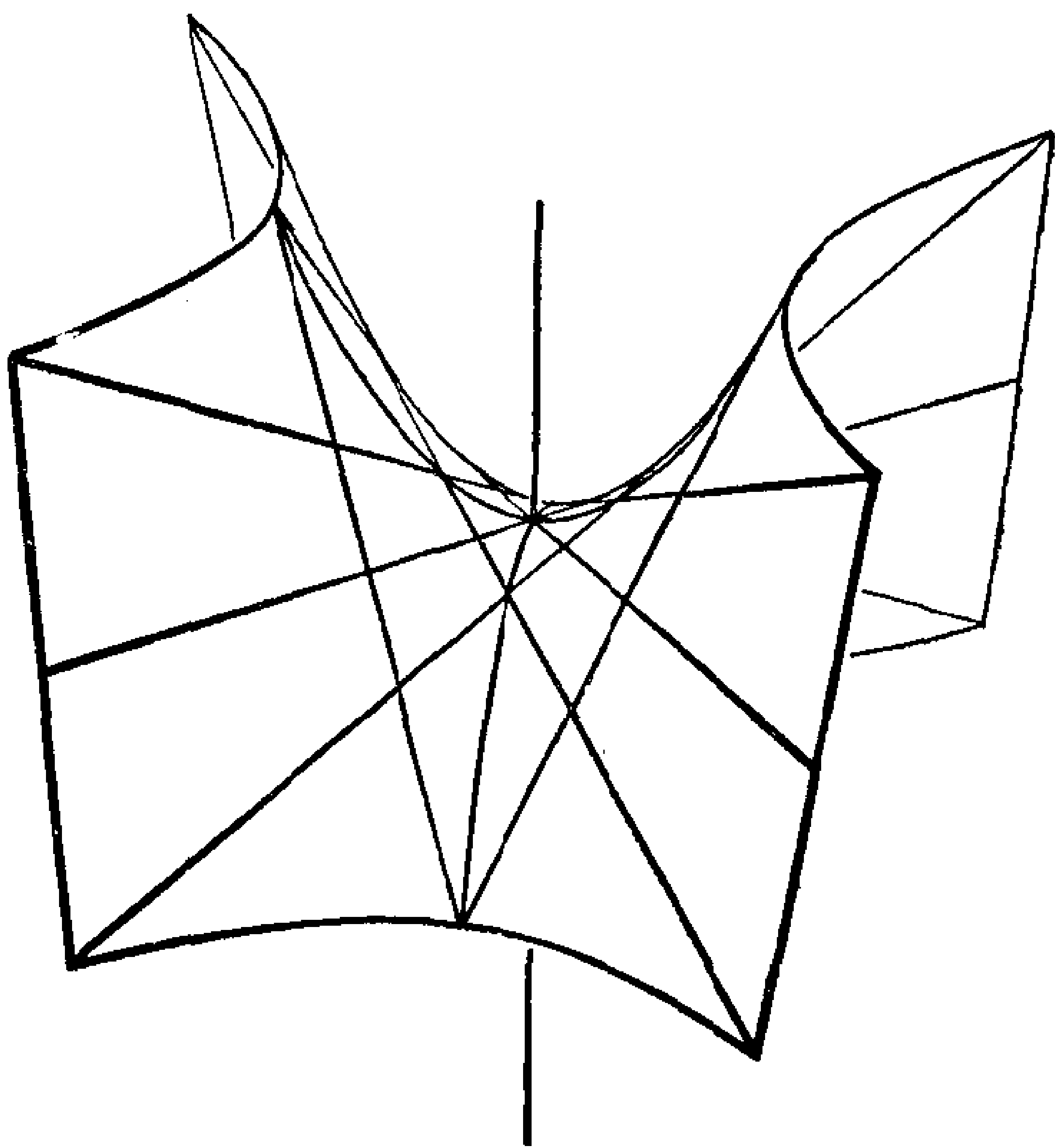


图 22

从此我們得到了产生曲面的一个新的原則：沿空間某一特定

的路綫移动直綫。这样产生的曲面叫做直紋曲面。由此可見九种二阶曲面中有六种是直紋的，它們是三种柱面，一种錐面，一种单叶双曲面，一种双曲抛物面。最后的两种有一个共同的特点：通过曲面上任意一点，这种动直綫不止一条。有这个特点的直紋曲面，只有上述两种曲面和平面。

其余的三种二阶曲面是椭球面、椭圓抛物面和双叶双曲面。它們都不含有直綫，因为它們向两个相反方向无限扩展的时候，不能不中断。

单叶双曲面和双曲抛物面上的两族直綫有一个奇特的性质，說明如下。設想这两种曲面上的直綫是用剛性材料做成的。把它們在相交的地方綁扎起来，使得这些直綫只能繞交点轉动而不能滑动。或許有人以为如此固定就会使整个的构架固定。其实不然，这个构架仍然可以活动的（图 23a, b）。为了大致看出能变形的单叶双曲面的变动情況，我們先把与这曲面交于椭圓的对称平

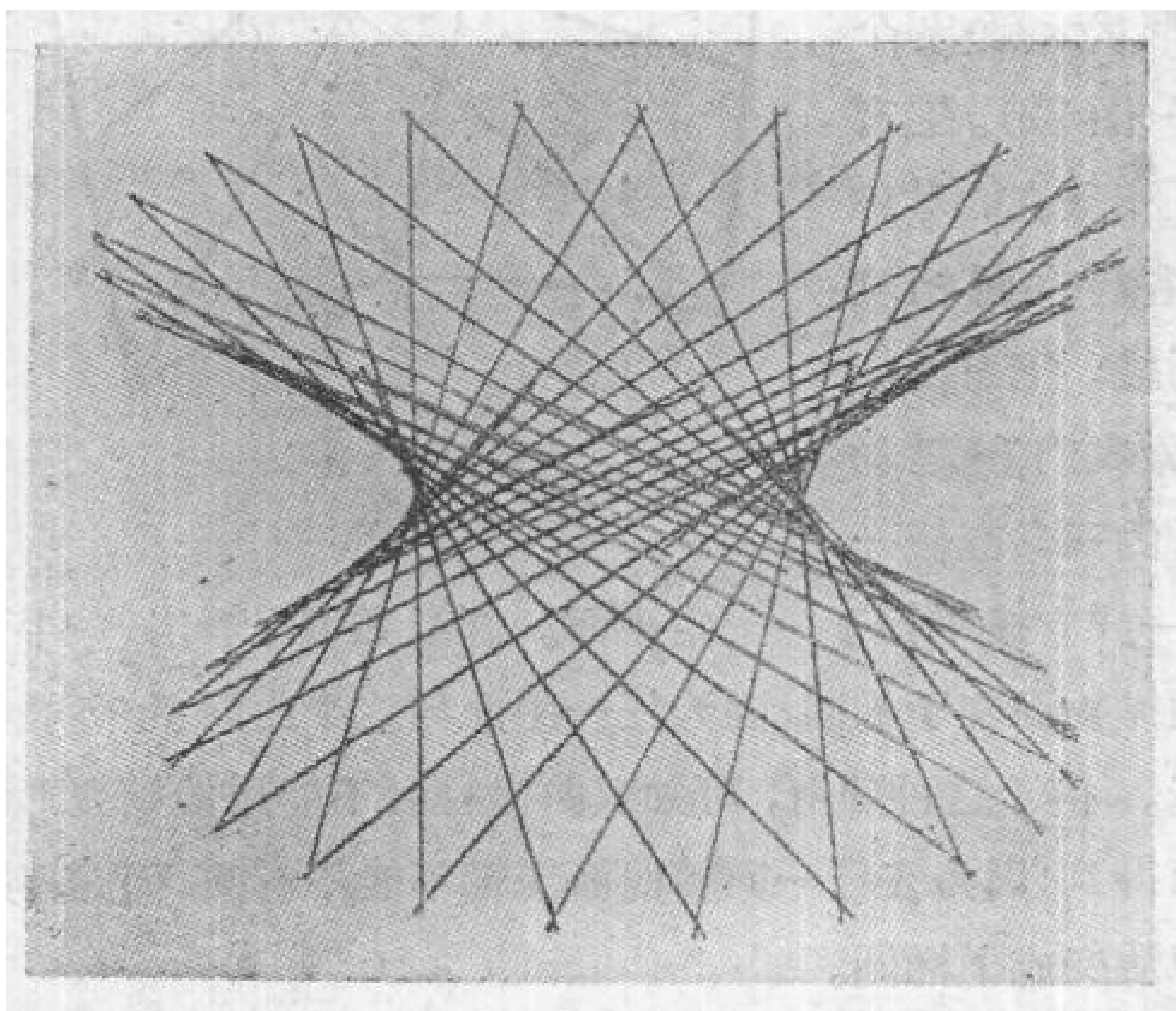


图 23a

面固定在水平位置上，然后改变构形的形状，但使对称平面永远保持对称平面。因为单叶双曲面和双曲抛物面是通过曲面上任一点有二直綫的仅有的两种曲面（平面除外），所以經过变形之后，单叶双曲面細杆模型不是仍旧保持单叶双曲面形状，就是变为双曲抛物面。可以証明，后面的情形不成立。我們把构架逐渐边收攏边提高，使这些細杆越来越接近对称平面的垂綫。这样，曲面的弯曲程度逐渐减小。与此同时，在对称平面上的諸椭圓成为§1中所講的逐渐細长的共焦椭圓族。在极限的情形下，构架叠合而为鉛直平面，而且諸細杆在这个平面上切于一个双曲綫，在水平面上的椭圓現在变为重合的綫段。同样，我們也可以把构架作相反方向运动，使細杆逐渐傾斜，以至于接近水平平面。在这个过程中曲面頸部的廓線益趋明显。在极限的情况下，构架与水平平面重合，同时諸細杆在这个平面上包絡一个椭圓。在本章的一个附录里我們还要給出細杆模型能动性的解析証明。双曲抛物面也有相仿的現象：构架經常保持抛物面的形状，但在两种极限情形下，曲面叠合在一平面上，而諸直綫包絡一个抛物綫。

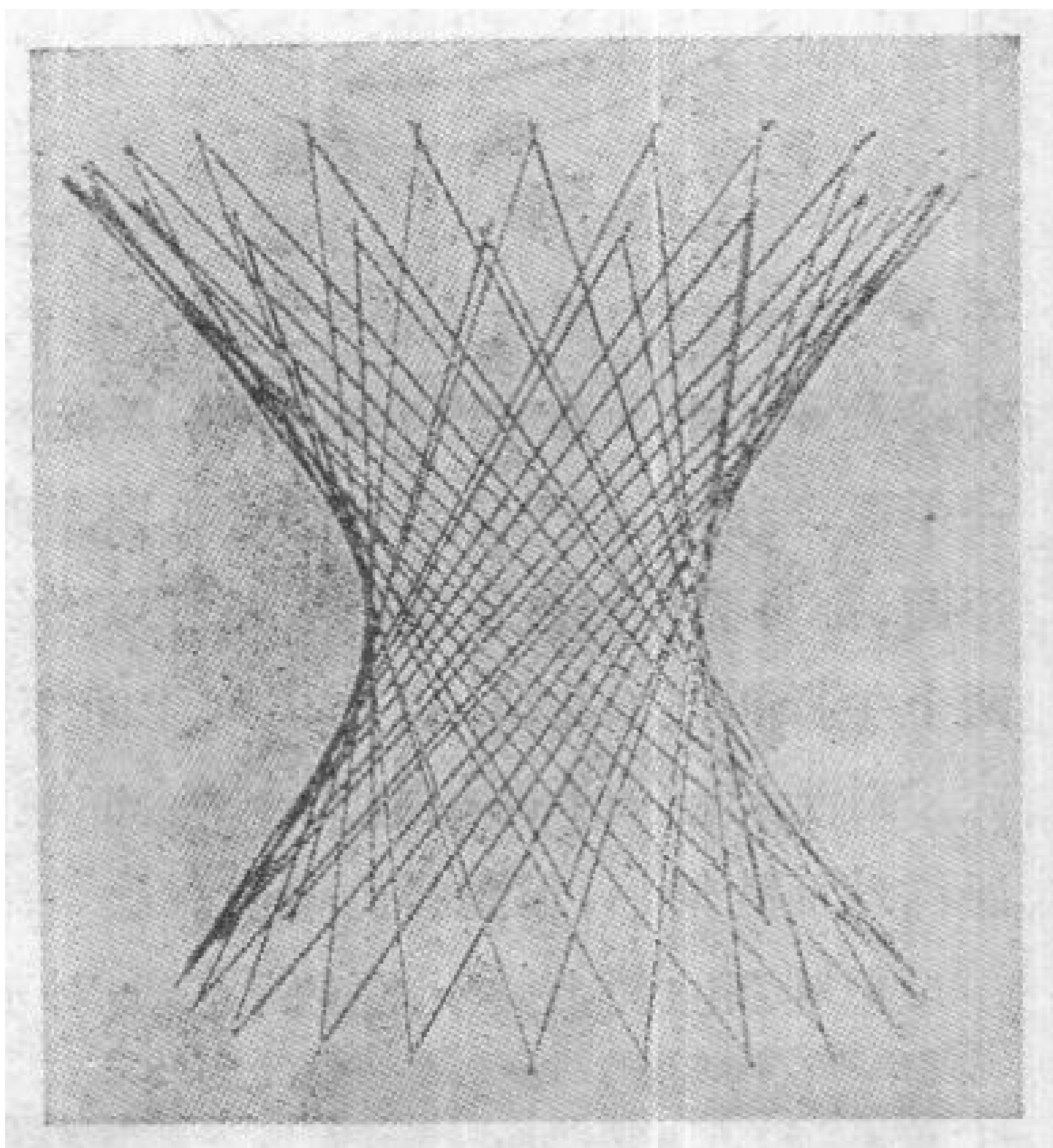


图 23b

二阶曲面还可以用另一种观点来分成两种类型。双曲圓柱面、抛物圓柱面和双曲抛物面，这三种曲面与任一平面的交綫不是圓；

因为交綫是向无穷远扩展的。另一方面，在其他的六种曲面上有无穷多的圓。因为这个原故，这六种与上述三种不同，它們都包含回轉曲面作为特例。

以三軸橢球面为例，証明确有圓形交綫存在（图 24）。通过中軸 b 的任一平面与橢球面交于橢圓，橢圓的一根軸是常值，等于 b。現在将通过 b 和橢圓短軸 c 的平面繞 b 轉动，一直轉到与通过 b 和长軸 a 的平面重合为止。在轉动的时候，截面上橢圓的第二根軸起初小于 b，最后大于 b。因此在中間的某处必有同 b 相等的时候，从此可知，这时的交綫是圓。由于橢球面有对称性，因此对称于平面 (b, c)，必另有一平面，与曲面交于圓。我們还可以証明，任一平行于圓形截面的平面，都与橢球面交于圓。从此可以推知，在任何三軸橢球面上有两个平行圓族（图 25, a, b）。对于回轉橢球面，两族圓相重合。

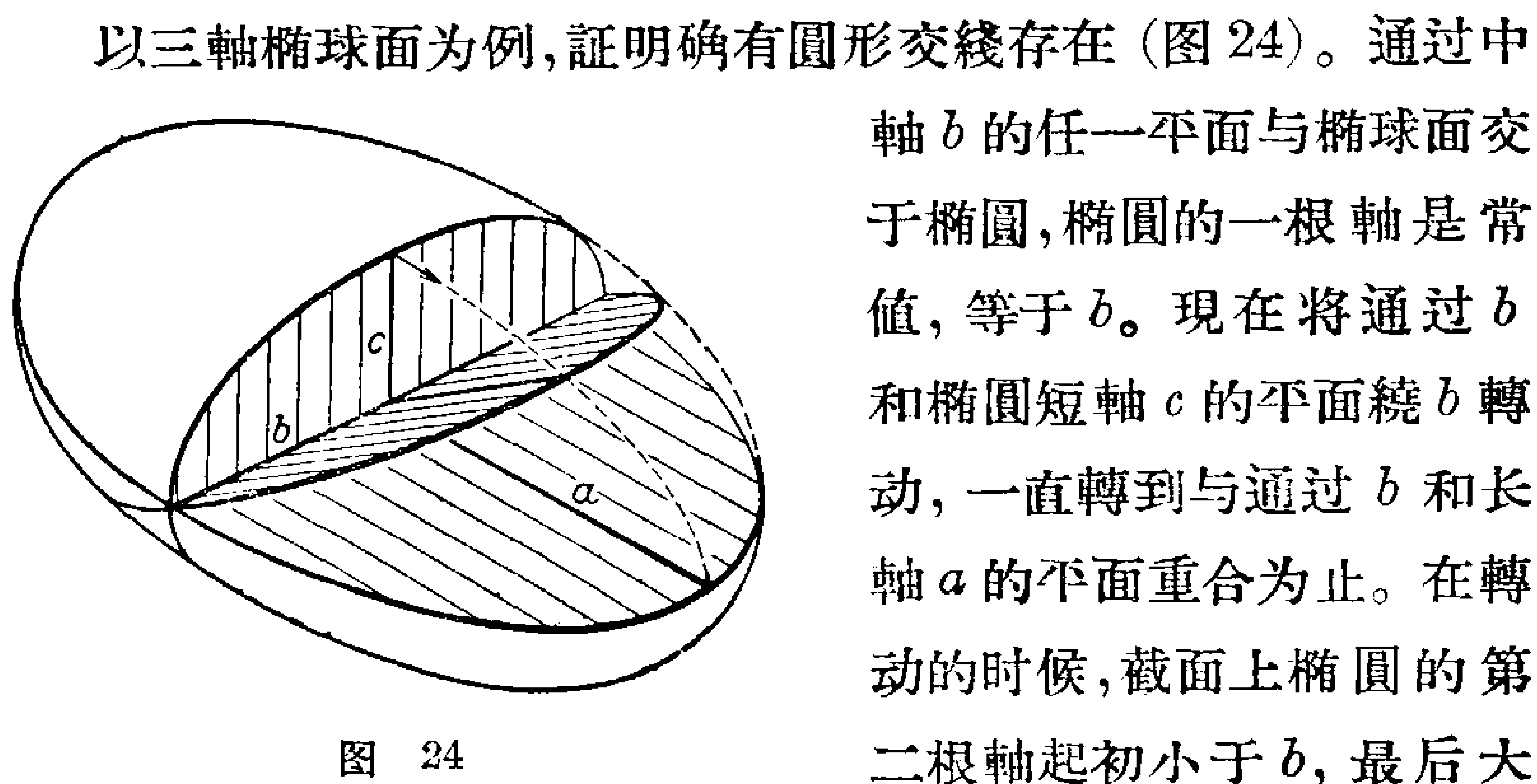


图 24

对于与任一平面相交成一閉合曲綫的其他二阶曲面，均可仿照橢球面的情形，作同样的探討。

单叶双曲面上关于直綫的定理，对于上述的交綫是两个圓族

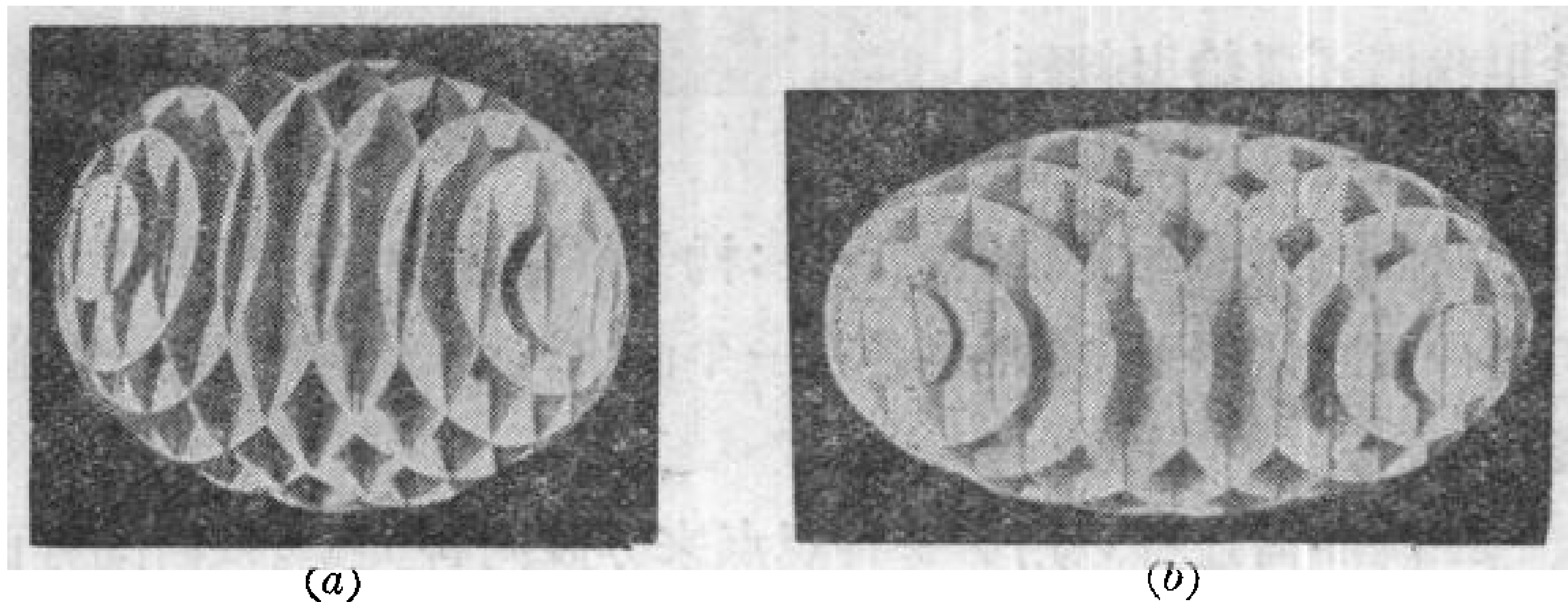

(a) (b)

图 25

的情形也成立。我們把所有的圓在它們相交的地方綁扎好，使它們只能轉动而不許滑动，如此得出一个非剛性的、能动的构架（图25, a 和25, b 表示用厚紙做的几个盘子，留出适当的縫口，互相穿插着。讀者可看出，这个模型跟我們上面講的沒有根本的区别）。能动圓盘模型經过变动以后，所得的两族曲面与能动細杆模型有所不同：在圓盘模型的对称平面上的圓錐曲綫并不是共焦族的。举例来說，三軸椭球面的能动圓盘截面模型总可以改变为球形，因此曲面在任一对称平面上的交綫是圓，但共焦族的椭圓却永远不能改变为圓。能动圓盘模型經过变形，可以叠合在一起，成为一平面，这和能动細杆模型一样。

虽然两种模型有很大的区别，但是它們通过一种过渡情形互相联系着。这指的是能动細杆双曲抛物面模型，它也可以看作是圓盘模型的一种极限情形（即当圓的半徑变作无穷大时），换句話說，此时的圓变作了直綫。如果让一族单叶双曲面趋近于双曲抛物面的形状，那末单叶双曲面上的圓和直綫都变成了双曲抛物面上的直綫。

§4　椭球面与共焦二阶曲面的绳綫作图

因为空間的二阶曲面相当于平面的圓錐曲綫。于是发生这样的問題：能不能把椭圓的縄綫作图法应用到二阶曲面上去呢？关于椭球面的縄綫作图問題，已为斯陶德（Staude）在1882年解决。这种作图法是：先裝配好有一个椭圓和一个双曲綫的固定架子，双曲綫的平面垂直于椭圓的平面，并通过其长軸。以椭圓的焦点 F_1 和 F_2 为双曲綫的頂点，以椭圓的頂点 S_1 和 S_2 为双曲綫的焦点。后面的两个条件唯一地确定了双曲綫，如果椭圓已經給出的話。

現在把縄綫的一端縛在椭圓的一个頂点处，这个頂点比如說是 S_1。然后把它从离 S_1 較近的双曲綫的一支的后面繞过来，再

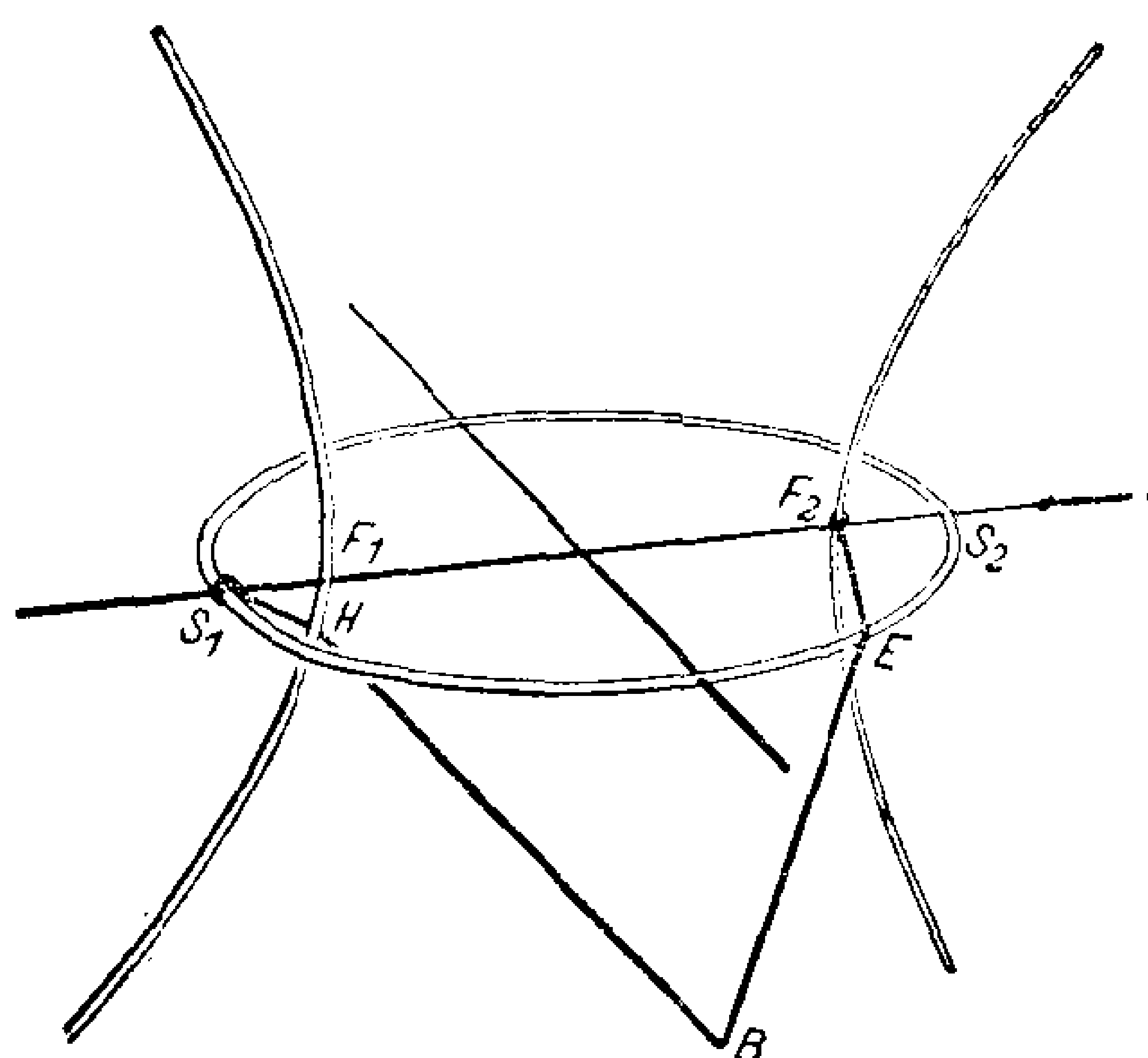


图 26

从椭圓的前面繞过去，将另一端縛定于F_2。将椭圓和双曲綫之間的这段繩綫在B点拉紧，整个的繩綫就成为折綫S_1HBEF_2的样子。其中的一段BHS_1是从B經过双曲綫上一点到S_1的最短路程，同样，BEF_2也有相同的性質。現在移动点B，在移动的过程中时时拉紧繩綫，則点B的軌迹是椭球面。如繩綫的縛法象图 26 所表示，点B将描出曲面的前下部，而为全曲面的四分之一。其余四分之三的作图，須将S_1和F_2之間的繩綫用别种方法繞过椭圓和双曲綫①。

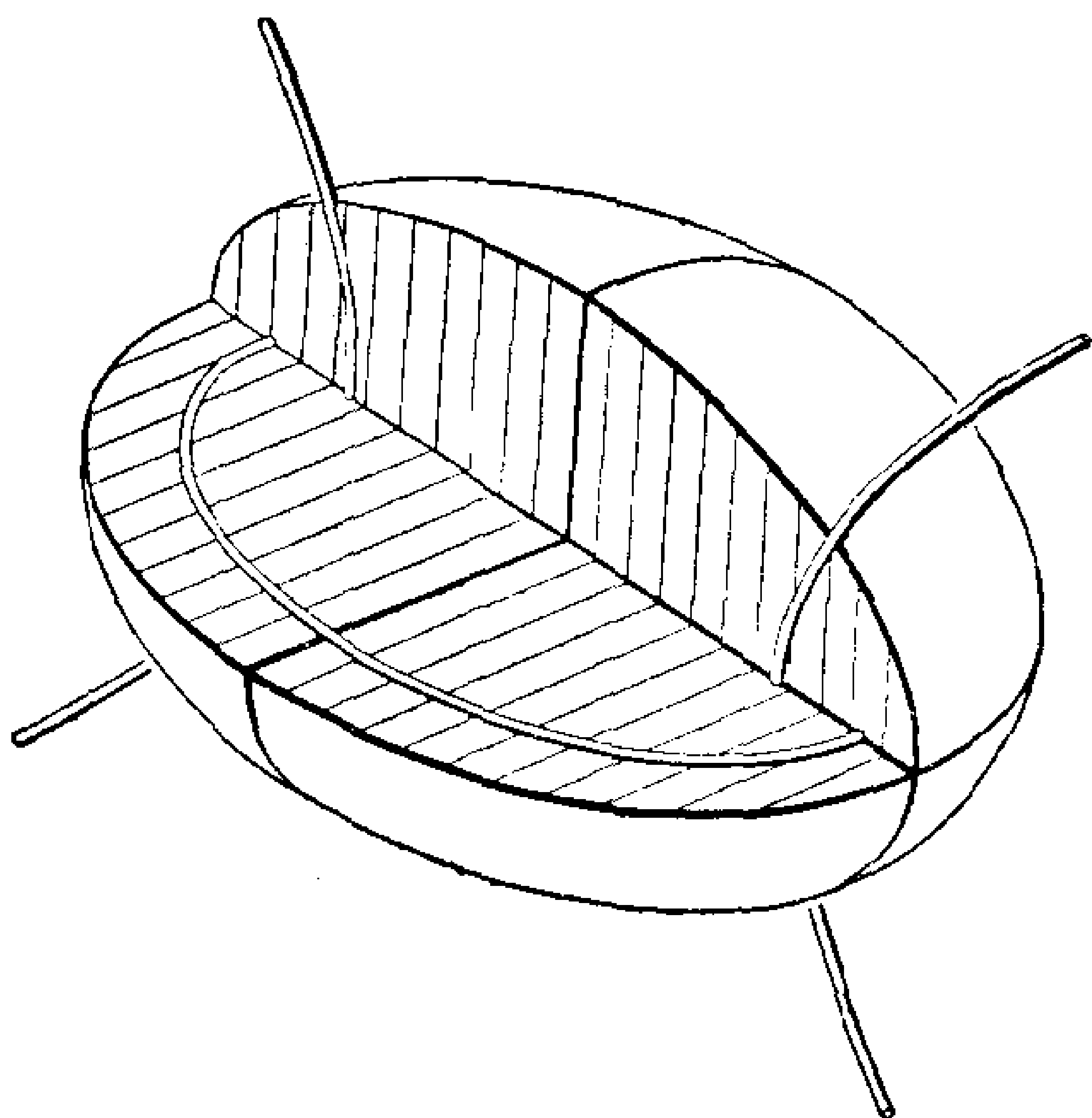


图 27

在椭球面的作图中，两个圓錐曲綫所做成的构架跟椭圓的焦点作用相同。正因为这个原故，上述构架就叫做椭球面的焦点曲綫（焦椭圓和焦双曲綫）。一般地我們說，两个圓錐曲綫是二阶曲面的焦点曲綫，如果这二曲綫的平面是曲面的对称平面，而且二平面

① 繩綫的二端可以不縛在S_1和F_2上而縛在椭圓和双曲綫的任何别的点上。唯一的要求是須使二定点間的繩綫能拉得紧，就象上文講的一样。

与曲面相交所成的圓錐曲綫与这二曲綫共焦点。因为交綫不是椭圓就是双曲綫，所以要考虑四种情形。两条交綫都是椭圓，得到一个椭球面（图 27）；两条交綫都是双曲綫，得到一个双叶双曲面（图 28）；曲面与焦双曲綫的平面交于双曲綫，与焦椭圓的平面交

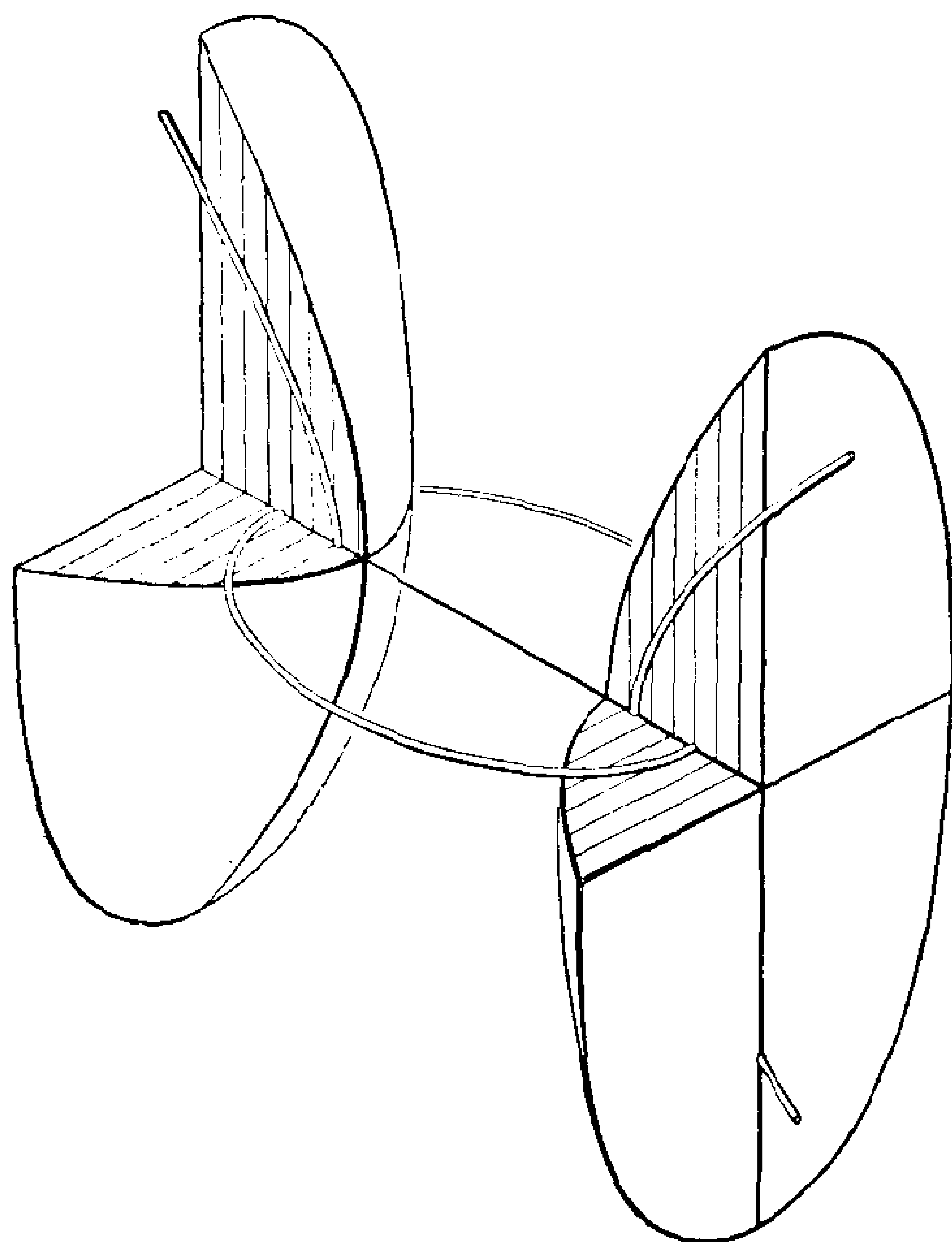


图 28

于椭圓，得到一个单叶双曲面（图 29）。第四种情形——曲面与焦双曲綫的平面交于椭圓，与焦椭圓的平面交于双曲綫——須除掉。因为这时椭圓和双曲綫必与直綫 F_1F_2（图 30）交于四个不同的点 E_1, E_2, H_1, H_2，这样焦双曲綫的平面将与曲面有一个公共的椭圓和两个不在此椭圓上的公共点 H_1, H_2，这与二阶曲面的定义矛盾。

如以长度不等的繩綫来作椭球面，但焦点曲綫是固定的，就得出"共焦"椭球面（即各椭球面的焦点曲綫相同）。共焦椭球面簡单

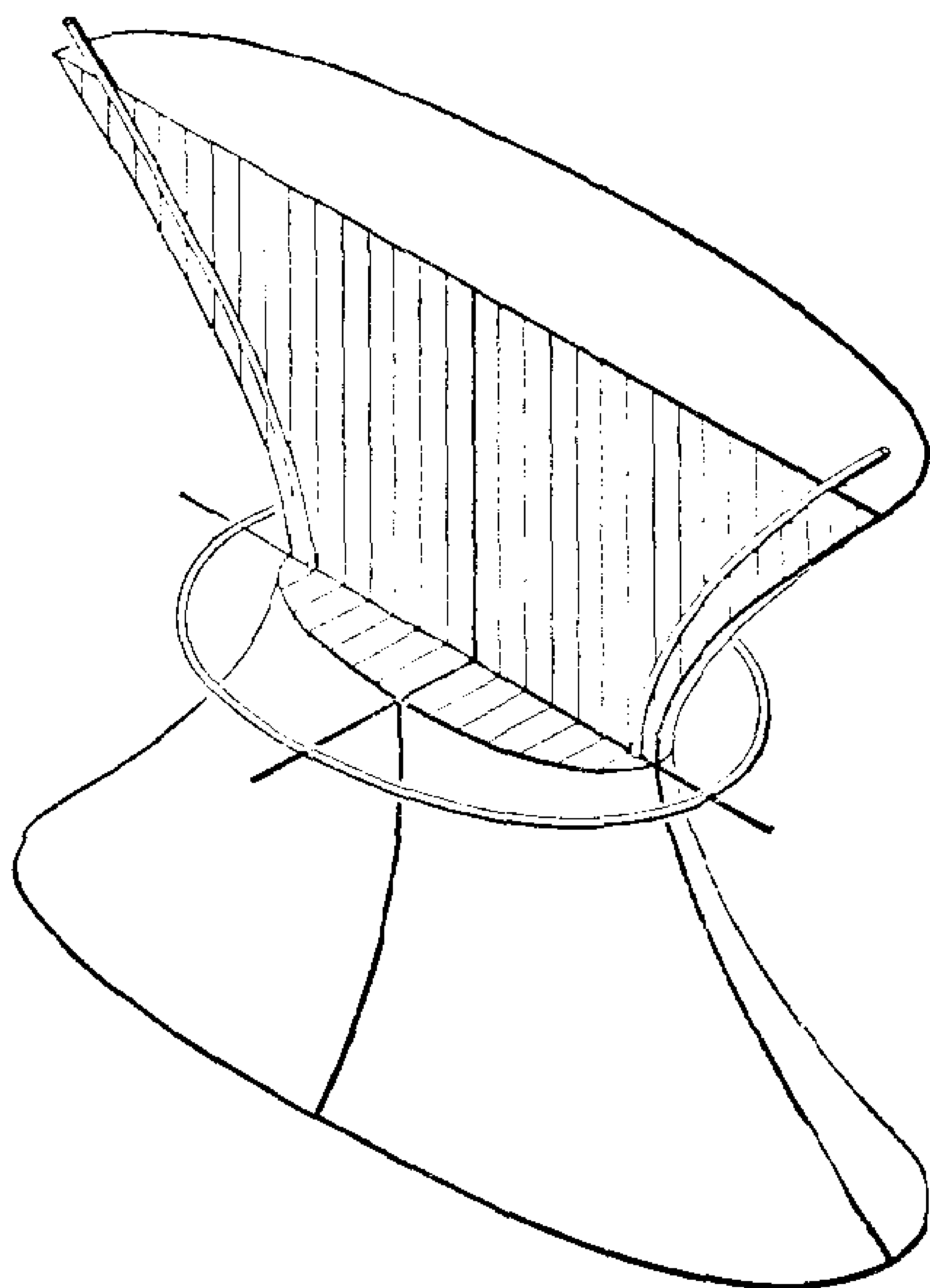


图 29

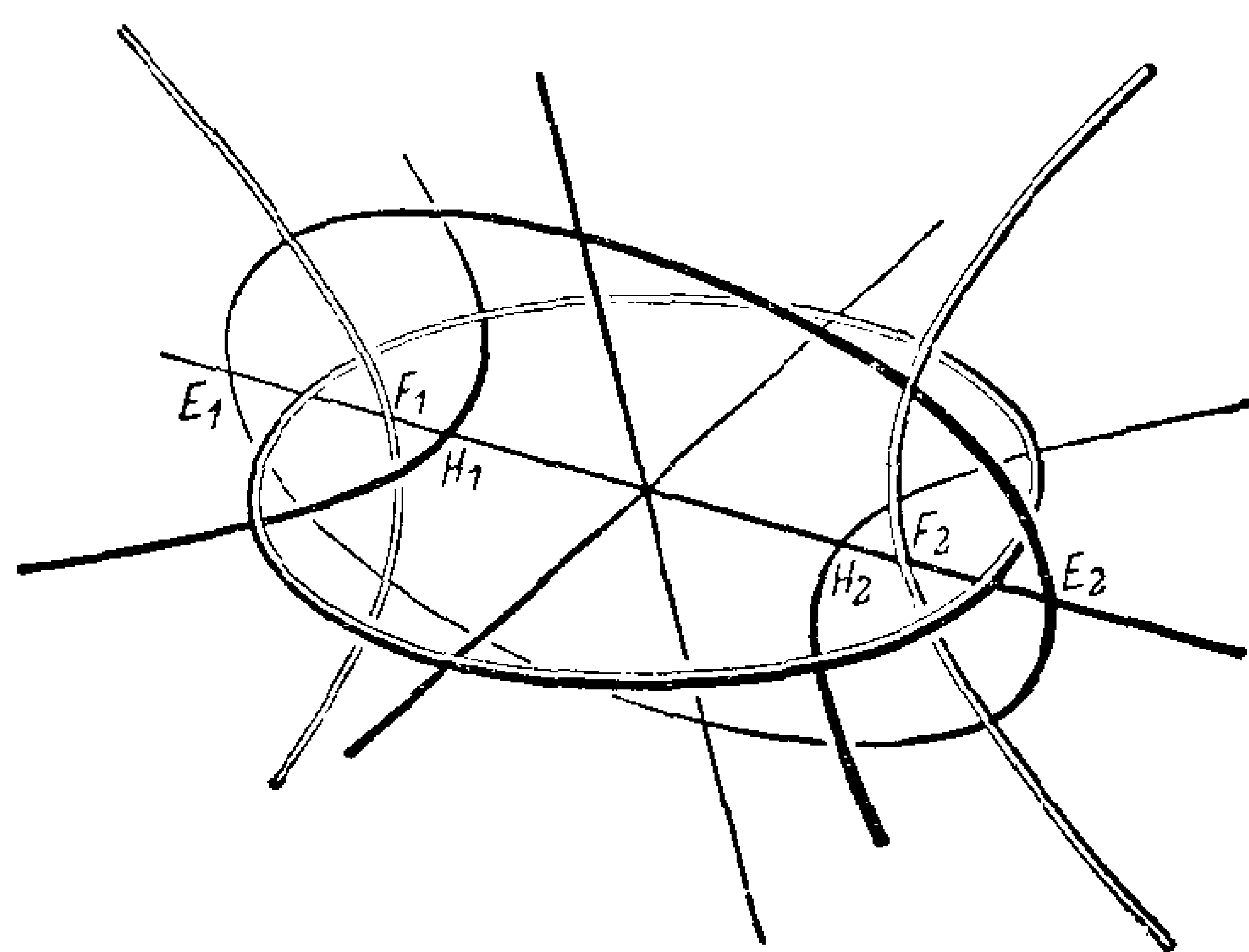


图 30

而无空隙地填滿空間。有相同的焦点曲綫的双叶双曲面族或单叶双曲面族也簡单而无空隙地填滿空間。这样說来，通过空間的每一点，可以有一椭球面、一单叶双曲面和一双叶双曲面(图 31)。正象平面上的共焦圓錐曲綫的情形，空間的共焦二阶曲面相互正交，

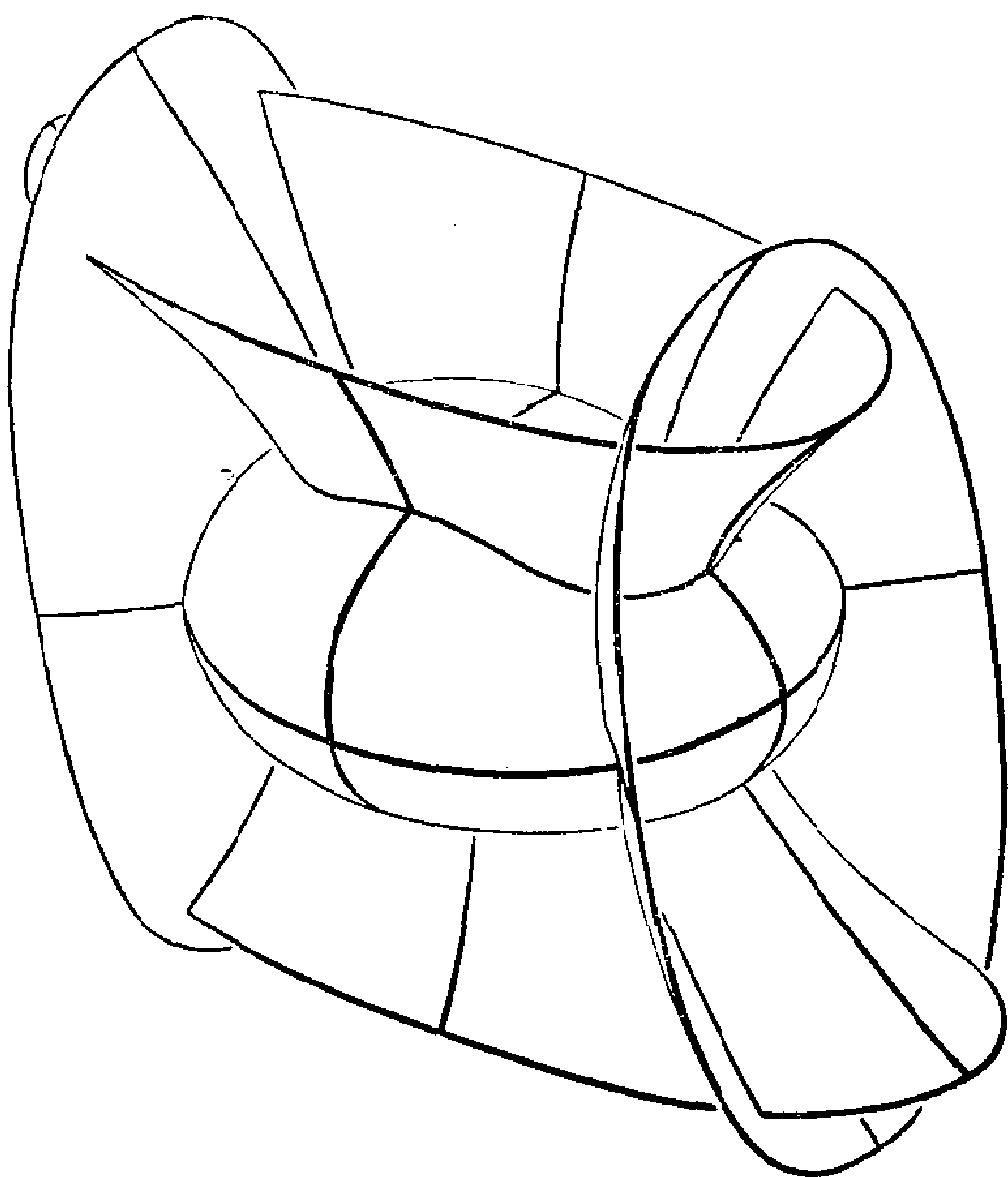


图　31

也就是說，过空間任一点所作的三个曲面的切平面相互垂直①。象这样的三个相互垂直的曲面族——其中最重要的是共焦二阶曲面族——在数学和物理学的許多研究中甚为有用。这类曲面的解析表示导致"椭圓坐标"，它可以应用到多种問題，特别是天文学上去。

讓我們順着一定的次序来观察共焦族的各种二阶曲面，以便了解这种曲面的全部情况。先从椭球面族中碩大而近于球面的那些曲面开始，然后讓長軸逐漸縮短。因为曲面在三根軸的方向上受的压縮不等，所以当过程継續进行时，曲面越来越扁平而不再象球形了。終于达到作为椭球面极限情形的双重复盖的焦椭圓的內部平面。从这里一下子跳到椭圓的外部平面去，这部分平面仍当作是双重复盖的，如此它就可以作为扁平的单叶双曲面的极限情

① 焦点曲綫上的点例外；此时三个平面之中有两个是不定的。参看下节。

形。从这种极限情形开始,来看单叶双曲面族。曲面逐漸陡峭,且从两方趋近于焦双曲綫所在的平面;与此同时,在双曲面頸部的平面上的椭圓——它們組成一个共焦族——越变越狹窄,終于变成小得不能再小,这就是說,变成了双重的綫段。这样,单叶双曲面收縮成为介于两支焦双曲綫之間的双重复盖的平面长条①。現在再跳到焦双曲綫的另一面去,但仍旧把它当作双重复盖的,这就有了扁平的双叶双曲面的极限情形。让这个双曲面的两腔逐漸膨脹,則它将由两方趋近于这样一个平面:它通过二焦点曲綫的中心,并且垂直于二曲綫所在的平面。在极限位置时我們就得到这个双重复盖的平面。至此,我們看完了共焦曲面族的所有曲面的情况,并且看到各族曲面如何簡单而无空隙地填满空間。

焦点曲綫之間的关系以及焦点曲綫同它們所产生的二阶曲面之間的关系还可用另一种性質来刻画。如果我們从焦双曲綫上任一点沿着它的切綫方向来观看焦椭圓,这时的焦椭圓就好象是圓,圓心在視綫上。因此焦双曲綫是通过焦椭圓的这种圓錐面頂点的軌迹:圓錐面的旋轉軸在圓錐面的頂点处切于焦双曲綫。此外,由跟已知焦点曲綫共焦点的椭球面的外面焦双曲綫上任一点所作的椭球面的切綫,作成一圓錐面,錐面的軸卽上面所說的軸。一般地,有这样的定理:由共焦族的任一曲面外焦点曲綫上一点看这曲面,如果視綫与焦点曲綫相切的話,曲面就象是圓,圓心在視綫上(但是曲面和切圓錐面的切点一般地不是形成圓,而可以是任何的圓錐曲綫,其中也包括双曲綫)②。

除了焦点曲綫之外,自然我們也想到要研究共焦族中两不

① 虽然这一族双曲面,包括平面上的极限位置,就是前面講过的能动杆状模型所描写的。

② 下面所講的是共焦族的另一种性質,它包括方才所講的性質作为极限情形:如果从空間的任意一点 P 作共焦族中任一曲面(不包圍 P)的切錐面,則这个錐面的对称平面永远是通过 P 点的族中三曲面在 P 点的切平面。

同类的曲面的交綫。这类曲綫有一种很簡单的微分几何性質，以后会看到的（§ 28）。这类曲綫是我們第一次知道的不在一平面上曲綫的例子。容易看出，由两个任意二阶曲面交出的曲綫，它和任何平面的交点最多只有四个，除非曲綫与平面有一个弧完全相同。事实上，平面和这两个曲面交于两个圓錐曲綫；其次，可以用解析方法証明（直观上是显然的），两个不相重合的或沒有一条共同直綫的圓錐曲綫，最多只有四个交点（§ 24）。

和交点的这一性質有关系的是：由于解析的理由，这种曲綫叫做四阶曲綫。（n 阶曲綫也有相仿的性質：曲綫与任一平面最多交于 n 点，或有一弧相同。）除此之外，也还有不是由两个二阶曲面相交而成的四阶曲綫[①]。至于高維的空間曲綫如不借用解析方法很难掌握，此处只好避而不談。

第一章　附录

1. 圓錐曲綫的垂足点作图

設已給一曲綫 K 和一点 F_1（图 32）。从 F_1 作 K 的所有切綫 t 的垂綫。这些垂綫的垂足描出一新的曲綫 k，它叫做曲綫 K 对于点 F_1 的垂足曲綫。反过来，設已給 F_1 和 k，也可以求出 K。方法是这样的：連接 F_1 和 k 上的任一点，从这一点作連綫的垂綫 t。諸直綫 t 的包絡卽是曲綫 K。第二类的作图我們叫做垂足点作图，并且說 K 是由 k 上的垂足点作图（对于 F_1 而言）产生的。由于 F_1 的选

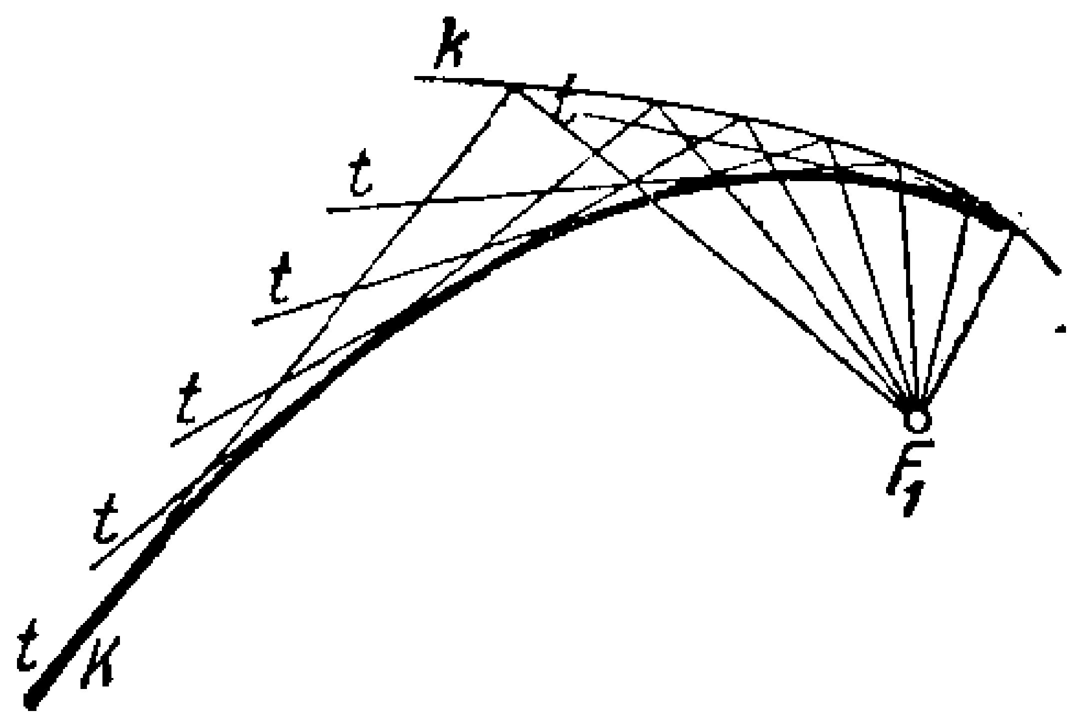


图 32

① 对于任何两个二阶曲面的交綫，用解析法可以証明：通过这交綫有无穷多的其他二阶曲面，其中也包括四个錐面，錐面之中某几个可以重合或退化为柱面。

擇不同，同一曲綫 k 上的垂足点作图，可得出多种不同的曲綫 K 来。

以下我們証明：圓上和直綫上的垂足点作图永远产生圓錐曲綫。如果 F_1 在以 M 为圓心的圓內，得到一椭圓；F_1 是一个焦点，另一个焦点 F_2 是 F_1 对于 M 的反射点。如果 F_1 在圓外，得到一双曲綫；一个焦点仍然是 F_1，另一个焦点仍然是 F_1 对于 M 的反射点。假定不是圓而是直綫 g，則得到一抛物綫；焦点是 F_1，准綫 h 与 g 平行，并且 F_1 和 h 在 g 的不同側，跟 g 的距离相等。

首先我們証明对于椭圓的情形(图 33)。过 F_1 作任意一直綫，設与圓交于 C 和 C'。在此直綫上取二点 F, F'，使 $F_1C=CF$，$F_1C'=C'F'$。然后过 C 和 C' 作直綫 CC' 的垂綫 t 和 t'。設 F_2 是断言中的点，則 M 应是綫段 F_1F_2 的中点。設 F_2F 与 t 交于 B，F_2F' 与 t' 交于 B'。那么就有 $F_1B=FB$，因之 $F_1B+BF_2=FF_2$。但是因为 M 和 C 分别是綫段 F_1F_2 和 F_1F 的中点，所以 $FF_2=2CM$。設 r 代表圓的半徑，就有关系式 $BF_1+BF_2=2r$。可見点 B 在以 F_1 和 F_2 为焦点、以 $2r$ 为長軸的椭圓上。剩下的只要証明 t 在点 B 切于椭圓就行了。从第 2 頁上証明过的椭圓切綫与二焦点半徑作成等角的性質，知道这是对的；因为根据我們的作图，有 $\angle CBF_1=\angle CBF$。利用点 B', C', F'，同样可証明直綫 t' 也是椭圓的切綫。

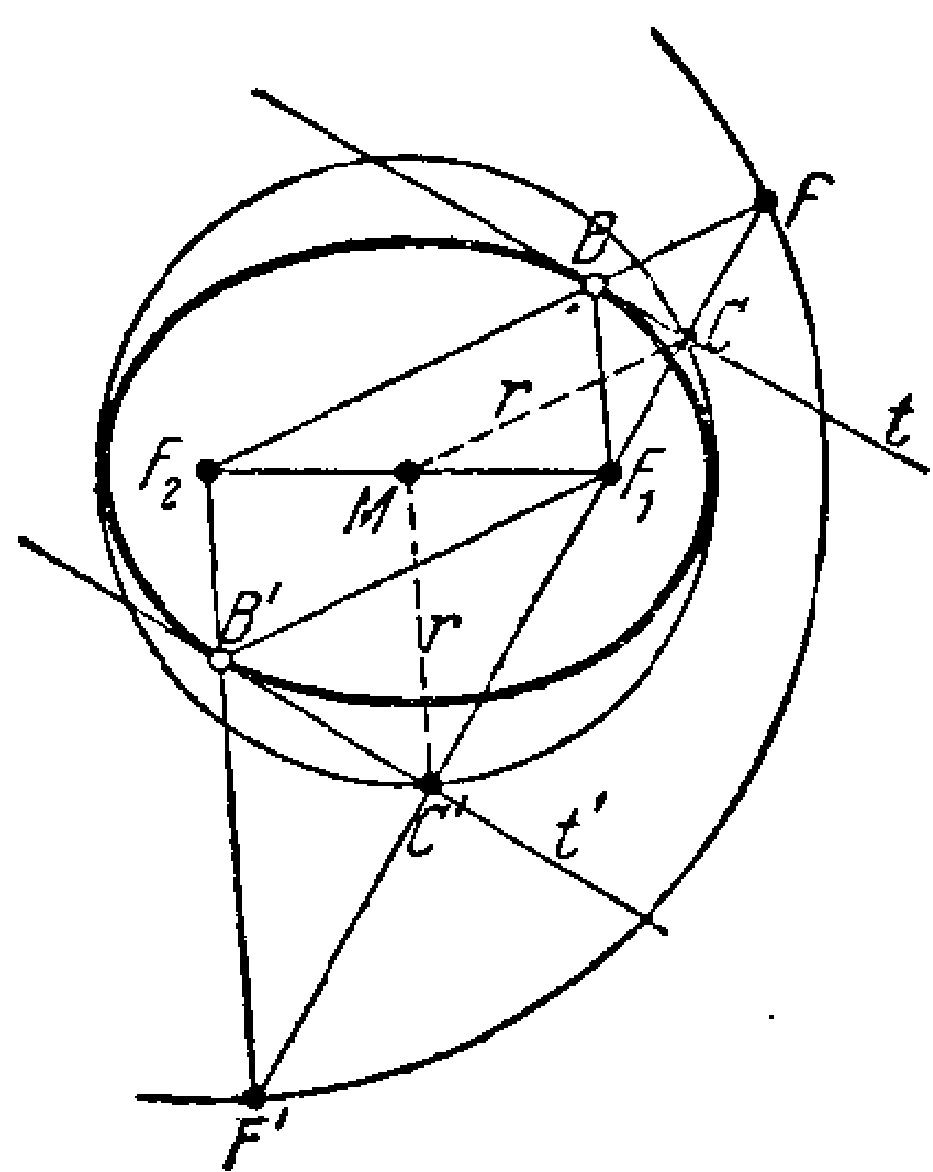


图 33

对于双曲綫情形的証明，可参看图 34。这幅图不同于图 33 的地方，在于 F_1 取在圓外。在这种情形下，点 B 和 B' 各描繪双曲綫的一个分支；因为 $F_1F_2=2r=BF_2-BF_1$ 和 $F'F_2=2r=$ $=B'F_1-B'F_2$。

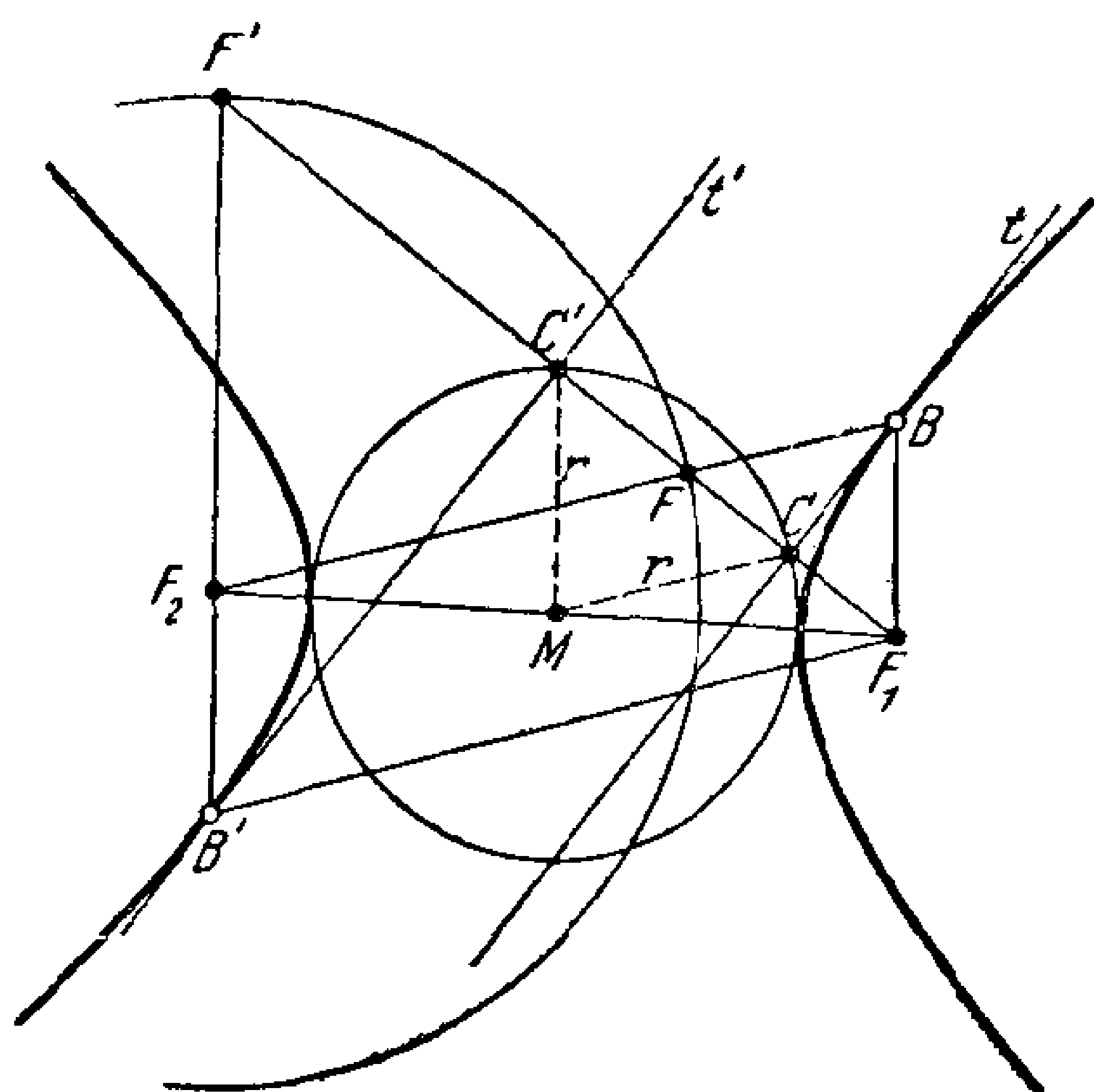


图 34

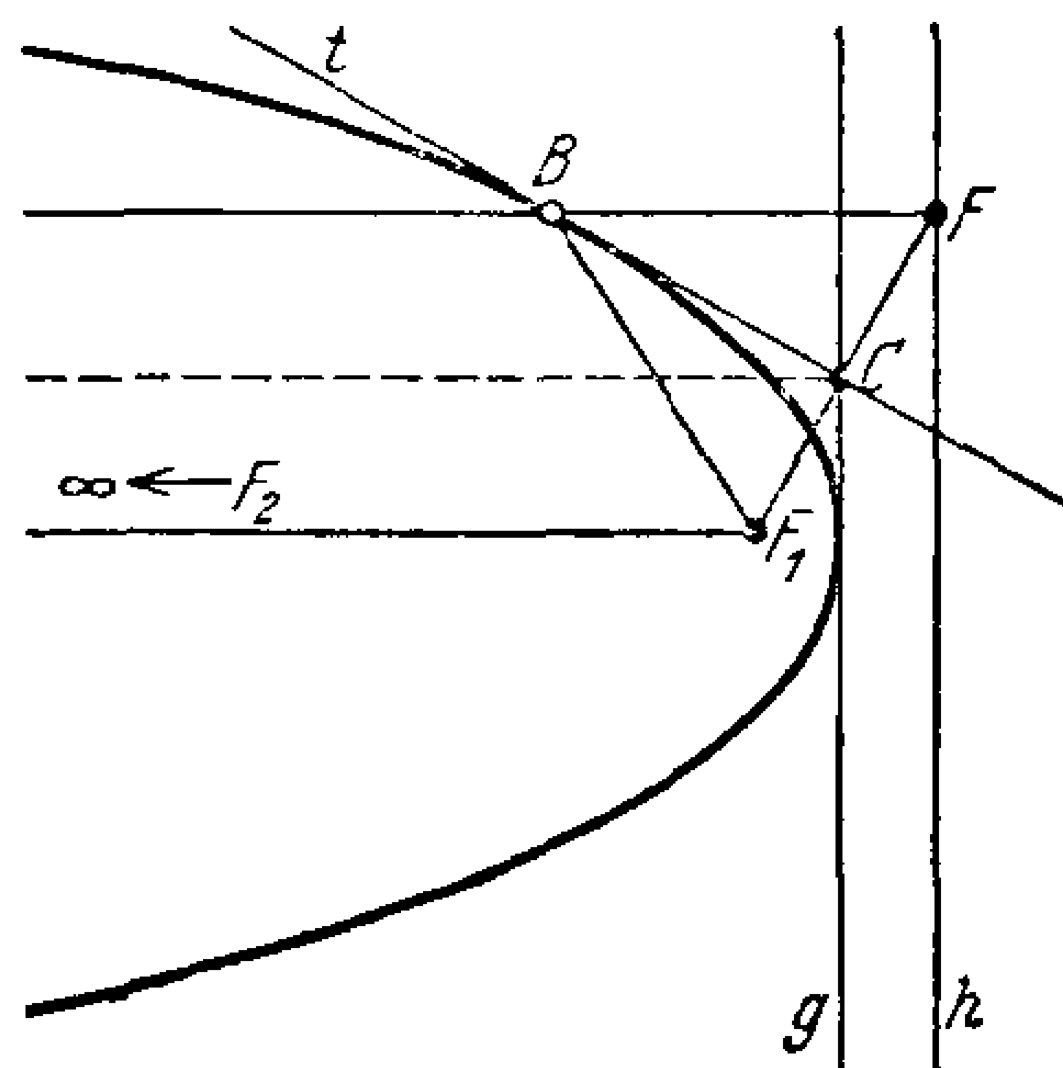


图 35

对于抛物綫的情形,証明須稍加修改。若点 C 和 F 以及直綫 t 的作图仍与上述相同(图 35),則須从 F 作 g 的垂綫。設此垂綫交 t 于 B,則 $BF_1=BF$。但是 F 描繪直綫 h,这由作图可以知道①。所以 B 实际描繪一抛物綫;以 F_1 为焦点,以 h 为准綫。至于 t 是在点 B 的切綫,乃由于 t 是 $\angle FBF_1$ 的平分綫的原故②。

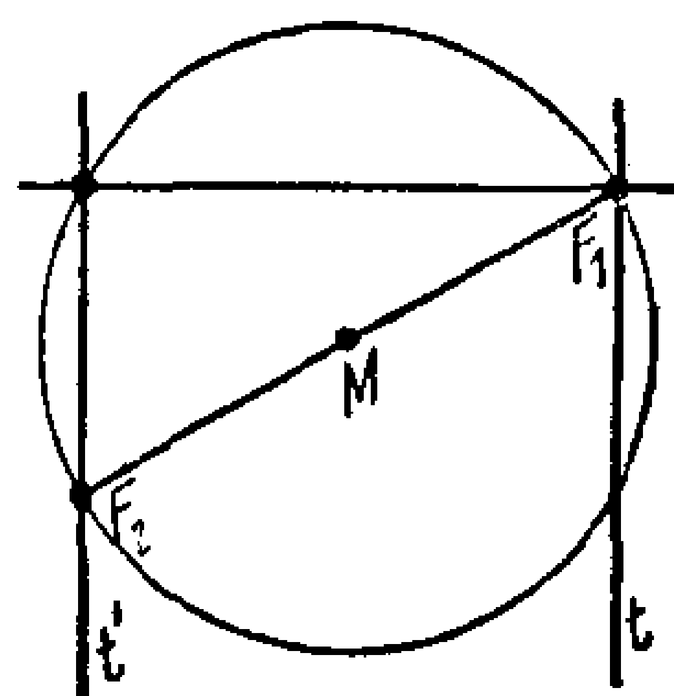


图 36

假如点 F_1 在圓周上(图 36),則 t 和 t' 圍繞点 F_1 和 F_2 旋轉,所以在这种情形下得到一对直綫束。如果把二阶曲綫看作由切綫产生的,这就是二阶曲綫的一个自然得出的退化情形。

2. 圓錐曲綫的准綫

以前我們曾經給抛物綫下过这样的定义:所有到一定点 F(焦

① 在椭圓和抛物綫的垂足点作图中,F 描繪一圓,圓心在 F_2,半徑等于原圓的二倍,因为 $FF_2=2CM$。其次,从 $FF_1=2CF_1$ 可知 F_1 是二圓的相似中心。

② 当然我們也可以使用极限过程从图 33 推到图 35,正如第 3 頁上的从椭圓推到抛物綫一样。

点)的距离等于到一定直綫 g(准綫)的距离的点的軌迹。与此相仿,也可以給椭圓和双曲綫下定义。我們欲求所有到一定点 F 的距离与到一定直綫的距离之比是一常数 v 的点的軌迹。当 $v=1$ 时,得到的是抛物綫。現在証明当 $v<1$ 时,所求的曲綫是椭圓;$v>1$ 时,是双曲綫。在每种情况下,F 是各个圓錐曲綫的焦点。反之,对任一椭圓或者任一双曲綫,可找到二直綫 g_1,g_2,使得曲綫上任一点到 F_1 和 g_1(或者到 F_2 和 g_2)的距离之比是一常数。

証明时参看图 37。設有一圓錐同一平面 e 交于一椭圓 k,我們就証明对这个椭圓的情形的断言。同图 10 一样,用一輔助球,

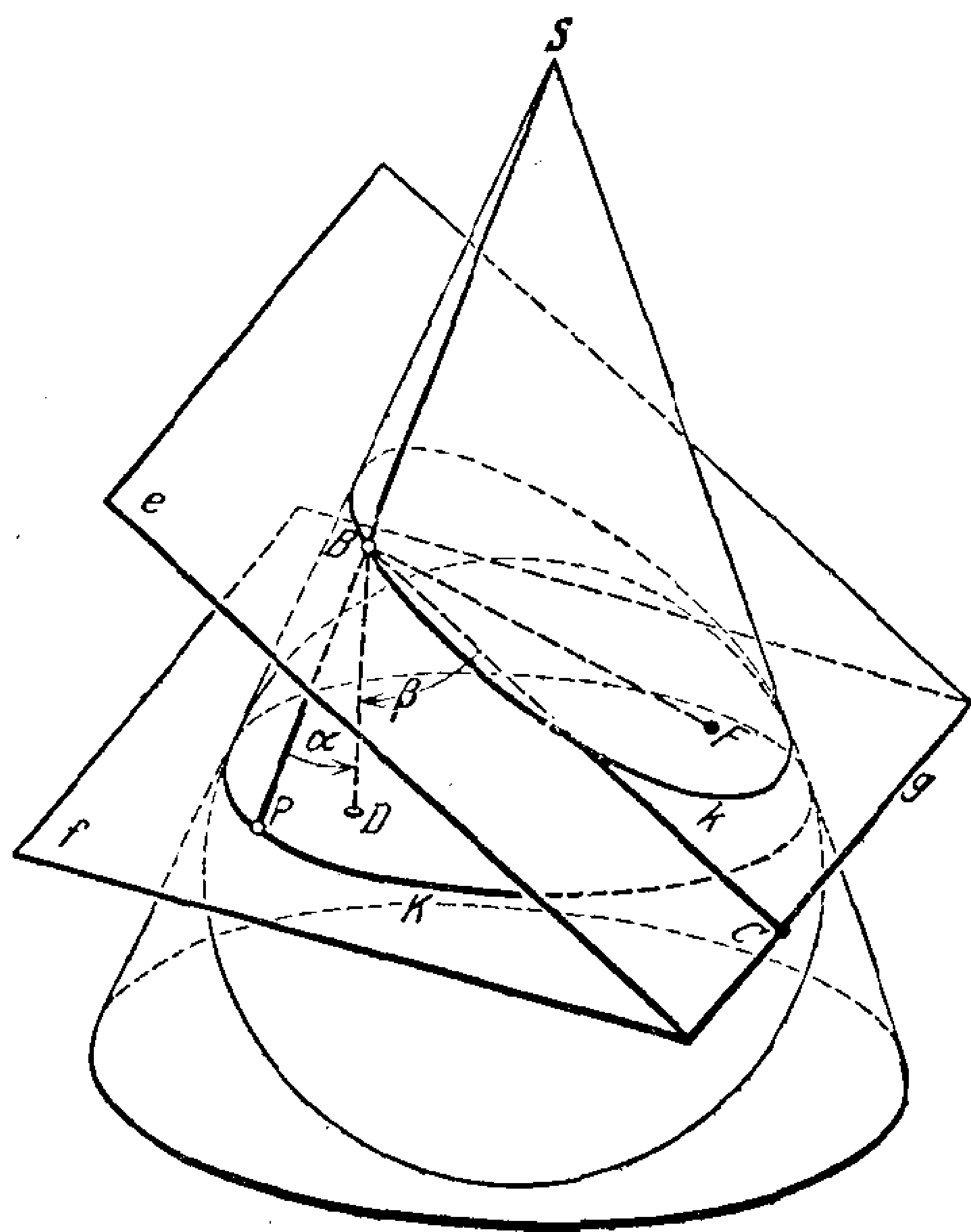


图 37

使与錐面切于圓 K,与平面切于点 F。那末我們知道 F 是 k 的一个焦点。其次,設 f 是包含 K 的平面,g 是 e 和 f 的交綫。从椭圓上任一点 B 作 g 的垂綫 BC 和 f 的垂綫 BD。連接 B 和 F,

B 和錐面的頂点 S；設 BS 交 K 于 P。为簡便起見，命 $\angle DBP = \alpha$，$\angle DBC = \beta$。就有 $BC = \frac{BD}{\cos\beta}$，$BP = \frac{BD}{\cos\alpha}$，又 $BF = BP$，因为这两个綫段是从一点 B 到同一球的切綫綫段。

由此可知

$$\frac{BF}{BC} = \frac{BP}{BC} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}。$$

但角 α 和 β 与点 B 的选擇无关，因为 α 等于錐面張角的一半，β 等于平面 e 对于錐面軸的傾斜角。命 $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = v$，这就証实了对椭圓的情形，我們的断言正确。与此同时，我們还順便得出了准綫 g 的一种空間作图法。

如果 e 不与錐面交于椭圓而交于双曲綫 h（图38），証明同前。不过在第一种情形下 $\alpha<\beta$，在第二种情形下 $\alpha>\beta$。所以就椭圓 k 来說，$v<1$，就双曲綫 h 来說，$v>1$。

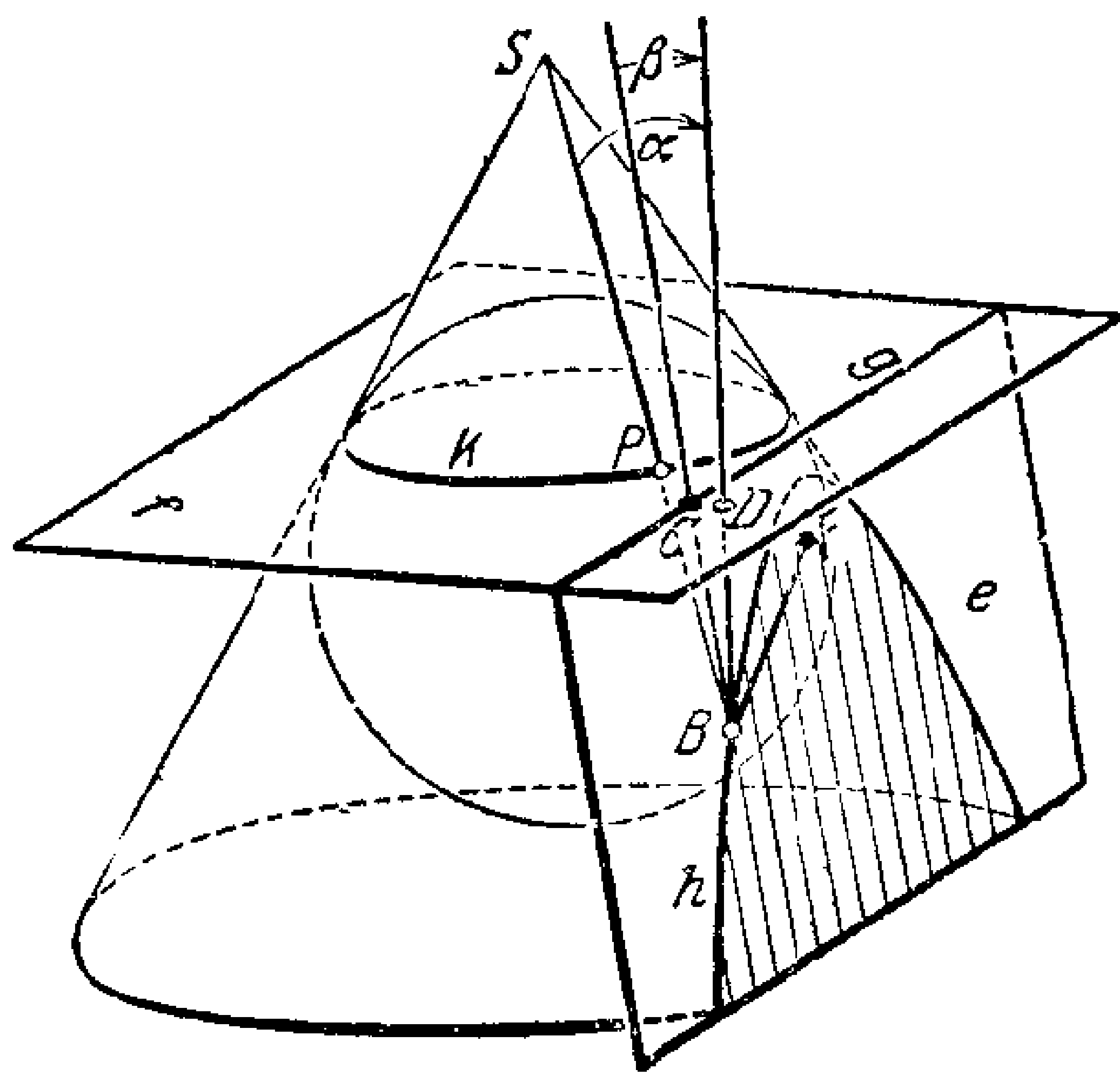


图 38

到現在为止，我們只是証明了对給定的椭圓和双曲綫准綫存在。我們还需要反过来問：已知数 v，点 F 和直綫 g，其曲綫为何？很明显，所求的曲綫的形状仅依賴数 v 的值而定。另一方面，我們可以这样調整作图，让角 α 和 β，因而数 v，取任意的值。由此可知，我們的作图产生所求曲綫的一切可能的形式，因而所求曲綫其实就是一圓錐曲綫。

当 $\alpha=\beta$ 时，也就是当 $v=1$ 时（記号仍同前），我們又回到原来的抛物綫的定义。但是假如 e 同錐面交于圓，作图便不可能，因为在这种情形下，而且只有在这种情形下，平面 e 和 f 不相交而平

行。每一个非退化的不同于圓的圓錐曲綫，都可以看作是圓錐截出的曲綫，因此都适用我們的作图法。因此准綫的性質是除圓外一切非退化圓錐曲綫所共有的。

附带地說一說，圓錐曲綫的希腊名字是根据曲綫对于准綫的关系而来的。这是說，对于椭圓 v 不足 1 (ἐλλείπειν)，对于双曲綫超过 1 (ὑπερβάλλειν)，对于抛物綫正好是 1 (παραβάλλειν)。

3. 双曲面的能动細杆模型

現在我們来証明第 17 頁上那句断言：单叶双曲面的細杆模型是能动的。(在証明中假定已經知道空間解析几何中若干知識。)同时还要証明，当构形变形时，它历經一个单叶双曲面族。

設 x_1, x_2, x_3 和 y_1, y_2, y_3 分别是点 P 和 Q 的笛卡儿空間坐标。考虑共焦点二阶曲面：

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3-\lambda}=\sum_1^3\frac{x_i^3}{a_i-\lambda}=1。\qquad (1)$$

让我們选择 λ 的值，使(1)代表一个单叶双曲面。P 假定是这曲面上的一点，正如(1)式所示。假定 Q 和 P 同在曲面的某一直綫上。这个要求跟以下二方程等价：

$$\sum_{i=1}^3\frac{y_i^2}{a_i-\lambda}=1,\qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^3\frac{x_iy_i}{a_i-\lambda}=1。\qquad (3)$$

因为綫段 PQ 的中点 M 一定也在曲面上。M 的坐标为 $\frac{1}{2}(x_i+y_i)$。所以我們应有

$$\sum\frac{1}{4}\frac{(x_i+y_i)^2}{a_i-\lambda}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sum\frac{x_iy_i}{a_i-\lambda}=1,$$

而这是同(3)式等价的。反之，假如直綫 PQ 同曲面有三点 P, Q,

M 相同，也就是满足 (1)，(2)，(3) 的話，这条直綫就完全在这曲面上。

計我們来計算距离 $PQ=r$。这里有

$$r^2=\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_i)^2=\sum x_i^2+\sum y_i^2-2\sum x_iy_i=$$

$$=\sum(a_i-\lambda)\frac{x_i^2}{a_i-\lambda}+\sum(a_i-\lambda)\frac{y_i^2}{a_i-\lambda}-$$

$$-2\sum(a_i-\lambda)\frac{x_iy_i}{a_i-\lambda}=$$

$$=\sum a_i\left[\frac{x_i^2}{a_i-\lambda}+\frac{y_i^2}{a_i-\lambda}-2\frac{x_iy_i}{a_i-\lambda}\right]-$$

$$-\lambda\left[\sum\frac{x_i^2}{a_i-\lambda}+\sum\frac{y_i^2}{a_i-\lambda}-2\sum\frac{x_iy_i}{a_i-\lambda}\right]。$$

由于須滿足方程(1)，(2)，(3)，最后一个方括弧里的式子消去了。因此得到

$$r^2=\sum a_i\frac{(x_i-y_i)^2}{a_i-\lambda}。\tag{4}$$

現在假定在(1)式內将 λ 換成另一值 λ'，从而得出另一单叶双曲面。这只有当而且仅当对于每个 i，$a_i-\lambda$ 的符号与 $a_i-\lambda'$ 的相同时才能作到。因此公式

$$x_i'=x_i\sqrt{\frac{a_i-\lambda'}{a_i-\lambda}}\quad(i=1,\ 2,\ 3)\tag{5}$$

决定一实的仿射变换。很明显，(5) 把曲面 (1) 变换到同 (1) 共焦点的另一个单叶双曲面。命这个双曲面为 (1′)。設 $P'(x_i')$ 和 $Q'(y_i')$ 是在变换 (5) 之下 P 和 Q 的象，則直綫 $P'Q'$ 完全在 (1′) 上，因为它是 PQ 的象。至此我們只要再証明距离 $P'Q'=r'$ 仍旧等于 PQ，也就是 $r'=r$，即可証明我們的断言。对于 r'，我們有与 (4) 相仿的公式：

$$r'^2=\sum a_i \frac{(x_i'-y_i')^2}{a_i-\lambda'}。 \qquad (4')$$

由(5)得

$$\frac{(x_i'-y_i')^2}{a_i-\lambda'}=\frac{(x_i-y_i)^2}{a_i-\lambda} \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

由于(4)和(4′)，可知 $r=r'$ 确实是对的。

如果我們固定 λ，让 λ' 变动，(5)表示細杆模型在对称軸固定的条件下变动时，模型的点所走过的路綫。經过簡单的計算，可以知道，这些曲綫乃是同(1)共焦点的椭球面和双叶双曲面的交綫。

第二章　正則点系

在这一章里我們預备用新的观点研究空間的度量性質。直到現在为止，我們只研究了一些曲綫和曲面，也就是只接触到一些連續图形，但現在我們要轉而建立由离散的几何元素做成的系統。这样的系統也时常在其他数学分支里遇到，尤其是在数論和函数論以及結晶学中①。

§5. 平面点格

由离散的部分組成的最簡单的图形是平面正方形点格②(图39)。要得到这样的点格，我們在平面上画出面积为一单位的正方形的四个頂点，把正方形沿其一边的一个方向移出一边之长，画出所得的两个新頂点。設想这样的步驟可以在一个方向上和它的相反方向上无止境地継續进行，这样我們在平面上就得到了由距离相等的两列点所組成的长条。把长条在跟它垂直的方向上移出一边之长，画出得到的新頂点。假定这个步驟又可以在两个方向

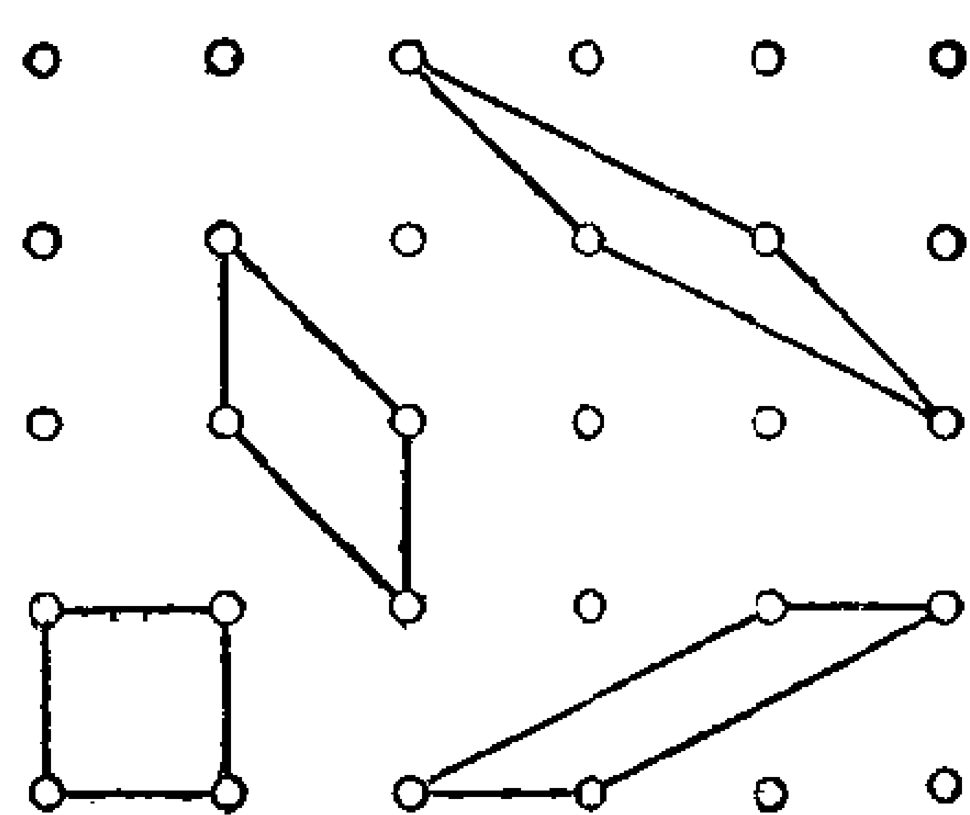


图　39

① 下面講結晶学的几节中不总是用普通結晶学上的术語。在簡单的几何的探討的范圍内，我們也常用簡明的名詞——著者注。

讀者如欲更詳細地了解几何結晶学，建議去参考 Б. Делоне, Н. Падуров, А. Александров 著“Математические основы структурного анализа кристаллов”, ГТТИ, 1934——俄譯本編者注。

② “点格”是指由点組成的“格子”，下頁中的“格子点”是指点格中的任意点——中譯者注。

上无止境地进行。这样就作出了全部的正方形点格。正方形点格还可以定义为在平面笛卡儿坐标系中整数坐标点的集合。

当然，由一个点格的四个頂点不仅可以組成正方形也可以組成其他图形，例如平行四边形。容易知道，由平行四边形出发得到的点格与由正方形出发得到的相同，只要这平行四边形不以格子点为頂点，而它的內部和边上不含任何其他格子点就行了（否則的話，用这种办法得出的点不能包括格子点的全体）。今試取任意的这样一个平行四边形来考察。可以看出，它的面积等于原来正方形的面积（图 39）。关于这句話的严格証明，将在第 36 頁上給出。

尽管如此簡单的点格，却可以引起重要的数学研究，其中最早的是高斯 (Gauss) 的研究。高斯企图在半徑等于 r 的圓面中找出格子点的数目 $f(r)$；这里圓心是一格子点，而 r 是一整数。高斯凭实驗找出对于許多 r 值的 $f(r)$ 值来，有如：

$$
\begin{aligned}
r&=10, & f(r)&=317,\\
r&=20, & f(r)&=1257,\\
r&=30, & f(r)&=2821,\\
r&=100, & f(r)&=31417,\\
r&=200, & f(r)&=125629,\\
r&=300, & f(r)&=282697。
\end{aligned}
$$

高斯研究函数 $f(r)$ 的目的，原想借这个結果来計算 π 的近似值。每个基本正方形的面积，按假設都等于一个单位，因此 $f(r)$ 就等于被左下頂点在圓面之內或边上的所有正方形复盖着的面积 F（图 40）。这样說来，$f(r)$ 与圓面面积 $r^2\pi$ 之差不超过与圓面相交的（包括計算进去的或未計算的）正方形面积的总和 $A(r)$：

$$|f(r)-\pi r^2|\leqslant A(r),$$

$$\left|\frac{f(r)}{r^2}-\pi\right|\leqslant\frac{A(r)}{r^2}。$$

要求 $A(r)$ 的估値是不难的。单位正方形的两点間最大距离是 $\sqrt{2}$，所以所有跟圓相交的正方形都落在一个圓环內，环的寬度为 $2\sqrt{2}$，而夹在半徑为 $r+\sqrt{2}$ 和 $r-\sqrt{2}$ 的二圓之間。圓环的面积是

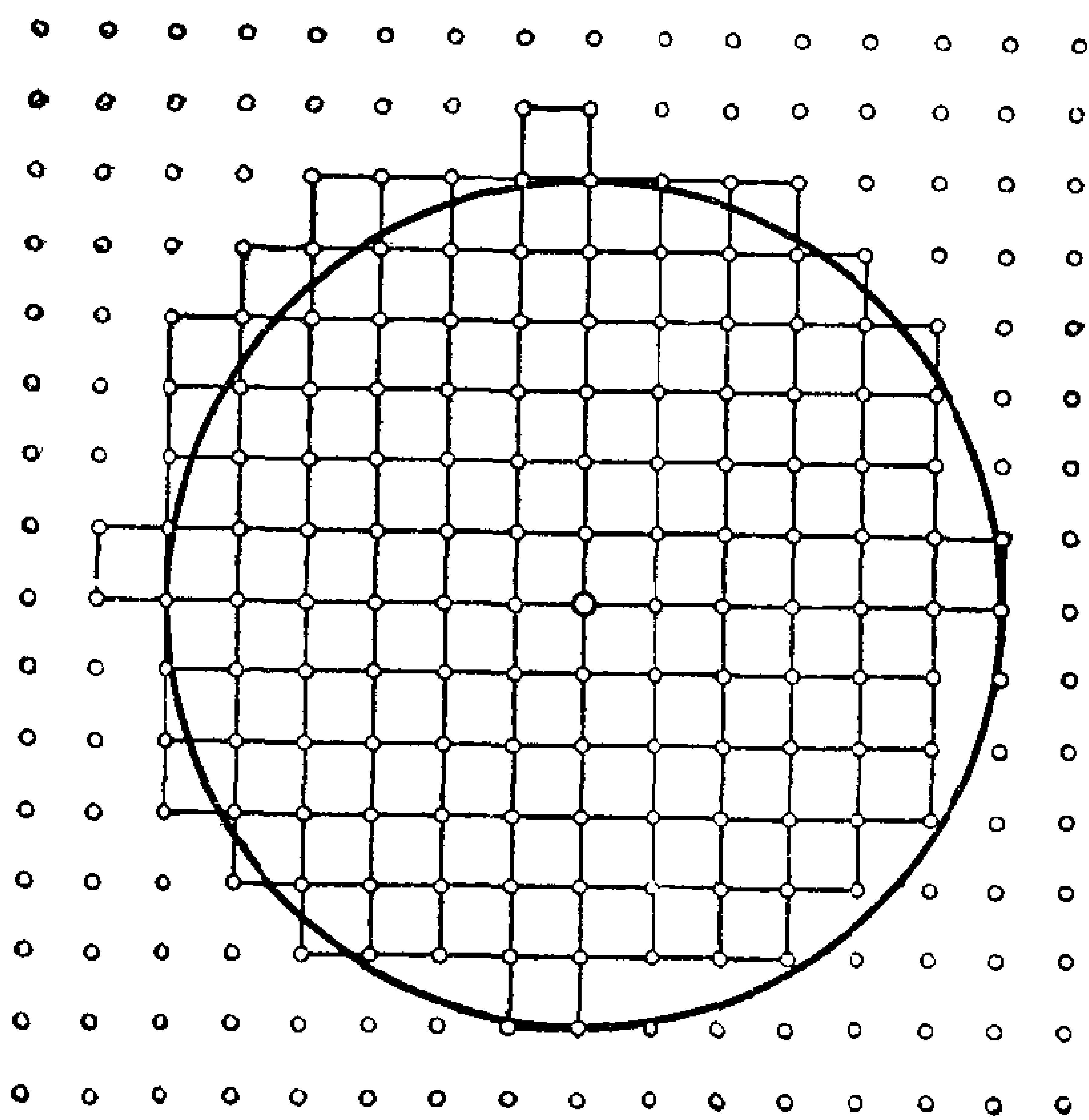


图 40

$$B(r)=[(r+\sqrt{2})^2-(r-\sqrt{2})^2]\pi=4\sqrt{2}\pi r。$$

但 $A(r)<B(r)$，所以

$$\left|\frac{f(r)}{r^2}-\pi\right|<\frac{4\sqrt{2}\pi}{r}。$$

由此再运用极限过程，就得到我們所要找的公式：

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r^2}=\pi。\qquad (1)$$

現在把高斯求得的 $f(r)$ 之值代入上式，得出下列 π 的近似值 $(\pi=3.14159\cdots)$：

$$r=10,\qquad \frac{f(r)}{r^2}=3.17,$$

$$r=20,\qquad \frac{f(r)}{r^2}=3.1425,$$

$$r=30,\qquad \frac{f(r)}{r^2}=3.134,$$

$$r=100, \qquad \frac{f(r)}{r^2}=3.1417,$$

$$r=200, \qquad \frac{f(r)}{r^2}=3.140725,$$

$$r=300, \qquad \frac{f(r)}{r^2}=3.14107。$$

公式(1)的另一个应用是証明在第34頁上提到的那一句話：凡能产生正方形点格的任一平行四边形，它的面积都等于1。为了証明，我們設想圓域內的每一格子点都是一基本平行四边形的一頂点，并約定所有这些頂点在平行四边形相同的位置上。让我們把平行四边形复盖着的面积 F 跟圓面的面积比較一下。这里也发生由半徑 $r+c$ 和 $r-c$ 所作成的圓环面积 $B(r)$ 产生的微小誤差，其中 c 是一基本平行四边形的两点間的最大距离而与 r 无关。假定基本平行四边形的面积为 a，则面积 F 等于 $a\cdot f(r)$。从此得出公式

$$|af(r)-r^2\pi|<B(r)=4rc\pi,$$

于是

$$\left|\frac{af(r)}{r^2}-\pi\right|<\frac{4c\pi}{r},$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r^2}=\frac{\pi}{a}。$$

我們已經証明过

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r^2}=\pi,$$

据此①，我們的断言 $a=1$ 得証。

現在我們轉来研究一般的"单位点格"，这是說，根据由单位正方形产生正方形点格的方法，由面积等于一单位的任意平行四边形产生的点格。这里也是一样，不同的平行四边形可以产生相同

① 在这个証明中，也可以不必是圓，而是任何的一块平面，只要这块平面边上被复盖的那一部分对整个的这块平面来說，是任意地狹窄就行了。

的点格，但是这些平行四边形的面积必定等于一单位。証法如同正方形点格的情形。

对任意这样一个单位点格来說，二格子点間最短的距离 c 是一个特征值。单位点格的 c 可以随意小，这只要考虑由 c 和 $\frac{1}{c}$ 为边的矩形产生的点格就明白了。但是另一方面，c 显然不能龐大无边，否则点格就不是单位点格了。因此 c 必有一上界。今試决定这个上界。

从任一单位点格中任意选取距离为最短（比如說，最短距离是 c）的两点（图 41）。通过这两点作一直綫 g。按照点格的定义，在这条直綫上应有无穷多的、間隔为 c 的其他点。在平行于 g 且与 g 的距离为 $\frac{1}{c}$ 的直綫 h 上也应有无穷多的格子点，但在二平行綫 g 和 h 之間的区域內不应包含任何格子点。以上两項事实都是从所討論的点格是单位点格推出来的。以 c 为半徑、以 g 上的所有的格子点为圓心作圓，全部的圓将复盖着一平面长条，这长条的边界是一些圓弧。长条內部的任一点至少同一个格子点的距离小于 c，所以按照 c 的定义，这点不是格子点。因此 $\frac{1}{c}$ 必大于或等于长条边界綫到 g 的最短距离。这个距离显然是以 c 为边的等边三角形的高。于是就有

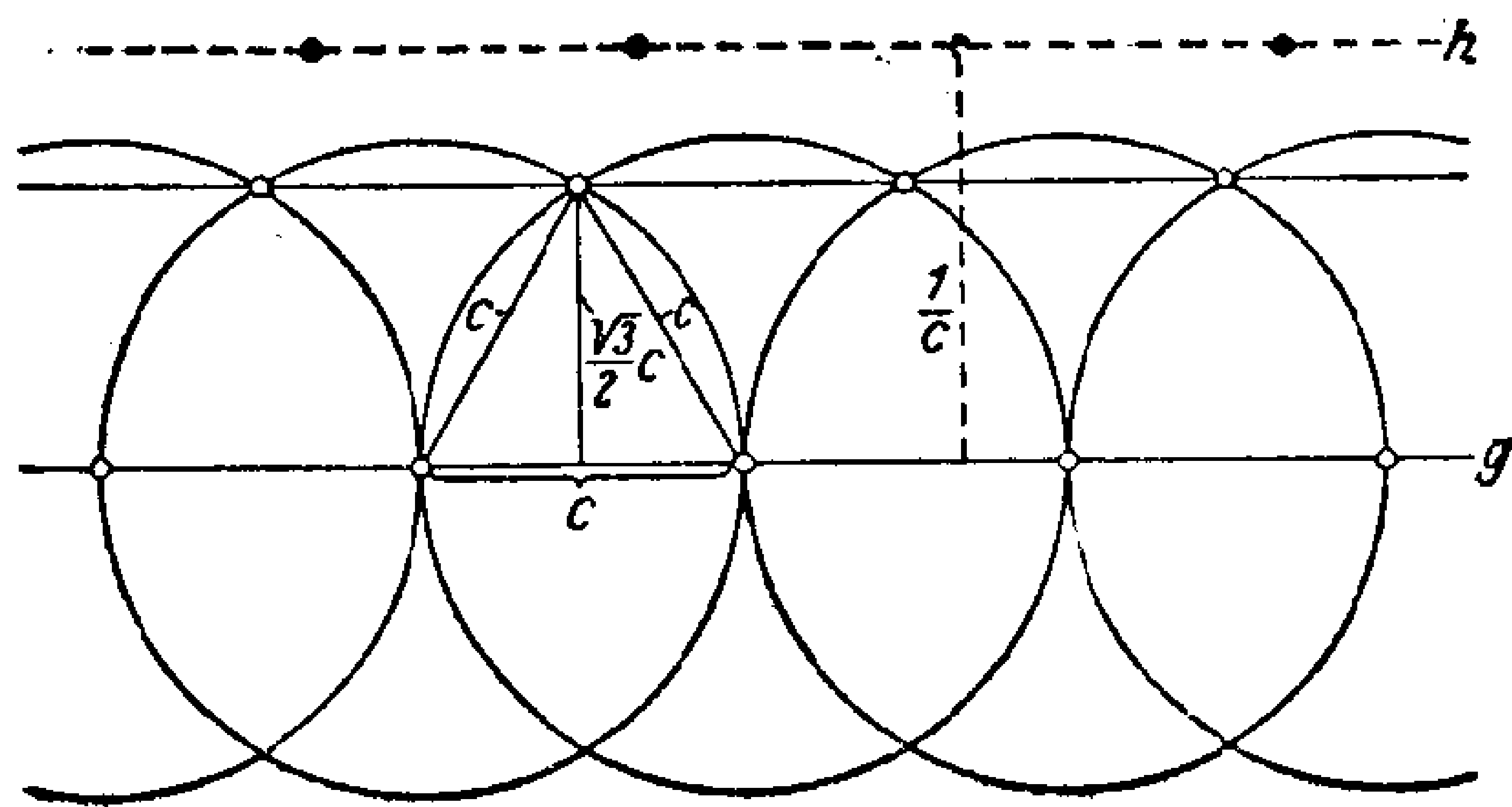


图 41

$$\frac{1}{c} \geqslant \frac{c}{2}\sqrt{3},$$

$$c \leqslant \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}。$$

$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$就是所求的 c 的上界。而且确实也有一个点格达到这个极値，因为，从图 41 上看出，这样的点格可以用由两个等边三角形拼成的平行四边形产生出来。

单位点格經过膨脹或收縮后可以得到随意大小的点格。設 a^2 是某个点格的基本平行四边形的面积，C 是两个格子点間的最短距离，那么应有

$$C \leqslant a\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}},$$

等号当且仅当点格是由等边三角形組成的时候才成立。所以，对一給定的最短距离，这样的点格含有最小的基本平行四边形。但是，我們在第 36 頁上看过，大的图形的面积近似地等于在那个区域里格子点数乘以基本平行四边形的面积，所以，在具有給定的最短距离的一切点格中，等边三角形点格（在給定的大区域里）含有最多的点。

若以每一格子点为圓心，以两个格子点間的最短距离之半为半徑作圓，則得到一組彼此相切但沒有复盖現象的圓。这样作出来的圓組称为（正則的）圓形格子式堆积。我們說一种圓形格子式堆积較另一种为紧密，如果前一种堆积能在相当大的已知区域内放进較多的圓。据此得知，等边三角形点格产生最紧密的圓形格子式堆积（图 42）。

作为圓形格子式堆积的密度的度量，我們取包含在已知区域内各圓的总面积除以这个区域的面积。对于充分大的区域来說这个値显然近似等于一个圓的面积除以基本平行四边形的面积。等

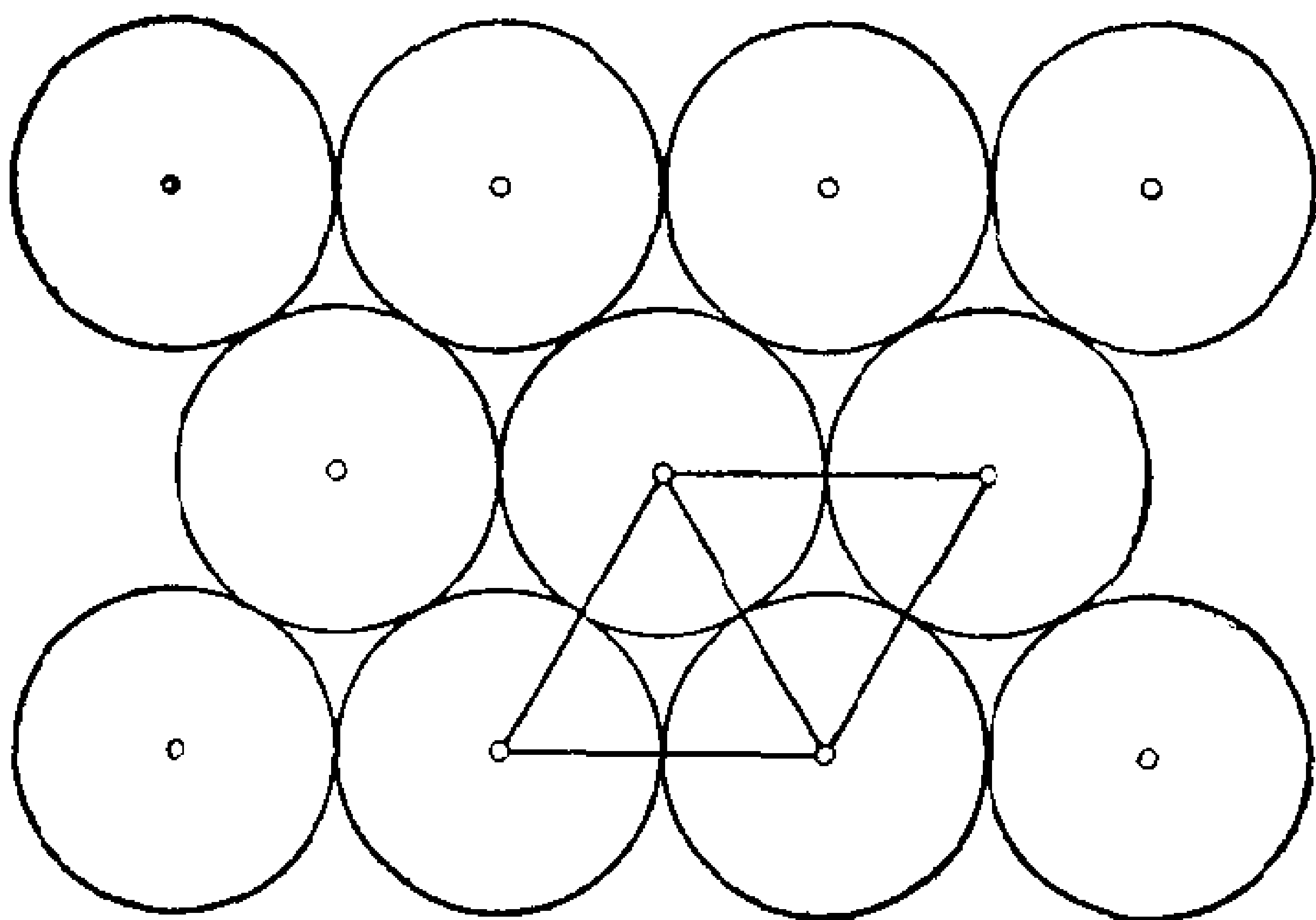


图 42

边三角形点格給出密度的最大值：

$$D=\frac{1}{2\sqrt{3}}\pi=0.289\pi。$$

§ 6. 在数論中的平面点格

点格在許多数論問題中有用处。以下我們举几个例子。为避免叙述煩冗起見，在这一节里要預先假定比本书其他地方較多一些的数学知識。

1. 萊布尼茲級数：$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$。如同 § 5 中講的，假定 $f(r)$ 代表在以 r 为半徑、以一格子点为圓心的圓内，平面正方形单位点格的点的个数。我們把圓心作为笛卡儿坐标的原点，幷把格子点配以整数坐标。这样 $f(r)$ 便是适合 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 的所有整数偶 x, y 的个数。因为 x^2+y^2 总表示整数 n。因此可以如此去求 $f(r)$：对每一整数 $n\leqslant r^2$，找出能以二整数平方之和表示它的方法的个数，把所有这些分解法的个数相加。在数論中有这样一个定理：一整数 n 表示为二整数平方之和的方法的个数，等于 n 的具有 $4k+1$ 和 $4k+3$ 形式的因子的个数之差的四倍。但在这种表法中，如 $n=a^2+b^2$, $n=b^2+a^2$, $n=(-a)^2+b^2$ 等等須認为是不同

的分解式，因为它們对应不同的格子点。这样說来，每种分解式可以导出八种的分解式来(但如 $a=\pm b$, $a=0$, $b=0$ 是例外)。作为本定理的例子，我們来看 $n=65$ 这个数。这个数共有四个因子：1, 5, 13, 65。所有这些因子都可以写成 $4k+1$ 的形式，但是 $4k+3$ 形式的却一个也沒有。因此所求的差是 4，因此根据我們的定理，65 这个数可以写成 16 种二数平方之和。(换句話說，以原点为中心、以 $\sqrt{65}$ 为半徑的圓周通过 16 个格子点。)实际上，$65=1^2+8^2$, $65=4^2+7^2$，每个式子又可以写成 8 种形式。

根据这个定理，对于每个正整数 $n\leqslant r^2$，从形为 $4k+1$ 的因子个数减去形为 $4k+3$ 的因子的个数，再将各差相加，則得出 $\frac{1}{4}(f(r)-1)$。不过，如果把加减的次序作适当的变更，尙可以簡化許多。这是說，从所有的 $n\leqslant r^2$ 中形为 $4k+1$ 的因子数之和减去所有的形为 $4k+3$ 的因子数之和。要决定第一个和，把形为 $4k+1$ 的各数按大小次序写成 1, 5, 9, 13…，所有大于 r^2 的数一概不計。每个这样的数累加几次不超过 r^2，在計算因子时，它就应該計算几次。因此，1 应有 $[r^2]$ 次，5 有 $\left[\frac{r^2}{5}\right]$ 次，这里的 $[a]$ 一般表示不超过 a 的最大整数。所以我們所求的 $4k+1$ 形式的因子总数是 $[r^2]+\left[\frac{r^2}{5}\right]+\left[\frac{r^2}{9}\right]+\cdots$。由符号 $[a]$ 的定义，这个級数只要方括弧中的分母一超过分子就中断了。对于 $4k+3$ 形式的因子也可以同样地处理，从而得出这种因子总数为

$$\left[\frac{r^2}{3}\right]+\left[\frac{r^2}{7}\right]+\left[\frac{r^2}{11}\right]+\cdots。$$

我們还要从第一个和中减去第二个和。因为这两个和的項数都是有限的，所以級数的次序可以随意变更。如用下法，則在过渡到极限 $r\to\infty$ 时較为方便。我們把得出的結果写成下面的形式：

$$\frac{1}{4}(f(r)-1)=[r^2]-\left[\frac{r^2}{3}\right]+\left[\frac{r^2}{5}\right]-\left[\frac{r^2}{7}\right]+\left[\frac{r^2}{9}\right]-\left[\frac{r^2}{11}\right]+\cdots。$$

为了要弄清楚这个級数甚么时候中断，我們姑且假定 r 是奇数。这样級数一共有 $\frac{r^2+1}{2}$ 項。这个和中的符号加减相間，同时絕对值不增加。因此如果在 $\left[\frac{r^2}{r}\right]=[r]=r$ 这項处就中断了，由此所产生的誤差最多等于最后的一項 r, 所以我們可以把这个誤差写作 ϑr，这里的 ϑ 是一眞分数。如果我們要把留下的 $\frac{1}{2}(r+1)$ 項的方括弧去掉，結果每項的誤差都小于 1，所以总的誤差又可以写作 $\vartheta' r$，而 ϑ' 是一眞分数。于是我們有

$$\frac{1}{4}(f(r)-1)=r^2-\frac{r^2}{3}+\frac{r^2}{5}-\frac{r^2}{7}+\cdots\pm r\pm\vartheta r\pm\vartheta' r,$$

各項除以 r^2 后，得

$$\frac{1}{4}\left(\frac{f(r)}{r^2}-\frac{1}{r^2}\right)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\pm\frac{1}{r}\pm\frac{\vartheta+\vartheta'}{r}。$$

让 r 无限增加（取所有的奇数值），則 $\frac{f(r)}{r^2}$ 趋近于 π，这是我們在 § 5 中証明过的。这样我們就导出了萊布尼茲級数：

$$\frac{1}{4}\pi=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots。$$

2. 二次形式的最小值。命

$$f(m,\ n)=am^2+2bmn+cn^2$$

是以实数 $a,\ b,\ c$ 为系数且行列式 $D=ac-b^2=1$ 的二次形式。在这种情形下 a 不能等于零。今不妨假定 $a>0$。如所周知，满足这些条件的 $f(m,\ n)$ 是正定的，也就是說，对于所有的实数偶 $m,\ n$，除去 $m=n=0$ 之外，$f(m,\ n)$ 是正的。以下我們要証明：不管如何选擇系数 $a,\ b,\ c$，只要它們适合条件 $ac-b^2=1$ 且 $a>0$，总有两个不全为零的整数 $m,\ n$，使 $f(m,\ n)\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}$ 成立。

这句断語可以从我們以前討論过的在单位点格中两点間的最小距离得知。利用条件 $D=1$，再用通常的配方法，$f(m, n)$ 可写成

$$f(m, n)=\left(\sqrt{a}\, m+\frac{b}{\sqrt{a}}\, n\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\, n\right)^2。$$

現在考虑平面笛卡儿坐标系中坐标为

$$x=\sqrt{a}\, m+\frac{b}{\sqrt{a}}\, n,$$

$$y=\sqrt{\frac{1}{a}}\, n$$

的点，这里的 m 和 n 取所有的整数值。根据解析几何的初等定理知道这些点应該作成单位点格。因为它們可以从正方形单位点格 $x=m$, $y=n$ 經过行列式等于 1 的平面仿射变換

$$x=\sqrt{a}\,\xi+\frac{b}{\sqrt{a}}\,\eta,$$

$$y=\sqrt{\frac{1}{a}}\,\eta$$

而得。但是現在 $f(m, n)=x^2+y^2$；所以当 m 和 n 取所有的整数值时，$\sqrt{f(m, n)}$ 表示从原点到相当的格子点的距离。按照前面講过的定理，点格有一点 P，可使这个距离不超过 $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$。由此对 P 的二整数坐标 m, n 来說，我們就有

$$f(m, n)\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}},$$

这就是要証明的。

这个結果可以用来解决通过有理数来逼近实数的問題。設 α 是任一实数；我們考虑形式

$$f(m, n)=\left(\frac{\alpha n-m}{\varepsilon}\right)^2+\varepsilon^2 n^2=\frac{1}{\varepsilon^2}m^2-2\frac{\alpha}{\varepsilon^2}\,mn+\left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2}+\varepsilon^2\right)n^2。$$

这个形式的行列式是

$$D=\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2}+\varepsilon^2\right)-\frac{\alpha^2}{\varepsilon^4}=1,$$

这里的 ε 是任意正数。根据我們方才証明的結果,常可以找到二数 m, n, 使适合不等式

$$\left(\frac{\alpha n-m}{\varepsilon}\right)^2+\varepsilon^2 n^2\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}},$$

从这里显然可得二不等式

$$\left|\frac{\alpha n-m}{\varepsilon}\right|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}},\quad |\varepsilon n|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}。$$

从这里又得①

$$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{|n|}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}},\quad |n|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}。$$

如果 α 不是有理数,第一个不等式的左边必不等于零。所以假如給定的 ε 的値越来越小,则必得无穷多的这样的数偶 m,n;因为此时 $\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|$ 必无限减少。用这种方法我們得到与无理数 α 随意逼近的有理数 $\frac{m}{n}$。另一方面,借用第二不等式可以消去 ε,从而得到

$$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{n^2},$$

这样一来,我們有了一个近似分数的序列,其近似的程度与分母的平方成正比例。这种近似値的分母不需要很大而近似程度就相当地高。

3. 明科夫斯基定理　明科夫斯基建立了一个关于点格的定理,这个定理虽然很簡单,可是能够解决数論上許多用別的方法难以解决的問題。为了容易明白起見,这里我們不講定理的一般形式,而只討論一个特殊的情形,这种情形不但非常容易表述,而且

① 对于充分小的 ε,是許可用 n 除的,因为,如果 n 等于零,不等式 $|\alpha n-m|\leqslant\leqslant\varepsilon\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ 就不成立了。

从方法上說，已包含了主要的一切。这个定理說：

如果以边为 2 的正方形复盖着平面上任一已知单位点格，且使正方形的中心与一格子点重合，那末在这个正方形的內部或边上还有一个格子点。

要証明这一定理，設想在点格平面上划定了任意一个大的区域，譬如說是以大的 r 为半徑以一个格子点为圓心的圓的內部和圓周。对于在这个区域中的每一格子点都以这点为中心作一个以 s 为边的正方形（图 43）。现在要求不管选擇 r 多么大，也沒有两个正方形是复盖着的，在这个要求之下，来估計一下边 s 的长。依照我們从前講过的記号，在所說的区域內有 $f(r)$ 个格子点，因为正方形不得互相复盖，所以它們的总面积为 $s^2f(r)$。另一方面，这些正方形都落在較大的半徑为 $r+2s$ 的同心圓內，因此我們得到下面的不等式：

$$s^2f(r) \leqslant \pi(r+2s)^2$$

或
$$s^2 \leqslant \frac{\pi r^2}{f(r)}\left(1+\frac{2s}{r}\right)^2。$$

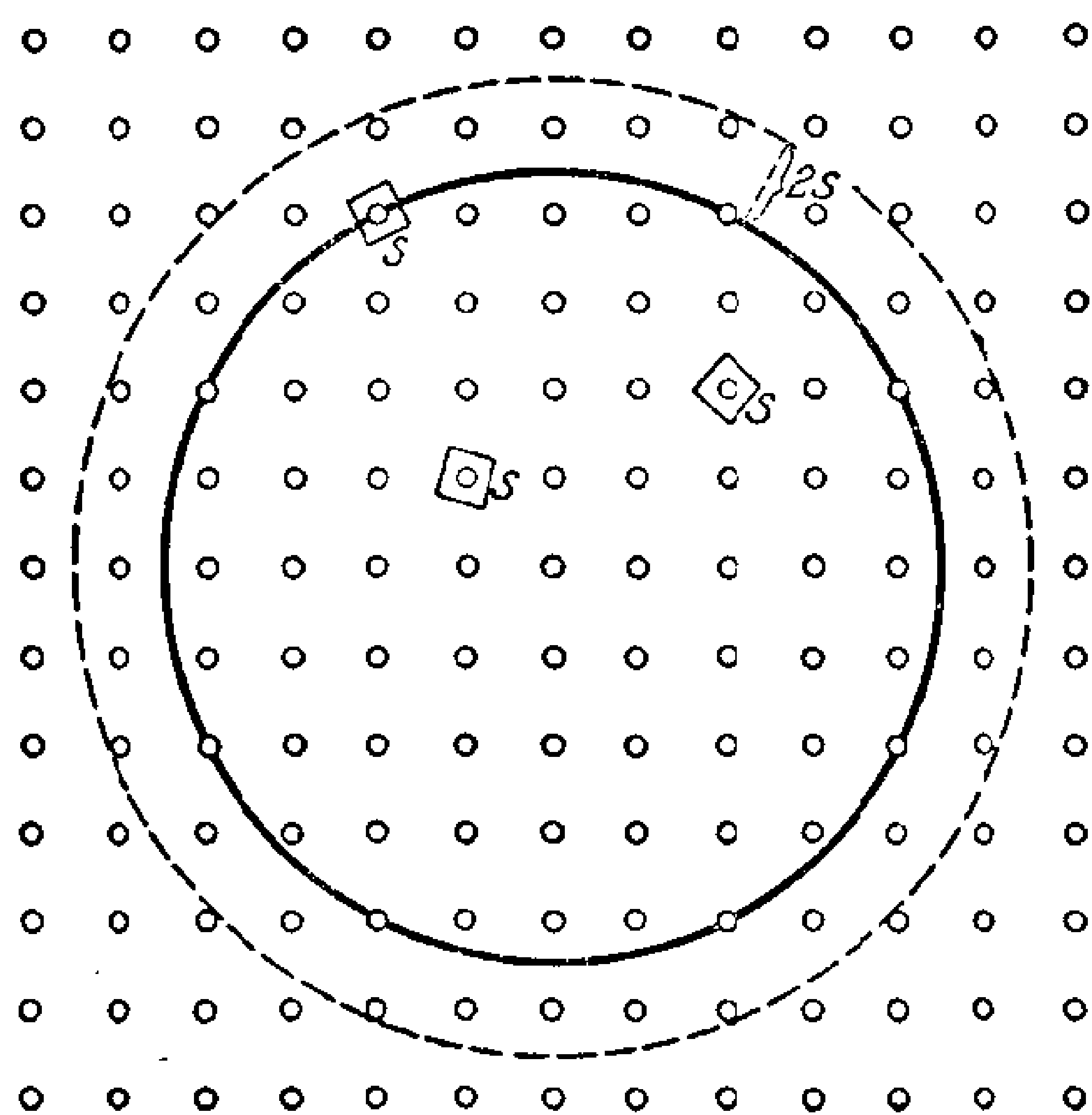


图 43

如果将 s 固定，让 r 无限增加，由前面的 $f(r)$ 的討論，知道不等式的右方趋近于 1。所以我們得出 s 的条件是

$$s \leqslant 1。$$

因为二正方形只可能有复盖或不复盖两种情形，由此可知，对于任意正数 ε，不管它多么小，如果从边长为 $1+\varepsilon$ 的正方形出发，必然得到复盖的正方形。直到現在，我們并沒有假定正方形的相互位置，因此我們可以把正方形繞其中心作任何角度的轉动。让我們假定所有的正方形都平行地放着。今取出以 A 和 B 为中心的两个互相复盖的正方形 a, b 来看（按照題設，A, B 即是格子点），則綫段 AB 的中点 M 必落在这两个正方形的内部（图 44）。

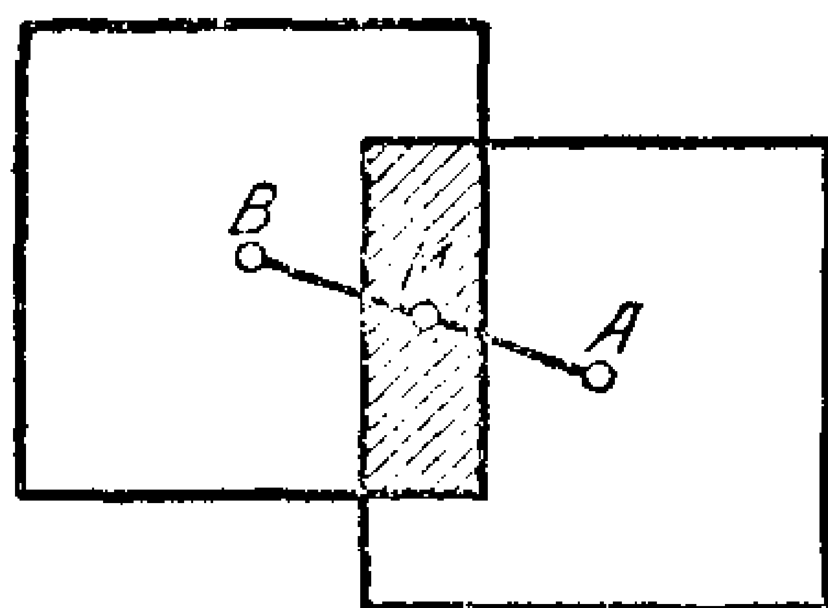


图 44

为了簡明起見，今后凡是遇到二格子点連綫的中点，例如 M 我們一概用点格的"平分点"一詞代表。現在我們可以推出这样的結論：以一格子点为中心且以 $1+\varepsilon$ 为边长的任一正方形 a，一定包含一平分点。因为如以所有别的格子点为中心作一些正方形与 a 全等且同方向，則必有某些地方复盖起来，又因为所有的正方形在这个图形上都有相同資格，所以 a 自己也必部分地被另一正方形 b 复盖着，因此 a 必包含一平分点，如同图 44 中的点 M。現在我們可以用反証法来完成定理的証明。假如以一格子点 A 为中心以 2 为边的正方形的內部或边上再沒有另外的格子点，那么我們可以把这个正方形在保持边的方向和中心的位置的条件下稍微地扩大一下，使得扩大后的正方形 a' 的一边为 $2(1+\varepsilon)$，也不包含其他的格子点。另外一方面，我們把这个正方形也在保持边的方向和中心的条件下收縮到原边的一半，就得到以 A 为中心以 $1+\varepsilon$ 为边的正方形 a，这个正方形，剛才証明过必包含一平分点 M。这就是个矛盾；因为延长 AM 一倍到 B，則 B 必是一格子点，而且从 a 和

a' 的相互位置来看，可知这个格子点必在 a' 之內（图 45）。

2(1+ε)
1+ε
A
M
a
B
a'

图 45

明科夫斯基定理的一个有效应用是处理上一节我們曾經講过的用有理数逼近实数的問題。我們的方法和上节十分相似，可是得到更好的結果。借用已知的无理数 α，我們作点格，格子点的笛卡儿坐标为：

$$x=\frac{\alpha n-m}{\varepsilon},\quad y=\varepsilon n,$$

其中的 m 和 n 取所有的整数值，ε 是任意的正数。象以前一样，可以知道这个点格是单位点格。图 46 表示点格中的一个基本平行四边形，假定 $0<\alpha<1$。我們作一正方形，以 2 为边，中心在原点，且使其边平行于坐标軸。应用明科夫斯基定理，这个正方形必包含另一格子点。这个格子点由不全等于零的某二整数 m 和 n 决定。另一方面，在正方形的内部和边上的点的坐标都滿足不等式 $|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$。因此 m，n 应滿足下面的两个不等式：

$$\left|\frac{\alpha n-m}{\varepsilon}\right|\leqslant 1,\quad |\varepsilon n|\leqslant 1,$$

或

$$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{|n|},\quad |n|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}。$$

这就得出逼近 α 到随意准确程度的另一分数 $\frac{m}{n}$ 的序列。消去 ε，得

$$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}。$$

α/ε
m=0
n=1
ε
m=-1
n=0

图 46

由此可見，明科夫斯基定理証明了有逼近 α 的分数序列存在，它比在上一节作出的分数序数更好，那里我們不过得到了近似式

$$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{n^2},$$

这个結果比較弱，因为 $\frac{2}{\sqrt{3}}>1$。

当然这一节所講的方法不仅可以应用于平面，也可以应用于任意維数的空間，因而可以得到許多更为一般的数論上的結果。

§7. 三維和三維以上的点格

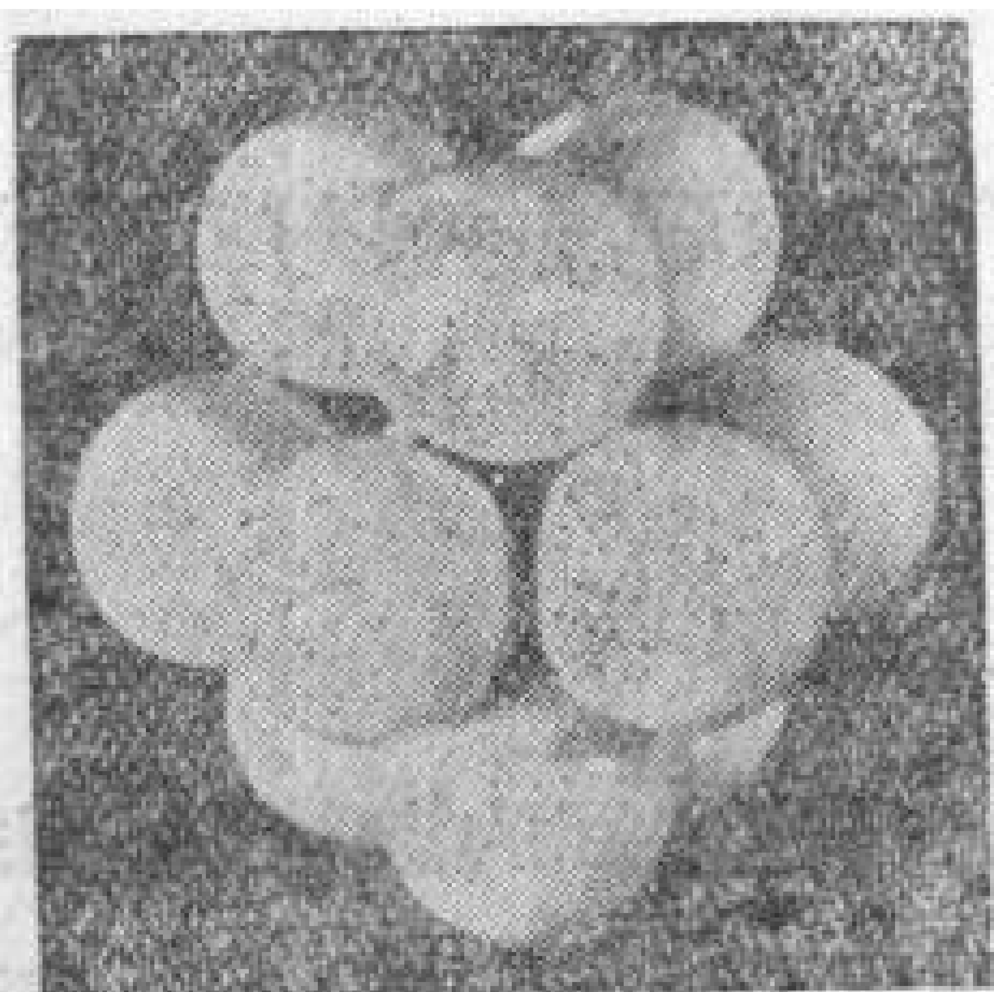
在三維空間中从一平行六面体开始可得出空間的点格，作法和在二維空間中从一平行四边形开始以得出平面点格相类似。在空間，同一个点格也可用不同形状的平行六面体产生，但是它們的体积必定相等。其次，每个平行六面体的八个頂点必須是八个格子点，在平行六面体的內部和面上不許再有格子点。我們把由体积为一单位的平行六面体产生出来的点格叫做单位点格。

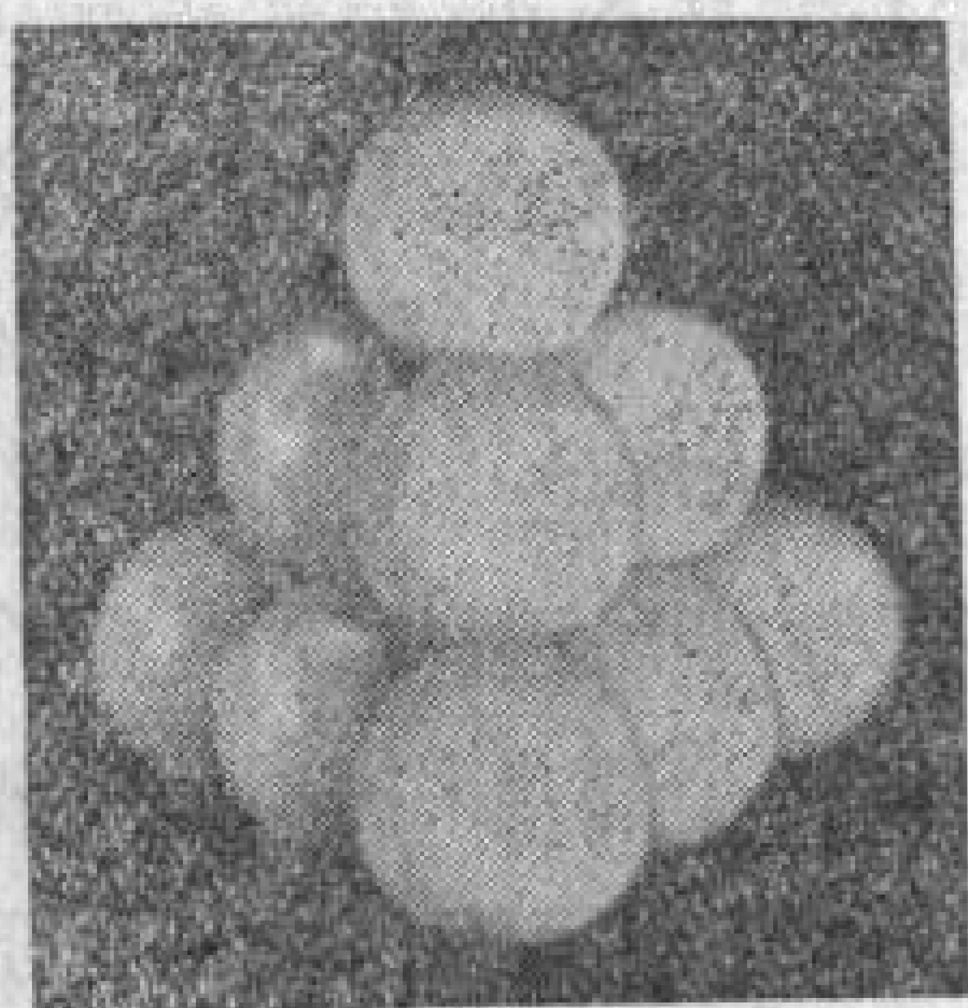
跟平面上的理由相同，空間单位点格两点間最短的距离也沒有下界，但确有一上界。决定上界的方法也和平面点格一样，因此这里就不重复了。就这一方面来說，正四面体在空間的作用相当于三角形在平面上的作用。不过，平面上基本平行四边形由两个等边三角形拼成，而相当的空間的基本平行六面体（正菱面体），由两个正四面体和一个正八面体拼成（参看第 50 頁图 49）①。这个平行六面体的体积是 $\frac{c^3}{\sqrt{2}}$，其中的 c 代表正四面体的一个棱长。因为我們要求这个体积等于一单位，从 $\frac{c^3}{\sqrt{2}}=1$，得 $c=\sqrt[6]{2}$。于是我們得出这样的一个結果：在空間的单位点格中，距一个格子点为

① 平面上最紧密的圓形堆积問題可化归用全等等边三角形无空隙地填滿平面的問題。似乎由此可以推想，空間中的类似問題可化归用全等正四面体无空隙地填滿空間的問題。然而可以証明，空間决不能用全等正四面体填滿。

$\sqrt[6]{2}$ 的地方，至少还有一个格子点。

也象平面的情形一样，用上述結果还可解决最紧密的格子式球形堆积問題，这样的堆积只要球心組成菱面体点格就可实現。假定球的半徑是1，正四面体的棱长是2，則基本菱面体的体积等于


(a)


(b)

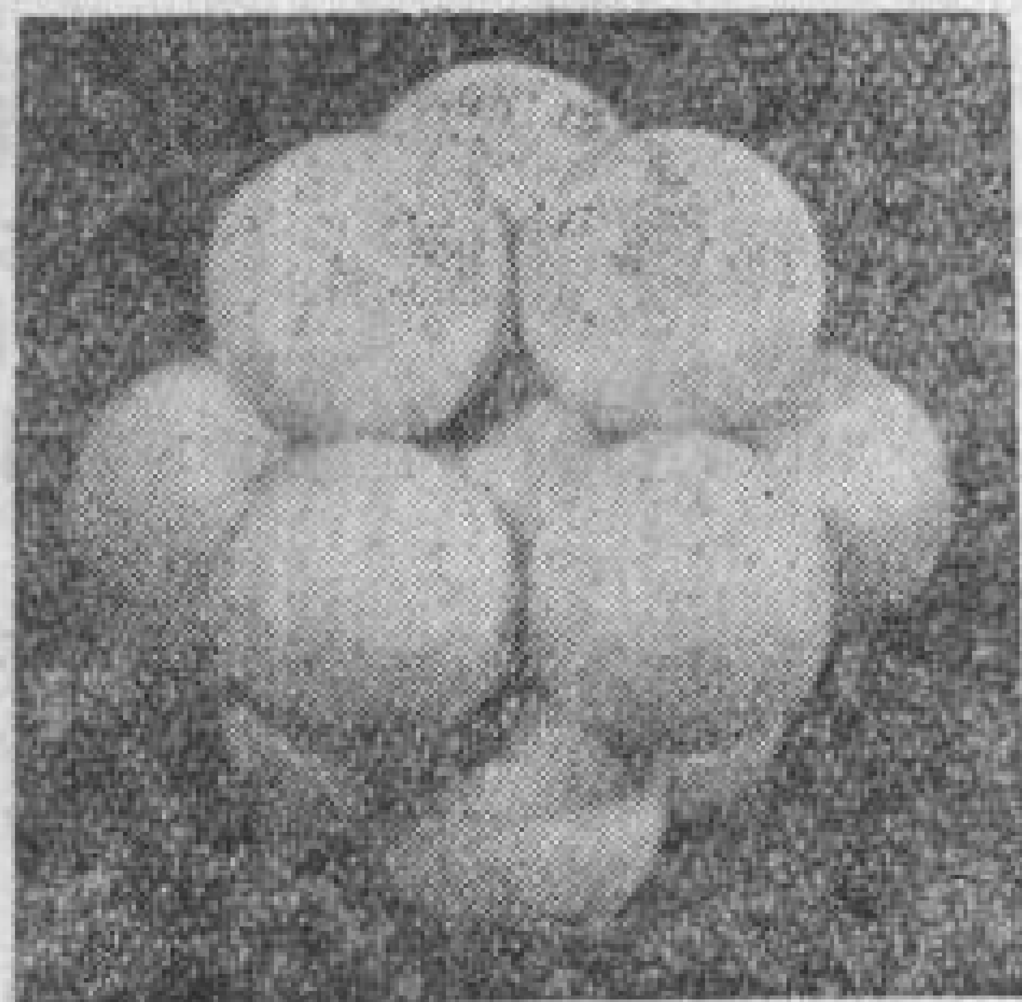

(c)

图 47

$$\frac{2^3}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}。$$

因而在体积为 J 的空間区域内，近似地含有 $\frac{J}{4\sqrt{2}}$ 个格子点，也就是包含这样多的单位球。跟平面的情形一样，J 越大，上式越准确。

让我們再进一步来研究球形堆积。为此，我們設想有多个单位球組成的一个平面层，在这平面层中各球心作成的点格与平面最紧密的圓形堆积相当。这样显然也就得到平面层的最紧密的球形堆积。让我們再取同样的第二层，放在第一层上。試問应如何放法，才能使这两层位于相距尽可能小的两个平行平面之間？为此，必須使第二层的球塡到第一层的空隙处，但是这样并不能塡滿各个空隙，而必須交錯地留下空隙（参看第39頁图42）。若用同一方式在这两层之上再放上第三层，这个規則还不能唯一地决定三层球的相互位置。我們可以把第三层球这样放到第二层所留下的空隙之上，使得第一、三两层对于第二层

对称(图 47, a)。也可以把第三层球放到上述排列留下的空隙处(图 47, b, c);这样,从第一层挪到第二层或者从第二层挪到第三层要經过同样的平移。在这种情形下,在两个方向上重复同样的平移,将产生菱面体的球形格子式堆积。由此可見,虽然在平面上可用唯一的圓形堆积得到理想的最大的密度,但在空間,同样的問題却得出两种完全不同的球形排列①。各球心不一定在整个空間都組成有規則的图形,因为把一层挪到另一层可用两种方法的任何一种。但有一特点是所有排列方法所共有的:每个球恰好跟十二个球相接触,其中的六个球和它在同一层,另外的六个分在上、下两个邻层里,每层里有三个。

四維和五維的最紧密的球形格子式堆积問題已有結論,非常奇怪的是,可以証明,相当于三角形或菱面体的点格的高維空間点格,不再产生最紧密的球形堆积。現将結果作成下表:

	两点間的最短距离 c	堆积密度
平面	$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}=1.075$	$0.289\pi=0.907$
平常空間	$\sqrt[6]{2}=1.122$	$\frac{\sqrt{2}}{8}\times\frac{4}{3}\pi=0.740$
四維空間	$\sqrt[4]{2}=1.189$	$\frac{\pi^2}{16}=0.617$
五維空間	$\sqrt[10]{2}=1.074$	$\frac{\sqrt{2}}{60}\pi^2=0.465$

(在四維空間里单位球的体积等于 $\frac{\pi^2}{2}$,在五維空間里等于 $\frac{8\pi^2}{15}$。)

除了最大密度的堆积以外,还有許多其他有趣的正則堆积。例如,有一种所謂立方体球形堆积,堆积的单位球的球心是棱长为 2 的立方体产生的格子点。在这里每个球恰与六个邻球相切,因此可以想到,这种堆积的密度比每个球与 12 个邻球相切的菱面体格

① 这两种堆积方式事实上在自然界都存在。第一种見于鎂的六面体晶体,第二种見于面心立方晶体。参看 § 8。

子式堆积的密度要小得多。要証明这句話，我們把立方体点格挪动，使每一立方体恰好包含一个球。棱长为 2 的立方体体积等于 8，因此包含在体积等于 $8x$ 的一个大区域内的球数近似地等于 x。由于单位球的体积等于 $\frac{4}{3}\pi$，所以立方体堆积的密度是

$$D=\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}\pi=\frac{\pi}{6}=0.524。$$

我們自然会联想到与最紧密堆积問題相反的，在空間各球互相支撑，使相对位置得以保持不动的条件下寻求最稀松的正則的球形堆积問題。这时，每个球必須至少与四个邻球相切，这四个球的球心既不能在一个平面上，也不能在一个半球上。假如不然，一个球就不能被其邻球托住。可能有人会想到，最稀松的堆积应該是每个球恰好跟四个球相切，而且四个球心形成正四面体的四个頂点。下面我們先用这样子的排列作一个点組，然后再研究如此所得的球形堆积究竟是不是最稀松的。

今将立方体各面上的中心点也加入立方体点格中。如此所得的点組也作成点格(面心立方体点格)，因为这一組点可以从平行六

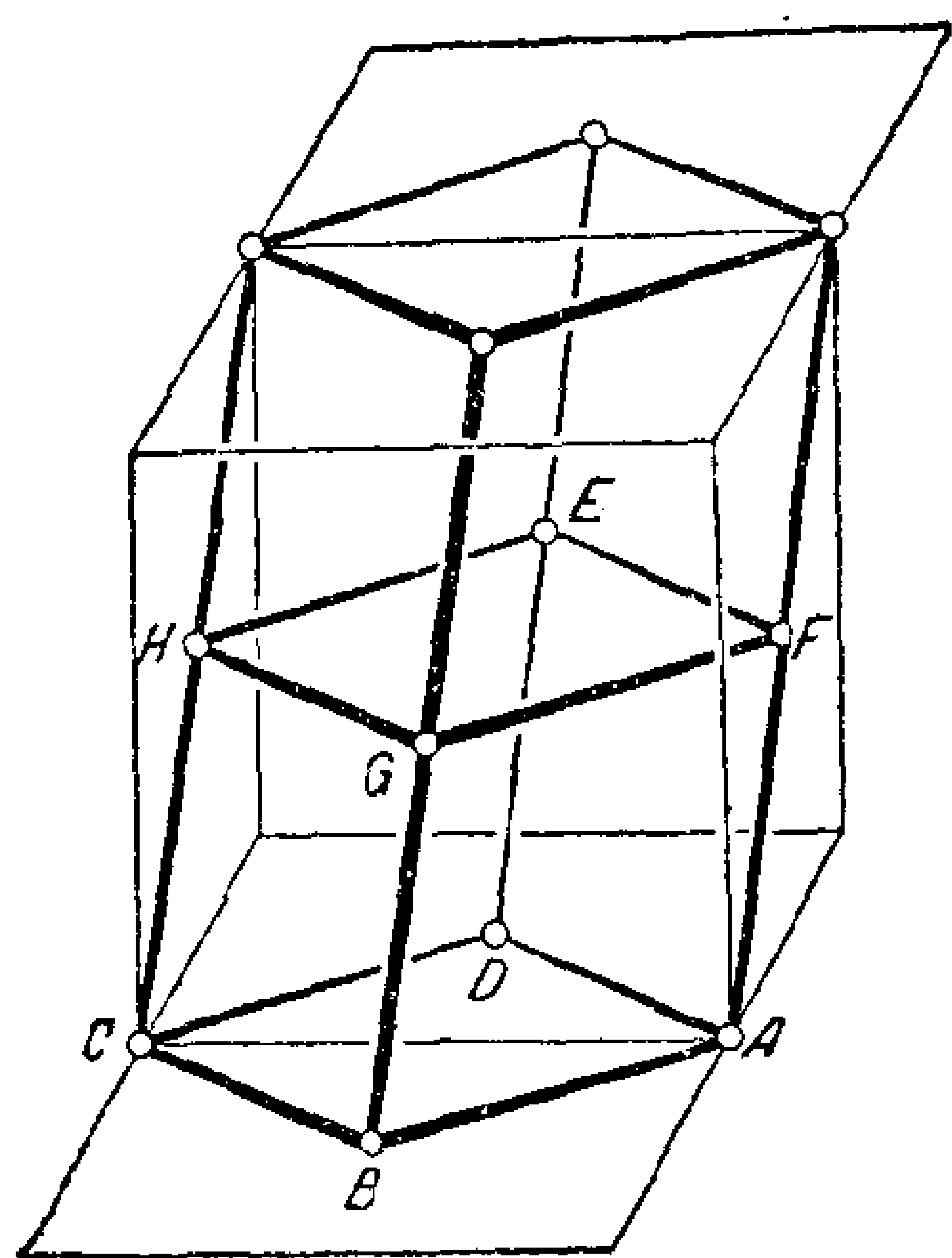


图 48

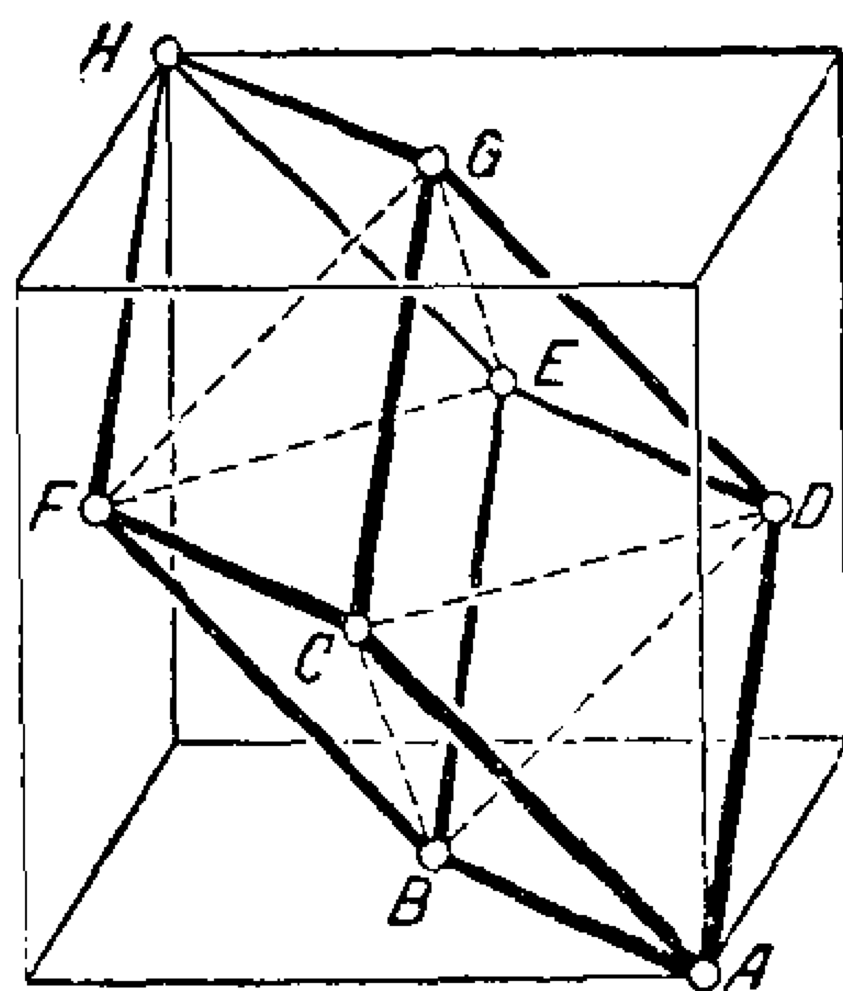
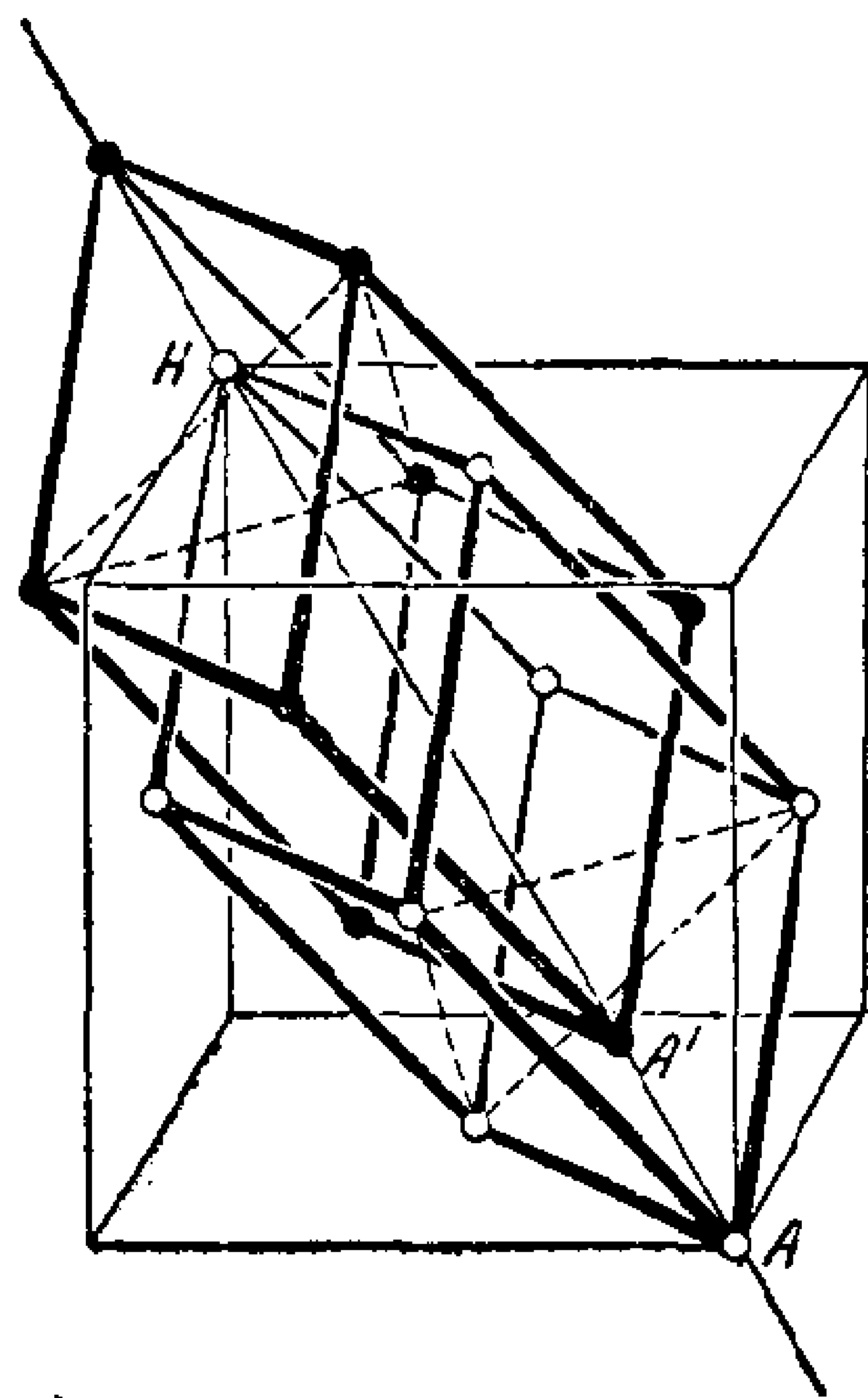


图 49

面体 $ABCDEFGH$ (图 48 和 49) 用平移法产生。(这两張图也說明前面講过的一件事实:同一点格可以由截然不同的多种基本体产生。) 从图 49 上可以看出,这种点格給出最紧密的球形堆积。因为,在平面 ABD 上,平行四边形 $ABDE$ 定出等边三角形点格;包含格子点的最近的平行平面是 CFG,在这个平面上的点格同平面 ABD 上的格子点作成一些正四面体,例如 $ABCD$。

让我們在这个点格 K 之外再加上跟它合同的另一个点格 L,L 是这样得到的:沿立方体对角綫 AH 的方向移动 K,移动的距离等于 $\frac{1}{4}AH$(图 50)。我們說,L 和 K 上的点一起,作成所求的"四面体"球形堆积的球心,而且球的半徑等于 $\frac{1}{2}AA'$,其中的 A' 是从 A 移来的 L 上的点。因为,根据作图,A' 显然同图 49 中所标出的 A, B, C, D 四点的距离相等,所以以 A' 为球心的球恰好同以四面体 $ABCD$ 的四頂点为球心的四个球相切。由于对称的原故,相当的說法也适用于 L 上的一切的球。再有,这个結果也适用于球心在K上的所有的球 (例如图 50 上的 H 点),因为 K 和 L 的相对位置相同,所不同的只是平移的方向而已。图 51 和 52 表明四面体的球心排列的状况。图中邻球的球心用直綫連接[①]。



○点格 K 的点
●点格 L 的点
图 50

现在我們来計算四面体堆积的密度。每一立方体显然占有点格 L 的四个

① 在这种堆积里球心的軌迹不是点格;因为在这軌迹中,不包含比方說 A'' 这一点,而 A'' 是在图 50 上延长 AA' 使 $A'A''=AA'$ 而得到的;假使构形是点格,则由于它包含 A 和 A',也应該包含了 A'' 了。这种作图称为点系。点系比点格具有更一般的对称性。它的定义将于 § 9 給出。

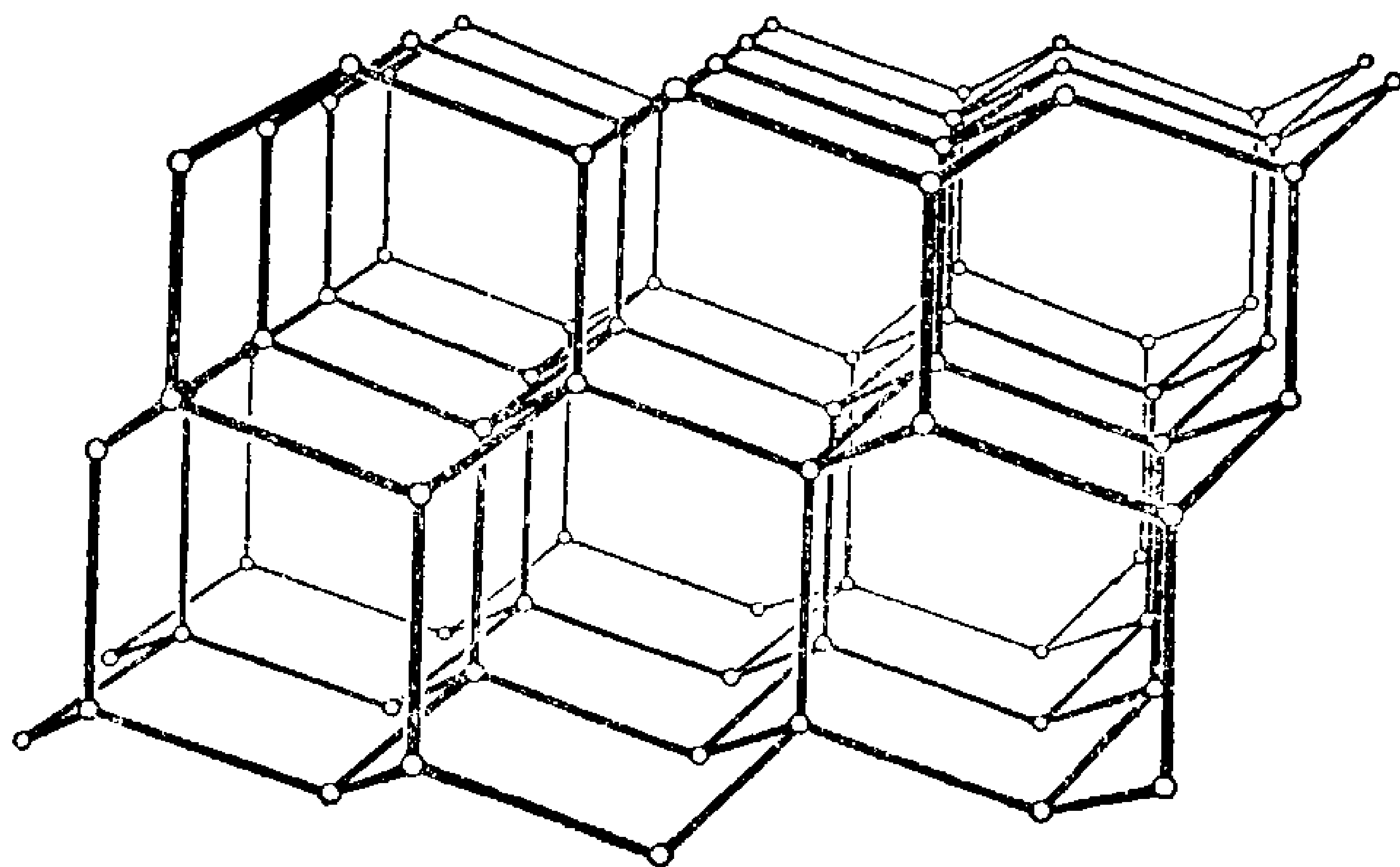


图 51

球，因为把 K 平移到 L 后，E, F, G, H 四点（图 49）和以这四点为球心的四个球完全移出于立方体之外，但以 A, B, C, D 四点为球心的四个球则移入立方体之内。因为 K 的密度同 L 的一样，所以每一立方体恰好占有堆积的八个球。跟以前一样，命各球的半徑 $\frac{1}{2}AA'$ 等于一单位，并設立方体的一棱长为 a，它的对角綫长为 b，则

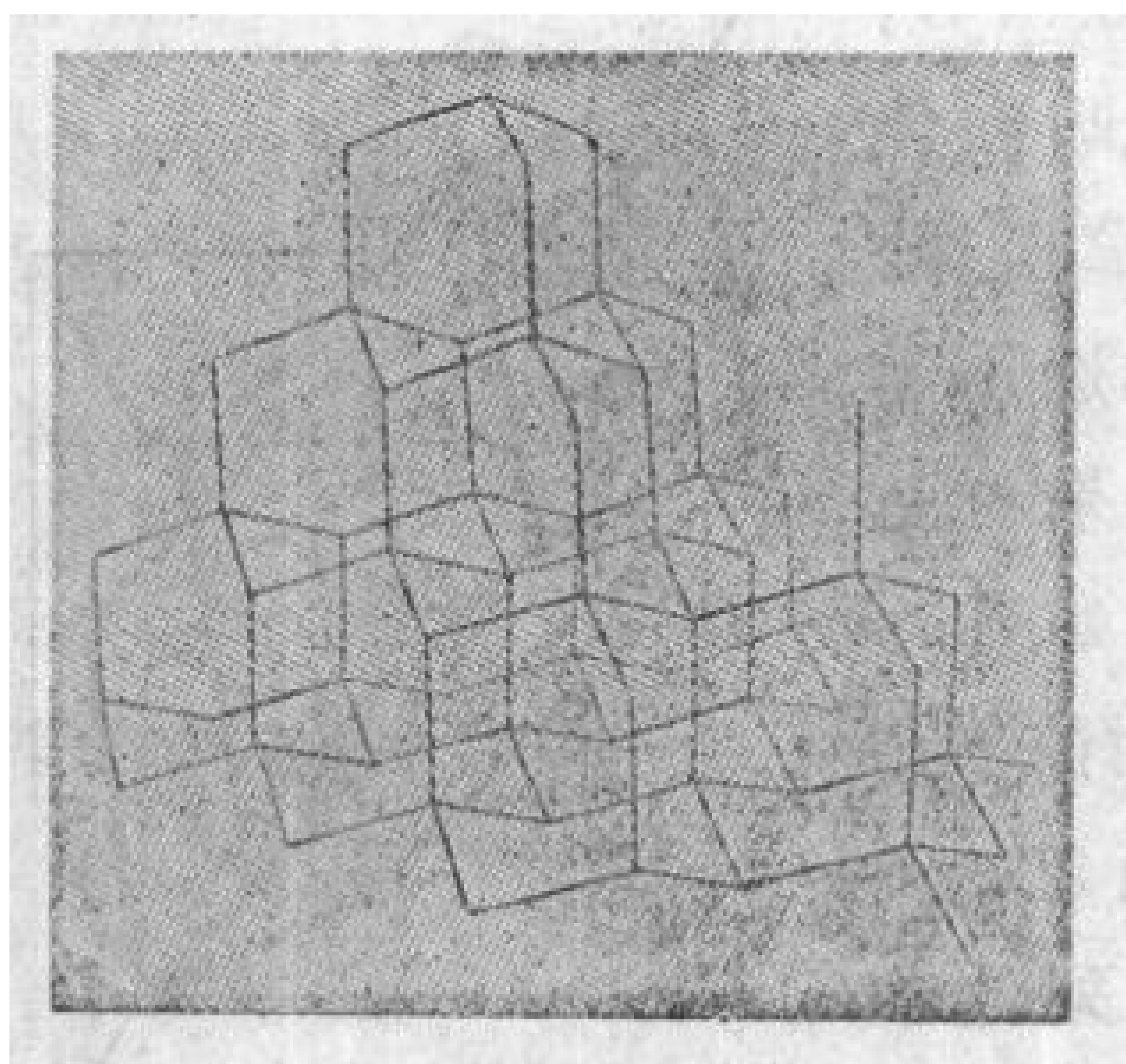


图 52

$$b=4AA'=8=a\sqrt{3}\text{。}$$

由此立得立方体的体积是 $a^3=\frac{8^3}{3\sqrt{3}}$。跟以前的論証相同所求的密度 D 是

$$D=\frac{8}{a^3}\times\frac{4}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{16}\pi=0.340\text{。}$$

我們現在証明[仿照 H. 希斯(Heesch)和 F. 拉費斯(Laves)①]四面体球形堆积还不是最稀松的形式，只要經过簡单的变形，就可以产生比这更稀松的形式，其中每一球仍与其他四球相切，而且所有的球都处于平等的地位。必須指出，跟同一球相切的四球的球心，此处不是正四面体的頂点，而是另一种以等边三角形为底、以等腰三角形为側面的四面体的頂点。

为了作出这个堆积，我們从四面体堆积的一个球 K 出发，作半徑相等的小球 k_1, k_2, k_3, k_4，使它們內切于 K，而切点正好是 K 同四面体堆积的邻球相切的切点。因为这四个切点是一个正四面体的頂点，所以四小球的球心也是如此。經过适当地选擇四小球的半徑，可使它們每两个都相切，因此每一小球都与其他三个相切。对于四面体堆积中的其他各球也可以如此作。这样，k_1 不仅同 K 內部的 k_2, k_3, k_4 相切，也同 K 外部的另一小球，比方說 k_5 相切，切点就是 k_1 內切于 K 的切点；因为在这一点上，K 同四面体堆积的一球 K' 相切，并且也就在这同一点上，K' 在它的內部同我們叫它做 k_5 的小球相切。当然 k_1 的这个性質也同样适用于作图中的其他的相等的球。这样一来，在这些球所成的堆积中，每一球的确被其邻球支撑着。如果要把如此得出的堆积的密度 d 同四面体堆积的密度 D 作一比較，显然只要把 k_1 到 k_4 体积之和同 K 的体积作一比較就行了。假定 k_1 的半徑是 r，K 的半徑是 R，則

$$\frac{d}{D}=\frac{4\times\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=4\frac{r^3}{R^3}。$$

从我們的作法甚易推知

$$R=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right)r,$$

① 参看 Zeitschrift für Kristallographie, 卷 82, 第 10 頁, 图 7。

因此 $$d=\frac{4}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right)^{3}}D=0.3633\,D。$$

可知这种堆积比四面体的还要稀松得多。下面的表給出我們討論过的四种球形堆积的特征常数。

最紧密的堆积	$D=\frac{\sqrt{2}}{8}\times\frac{4}{3}\pi=0.740$	每个球与其他的	12	个球相切
立方体堆积	$D=\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}\pi=0.523$		6	
四面体堆积	$D=\frac{3\sqrt{3}}{64}\times\frac{4}{3}\pi=0.340$		4	
最稀松(?)的堆积	$D=0.123$		4	

假如我們不要求圓和球的排列是規則的,而代之以較弱的要求,例如只要求在充分大的平面(空間)区域內放上尽可能多的大小相同的圓(球)。关于平面上的情形,已經証出凡适合这个新的条件的圓必須是格子式的。至于三維和三維以上空間的情形,問題迄今尚未解决。

§8. 作为正則点系的結晶体

不連續的正則点組理論最重要的应用是在結晶学上。由于結晶体具有規則的外形和沿一定方向的可裂性,人們推測,如把結晶体中单个的原子或分子当作点来看,則这些原子或分子作成一个图形,它可以用合同于自己的方式,无限延伸以至塡滿整个的空間。凡用这样的延伸法产生的图形都叫点系。以后我們还要把这个概念弄得更为精确一些,而且証明,点系只有有限种实質上不同的类型。这里有两个問題发生:一部分属于数学,一部分属于物理学。第一个問題是对于每一类的結晶体找出相当的点系类型,第二个問題是用适当的点系的几何性質来解释各种不同結晶体的

物理性态。

首先企图用上項办法获得結晶体构造上一定观点的要上溯到布腊魏斯(Bravais, 1848)[①]。但一直等到1913年劳埃(Laue)利用X射綫对結晶体作衍射实驗以后，这才牢固地奠定了布腊魏斯理論的基础。劳埃用实驗方法不仅証实了結晶体的格子构造的存在，并且确定了它們的精确构造。

最粗糙的原子构造的想象，自然是假定原子由有"手"的質点組成，手的数目与原子价相等。在这样的模型里我們假定代表原子价的手尽可能对称地排列于空間，除非有特殊的理由認为对称性已被破坏了。当几个原子結合起来而为分子的时候，我們設想不同的原子的两支手拉在一起。

举几个例子来看看。氫(H)，氧(O)，氮(N)，碳(C)，它們的原子价分别为1, 2, 3, 4。因此我們可以假想这些用質点表示的原子，分别有1, 2, 3, 4支手(图54)。对于H, O, N来說，对称性要求它們的手排在一个平面上。由于同一理由，可以假想碳原

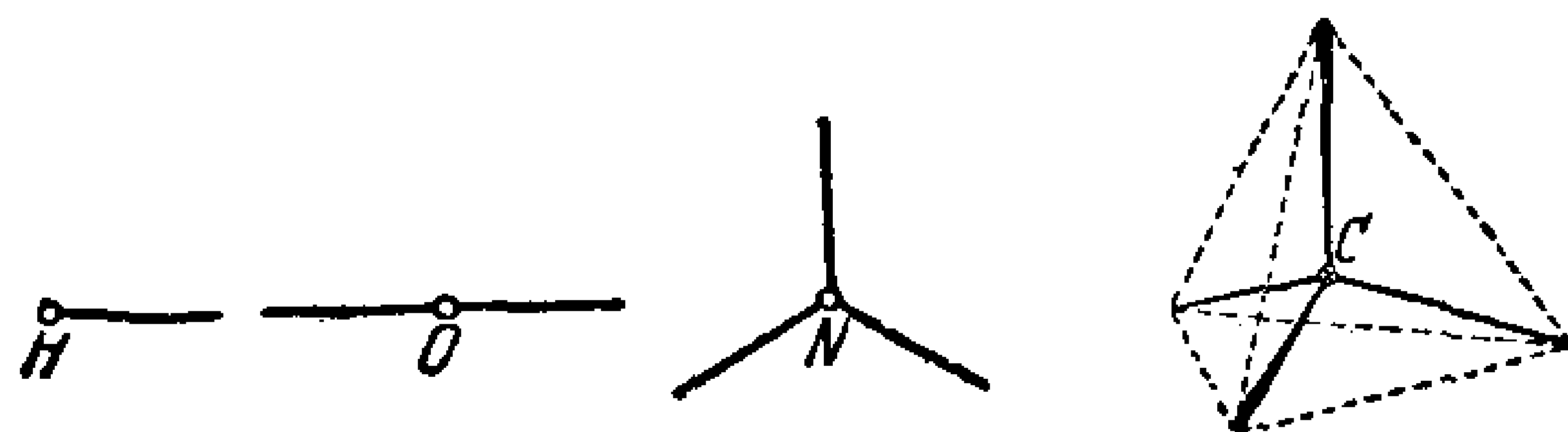


图 53

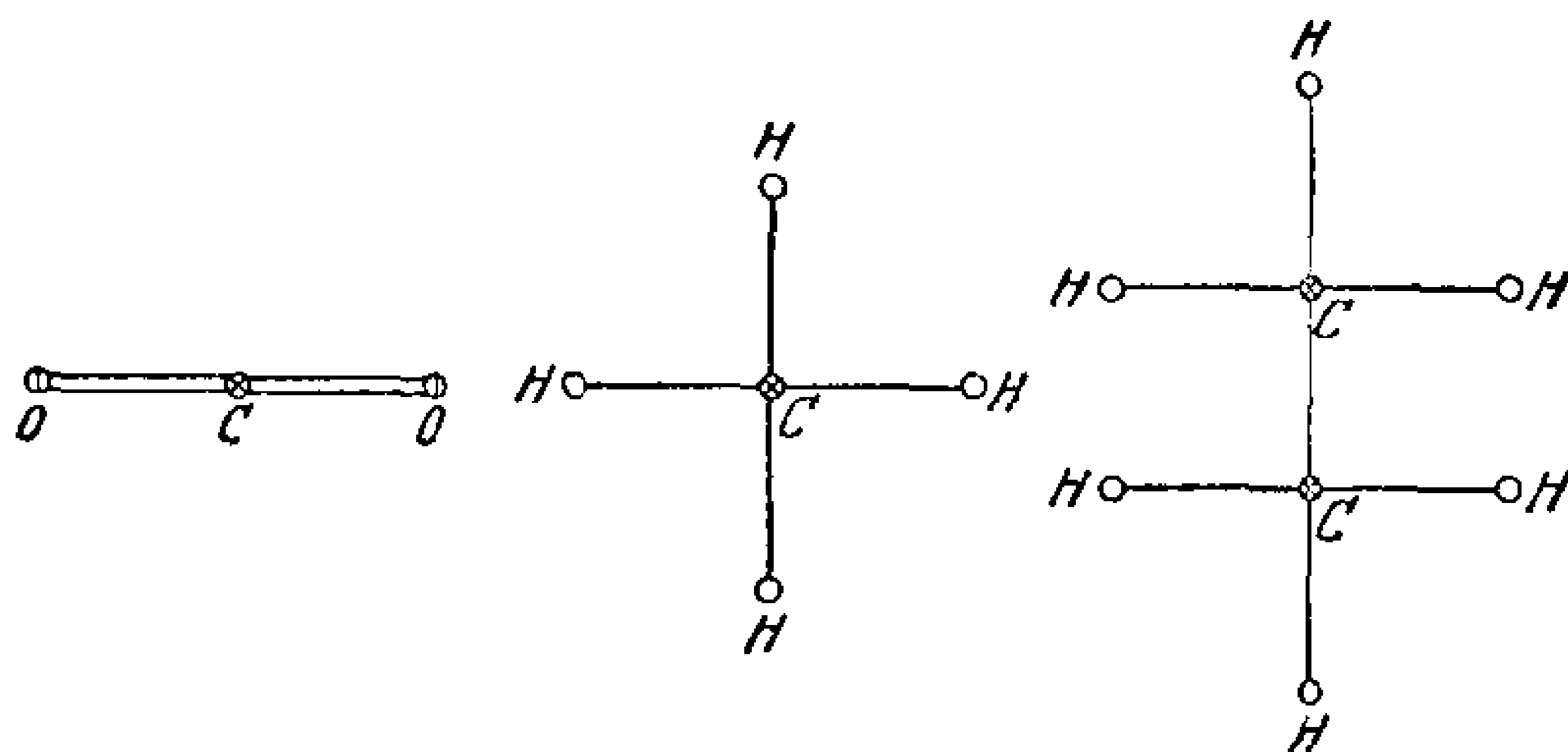


图 54

① 結晶体构造的数学理論是俄国的学者E. C. 費多罗夫(Федорв)在1891年創立的——俄譯本編者注。

子的四支手以原子为中心，向一个正四面体的頂点伸出。

作为分子的例子，我們看一下二氧化碳(CO_2)，甲烷(CH_4)和乙烷(C_2H_6)。图 54 代表原子如何相連的一种大概表示法("构造式")，而不考虑原子在空間的实际排列。甲烷和乙烷分子在空間的可能的排列形式，根据万特霍夫(Van t'Hoff 1874)最近研究的結果，可能象图 55 中那样。在乙烷的模型里，我們可以設想两个碳原子的連綫是能够作相对旋轉的两个四面体的軸。

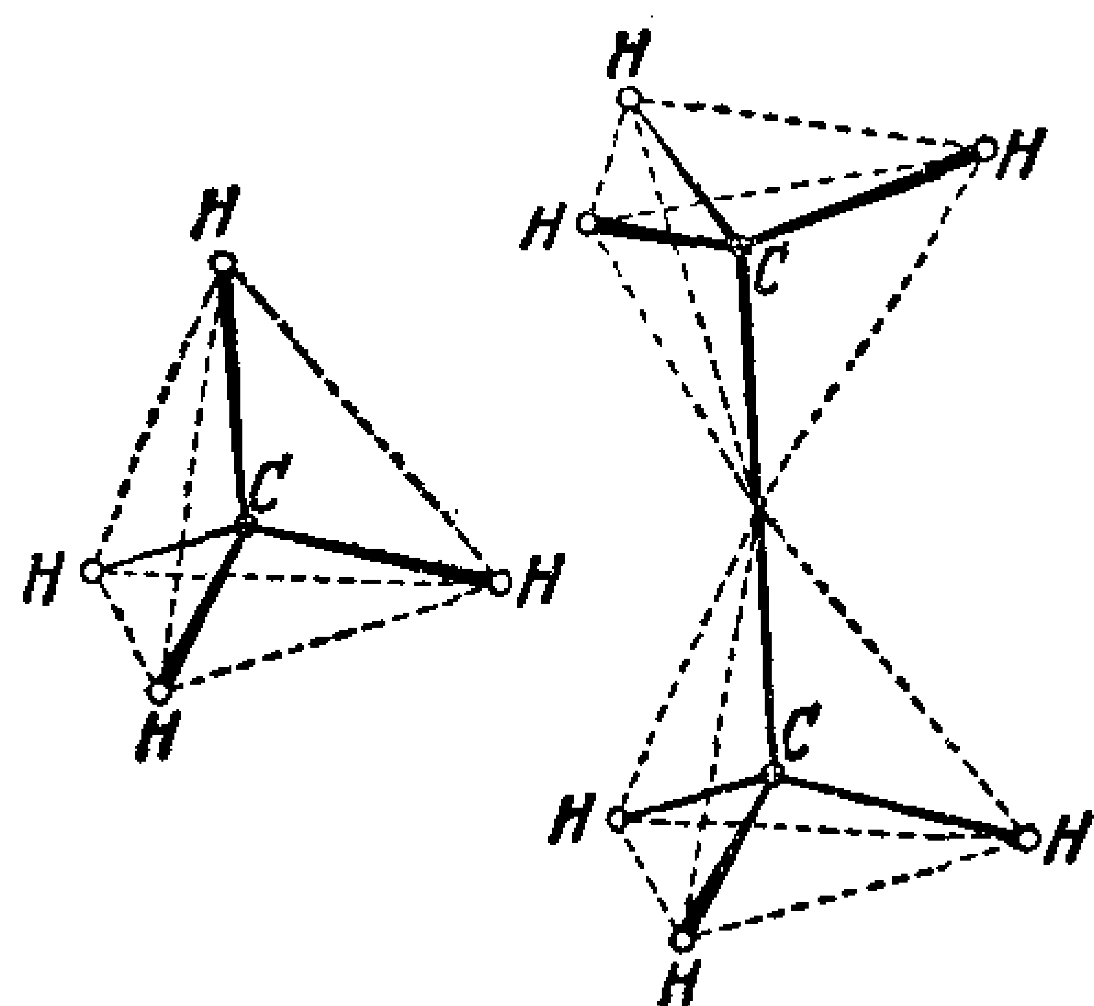


图 55

現在有这样的問題发生：整个的結晶体是否象分子那样，由多个原子結成而生成的呢？要問这样的結构是否可能，先看看最簡单的情形，即只由单一元素組成的結晶体如何。以金剛石为例。大家知道，金剛石是純碳組成的。这样，問題就成为如何把千千万万的有四支手的碳原子質点尽可能对称地排列，并使每一質点都与另外的四个質点手手相連。这样的結构是否可能，純粹是一个几何的問題。实际上这样的結构是存在的。原子的排列正象四面体堆积中球心那样。因为根据 §7 所講的构造，每个点的四个邻点恰好作成正四面体的四个頂点，而原来的那一点是正四面体的中心(参看第 51 到第 52 頁图 50 到 52)。根据两位布喇开(Bragg)最近測量的結果，我們純用几何方法得到的这个模型，正是由原子构成金剛石結晶体的模型。在同一測量結果中还发現，二相邻質点的距离是 1.53×10^{-8} 厘米①。

除了金剛石外，还有另一种只含碳原子的結晶体，就是石墨。

① 硫化鋅(ZnS)的結晶体也有与四面体球形堆积对应的原子构造。在这里鋅原子和硫原子分别組成象我們在第 51 頁上图 50 所画的两个点格，它們合起来就成为所説的四面体点系。

測量的結果发現，石墨碳原子四支手的排列不是对称的，甚至手长也不相等。一支长达 3.41×10^{-8} 厘米，其他三支手仅有 $1.45\times\times10^{-8}$ 厘米。后面的三支手差不多在一平面上。实驗尙不能告訴我們这三支手离一平面有多大的偏差，但为了今后討論方便起見，只要假定它們恰好在一平面上就够了。有了这項假定，我們可以把石墨的构造描述如下：

在一平面上作正六边形組，使每一原子在一頂点上（图 56)。

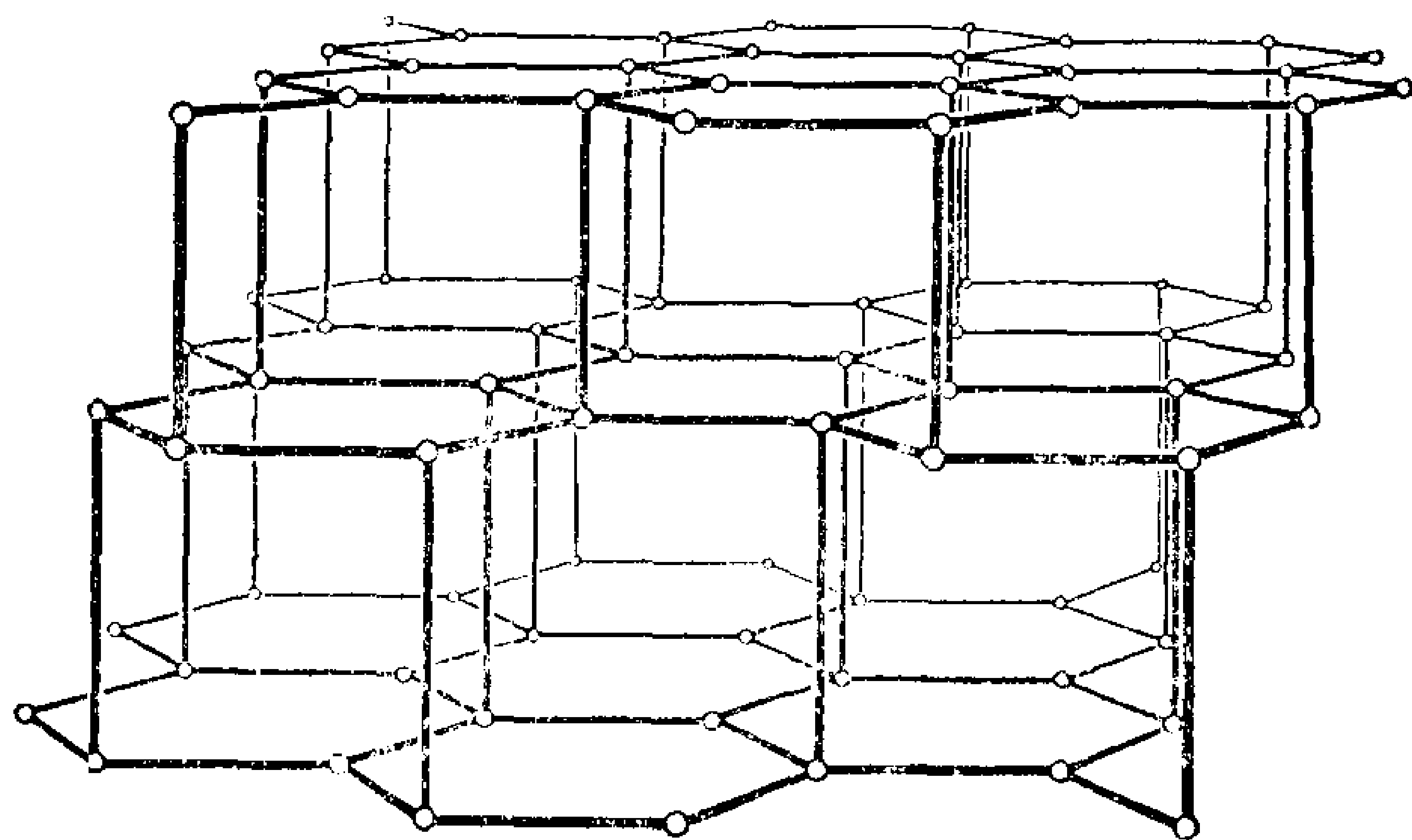


图 56

这样，每一原子用去了三个原子价。要使平面上面的一层跟下面的一层銜接起来，必須交錯地把原子处于自由状态的第四支手(每个原子恰好有一支)与上下层的原子拉在一起。由此得知，实际上三层是合同的，而且中层的各个原子质点交錯相間地在上层一质点的正下方和下层一质点的正上方。用同样的办法可将构架向各方无限延伸。

剛才建立起来的金剛石和石墨的两种点系可以解释两种結晶体之間某些物理性态上的差別，例如石墨較比金剛石的可裂性和可压縮性就大得多。至于要想解释其他的差別，困难还有不少。

由几种不同的原子組成的結晶体我們举食盐 (NaCl) 作例子。

食盐的結晶体是立方体格子，它的頂点由氯(Cl)和鈉(Na)的原子相間地填满(图57)。相邻二格子点的距离是 2×10^{-8} 厘米，因而比石墨中碳原子的短手长，比长手短。在食盐的結晶体中每一格子点有六个相邻的质点。但因为鈉和氯的原子都是一价的，所以这种結晶体的原子排列不遵循上面所講的原子价的理論。一般的情形也是如此，

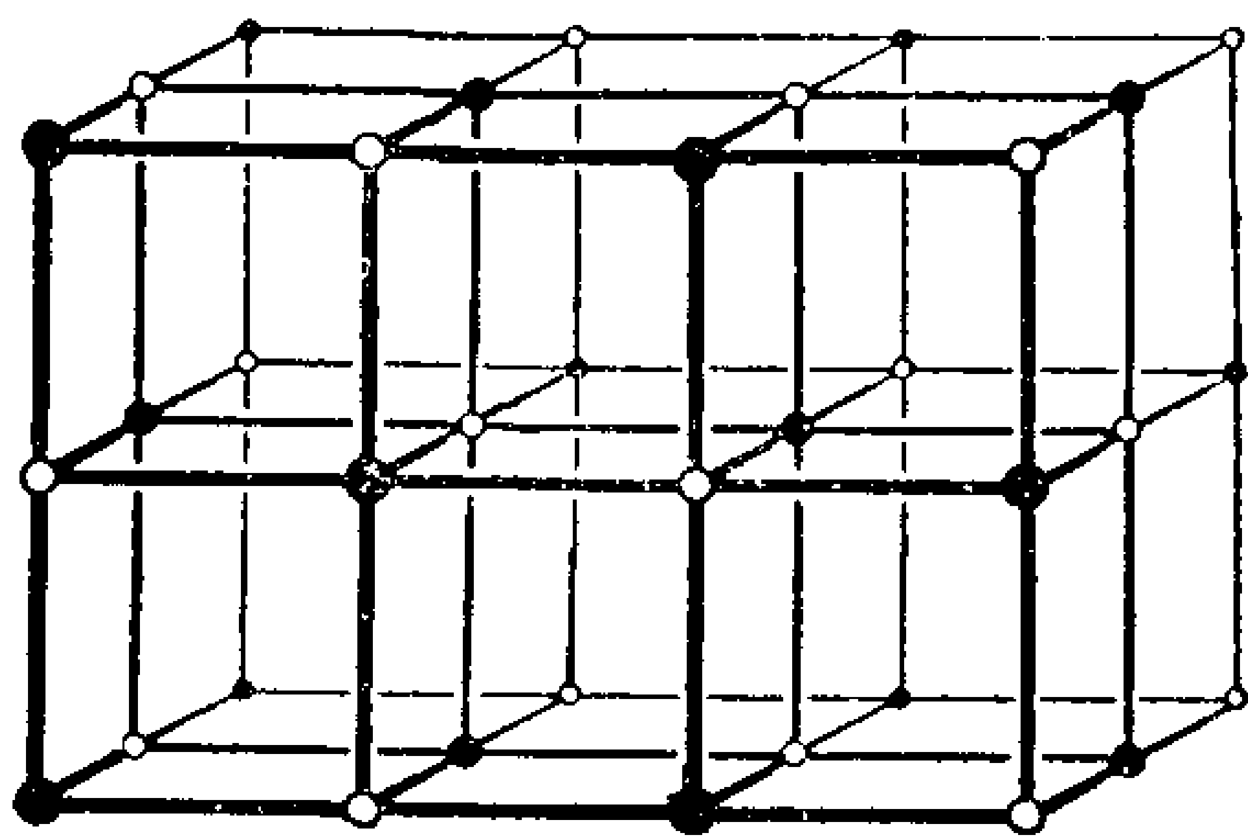


图 57

作成結晶体的原子的价跟构架中一质点的相邻质点的个数之間沒有什么直接的关系。不过就金剛石来說，原子价与相邻质点数相同，这乃是一例外。

值得特别注意的是，在食盐格子中不能特别划分出一对与其分子(NaCl)对应的质点。換句話說，格子是由这两种原子直接組成的。与此相反，对于某些結晶体，可以相当清楚地划分出它的分子，或者由多个原子結合成的集团。例如在大理石($CaCO_3$)的格子中，大理石的原子集团碳酸根 CO_3 的空間排列就清晰地显示出这个根是不可分割的整体。

金剛石是四面体球形堆积的例子。此外，有大量的作成"面心立方体"点格的結晶体，这样的点格相当于相邻两层的相对位置永远相同的最紧密的球形堆积(第48頁的图47, *b*, *c*)。对于另外一种最紧密的球形堆积，其中各层交錯地填满两組不同的空隙(第48頁图47, *a*)，鎂是一个例子。这种排列的方法称为"六角形最紧密的球形堆积"。

§9. 正则点系和不連續运动群

結晶学的研究引起要解决物体(例如原子)的所有可能的有規

則排列这个純几何的問題。因为对于許多目的来說，可以把物体抽象地看作点，所以就把这样的排列法称为正則点系。按照前面的討論，我們用下面的三个性質来規定正則点系：

1　平面或空間的正則点系包含无穷多的点，而且平面上包含在一圓內的点数或空間中包含在一球內的点数分别按半徑的平方或立方而增加，以至无穷。

2. 在任一有限区域內，一正則点系只包含有限个数的点。

3. 在一正則点系中，每一点对于其余的点而言的位置和另一点的相同。

前两个規定性質用不着加以解釋。第三个性質可以如此解釋：将正則点系中的某一定点与系中其他的所有点用直綫連結，对于任一第二定点也这样作。那末第三个規定就是說，用两种方式得出来的綫段图是合同的，也就是經过平面或空間的一定的运动，一个图形可以搬到另一图形上去。这样一来，一个人如果站在系中的某一个定点上，他不能用任何的量法去定出他究竟在系中的哪一点，因为所有点都处于相同的地位。不过要滿足第三項要求，不一定把系中的諸点連成綫，只要求經过平面或空間的某种运动能够把系中的任一点搬到系中的其他任一点，使得点系中的一点所占的地位在运动后被另一点所代替，而且反过来也对。这样的运动叫做保持点系不变的运动，也叫做点系的迭合运动。利用这个概念，可以把前面規定的第三个正則点系的性質改写为：

3. 正則点系的任一点經过系中的某种迭合运动，能够搬到系中的其他任一点。

从这个定义可知我們从前所規定的平面上或空間中由平行四边形或平行六面体产生的点格都是正則点系。由于存在着不是点格的点系，比如金剛石的結构，所以引进新的正則点系以推广点格概念，是有理由的。

现在我們求出所有各种不同的正則点系来。下面将証明，只須在点格外再补充以象金剛石那样的构造，卽由多个交錯挪动的、合同的而且在平行位置的点格組成的图形就够了。驟然看来，似乎由上述三个条件規定的正則点系的概念是这样的一般，以致不可能对点系作出一个完全的几何分类。其实不然，这样的分类确实可以作出；这是根据对点系的迭合运动的研究。

一点系的迭合运动的全体有两个特性，这两个特性可使点系的研究簡化不少。第一，两个相繼的迭合运动的結果是一迭合运动；第二，点系中任一迭合运动的逆运动是另一迭合运动。在数学上，凡适合这两个条件的任何变換的集合叫做变換群。为了計算上方便起見，我們把每一变換标以字母，如 a, b 等等。a 在前 b 在后的相繼运动用 ab 代表。跟 a 相反的运动用 a^{-1} 代表，并叫做 a 的逆运动。把規定群的两种性質結合起来，得出 aa^{-1} 形式的变換。这个运算显然保留所有的点不动，但为方便計，也把它算作变換中的一种特別情形，称为恒等变換或恒等，用字母 e 代表。e 在变換中的作用跟 1 在数字乘法中的作用相等，卽 $ae=ea=a$ 永远成立。

假如点系中任一点在这系中作所有的迭合运动，則依照規定正則点系的第三个性質，从这点可得出系中所有的其他各点。另一方面，从迭合运动的定义又可知道，点系中沒有一个点可以变換到不属于本系中的另一点。否則运动就不会使点系不变。一般地說，二点在一已知变換群之下称为等价的，如果其中的一点可由其他一点經过属于該群的一个变換得到。由此可知，正則点系是由在迭合变換群之下与一已知点等价的所有点組成的。于是，根据正則点系的第二个性質，卽知在任一有限区域內，一正則点系只有有限个等价点。一个变換群，若是在任一有限的区域內，对于这个变換群来說只有有限个点与一已知点等价，这样的变換群，叫做不

連續群。这样說来,一点系的迭合运动必作成一不連續群。或許有人認为,可能有不属于系中的一点,它在有限区域內,与无穷多的点等价。但是,直观上容易看出,也不难严格証明,如果是这样的話,在一有限区域內将有无穷多的点与一正則点系中的一点等价,这就引出矛盾。

因此一正則点系的所有的迭合运动群要在平面和空間的不連續运动群中去找,从而所有的正則点系要在不連續的运动群中跟某一点等价的点組中去找。这种办法似乎很迂回,其实这种办法正可以使点系的研究大为簡化。因为,可以証明,在平面上或空間里实质上只有有限个不同的不連續群。

如果我們研究一下在这有限的几种不同类型的群里与一已知点等价的点組,可知規定点系的第二个和第三个性质永远适合。但是有一些群,它們产生的点組不适合第一个性质;所以我們必須把这样的群除掉。其余的群,而且只有这样的群,才产生正則点系。凡是可以导出正則点系的不連續的运动群統叫做結晶体运动群,这是因为在結晶学上这一类的群特別重要。

下一节我們将講講如何建立不連續群,但只講平面的情形;至于空間的情形,因为牵涉面太广,非本书所能談及。卽使是講平面的不連續运动群,也相当复杂。虽然如此,我們还要詳細地研究一番,因为这种研究的方法,对于空間也是很典型的。

§ 10. 平面运动及其合成;平面不連續运动群的分类

平面到平面自身的映象,如果最后的位置可由初始的位置經过連續运动得到,这里的平面認为是一个剛体,而且平面上一切点所走的路綫还在平面自身上,則称为平面运动。不过,下面我們講平面运动时,只問起迄位置而不問过程中实际走过的路綫是什么。当然,可以有种种不同的路綫,甚至有时离开了平面,或者中途变

形而最后又恢复原状了。唯一的要求是过程的可能性，即要求存在如本节开头所說的那样一个过程。我們的第一个問題是：对于每一給定的平面运动，找出最簡单的可能的过程的形式。

最簡单的平面运动是平行运动或称平移。平移时平面上各点在同一方向上移出同一距离，每一直綫平移后仍与原直綫平行。

另一个众所周知的平面运动是繞某一点作一定角度的旋轉。在这里每一直綫旋轉了同一角度①，而且除去轉动中心外，平面上沒有不动的点。

除了恒等运动外，任一平面运动最多有一个不动点。因为假如有两点不动，那末除恒等运动不計外，只有一种可以由剛体运动得到的平面到自己的变換，就是平面繞二定点的連綫旋轉180°。这种运动不包括在上述的那类运动之內。它不能用上述的那类过程得到，因为它将順时針方向旋轉的圓变为反时針方向旋轉的圓；我們知道，根据連續性概念，平面运动是不能掉轉方向的。从这里的討論，可知一平面运动完全由两点的起迄位置决定。因为假如有两种平面运动将两个点变換成相同的另外两点，它們的差别只能是一个保留两点不动的平面运动，換句話說，它們并无区别。

任一平面运动可单由平移或单由轉动产生，此事可使运动的討論异常簡化。为了証明这句話，設想有一已知的平面运动 b。b 为恒等的显易情形除开不談，我們可以选取一点 A，設 A 变到另一点 A'。設 B 是綫段 AA' 的中点，则 B 或者不动，或者变到另一点 B'，对于前一种情形(图58)，断言无疑是对的。因为，在这种情形下，我們可以断定已知的运动 b 是繞 B 旋轉

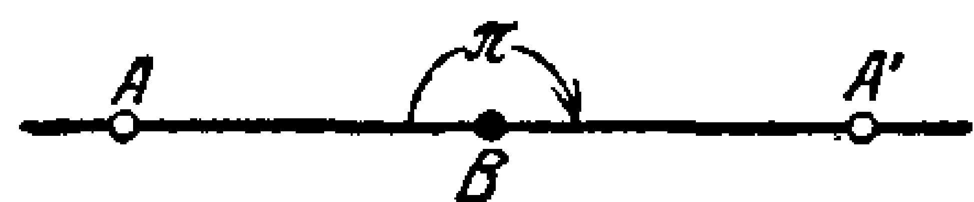


图 58

① 对于通过旋轉中心的直綫来說，这很显然。对于其他位置的直綫，从下述事实可以推知：必有通过轉动中心与这一直綫平行的直綫，和任一运动变平行綫为平行綫。

一角 π 的运动 b'。这个运动把点 A 和 B 搬到跟 b 相同的象点 A' 和 B。因为我們知道平面运动完全由两点和它們的象点来决定，所以 b' 一定与 b 相重合。假若 B 变到另一点 B'，那我們还要区别 B' 在直綫 AA' 上的特殊情形与 AA' 和 BB' 在不同直綫上的一般情形。在第一种情形下，B' 是唯一决定的。因为，A、B 之間的距离在运动 b 中不变，又因由作图知道 $AB=A'B$，所以必有 $A'B'=$ $=A'B$。有了这个条件，再加上条件 $B'\neq B$，就确知 B' 是唯一决定的了（图 59）。据此我們就可以断定 b 是 A 到 A' 的平移，因为这个平移也把 B 搬到已知的象点 B'。現在只消探討最后一种情形了。通过点



图 59

B 作 AB 的垂綫，过 B' 作 $A'B'$ 的垂綫（图 60）。根据假設和作图，这两条垂綫既不平行又不重合，所以它們相交于一点 M。我們断言：b 就是把 A 搬到 A' 的繞点 M 的轉动。要証明这件事必須証明这个轉动也把 B 搬到 B'；这可以从三角形 AMB 合同于三角形 $A'MB'$ 推知。三角形 $AMB\cong$ $\cong A'MB$，因为，在 B 点上的二直角相等，二腰相等。此外三角形 $A'B'M\cong A'BM$，因为在 B 和 B' 处的直角相等，斜边 $A'M$ 相同，又因为我們上面講过 $A'B'=AB=A'B$。

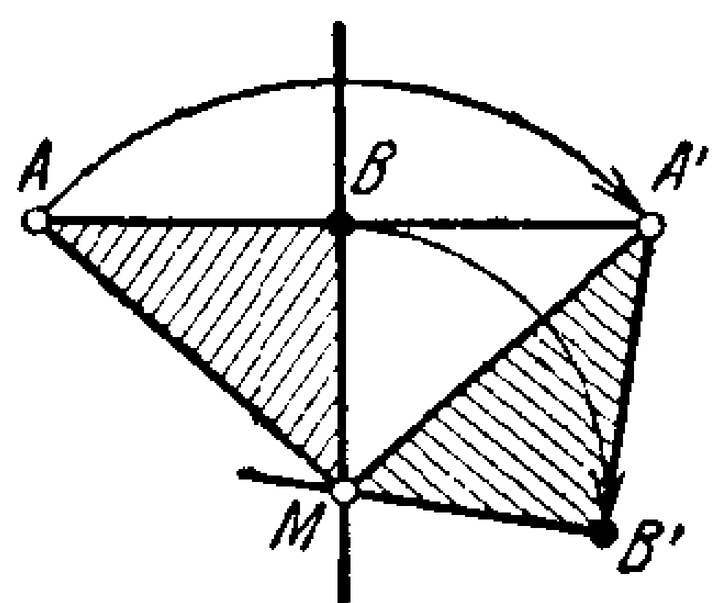


图 60

如果把平移当作圍繞一无穷远点作中心而轉出一 0° 角的話，那么我們的結果在形式上还可以簡化不少。这样的解釋容易从直观上証实。如果我們設想有一系列的轉动，轉角无限减小，轉动的中心在一定的方向上趋于无穷远点，那么就可以把它們如此排列，使得这些轉动与一預先給定的平移的差别越来越小，至少在一定的有限区域内是如此。

应用这种观念，可知任何平面运动都可以看作是經过某一定

角的轉动；如为平移，則轉角等于零。这样說来，两个継續轉动的結果必可用經过某一定角的轉动来代替。在这方面，有一个关于轉角和的簡单定理：

經过角 α 的轉动与角 β 的轉动的合成必定是經过角 $\alpha+\beta$ 的轉动。

事实上，我們在开始时就提过，轉角可以用任意选定的直綫的方向的变化来度量。在上述新的約定下，这个定理对于平移来說也是对的，因为平移保持方向不变。由此便知定理是显然的。从这个定理，可以推知以二不同点为中心、大小相等、方向相反的二轉动永远产生一平移。因为，合成运动的角是零，但它又不可能是恒等变换，因为这两个轉动的中心沒有一个是不动的。

有了上述的准备，我們便可以来談平面上的不連續运动群。現在可以用很簡单的办法把它們分类。只須說明，有什么样的平移，以及如有轉动，轉动的角度和中心是什么。可以看出，以先研究平移为最方便。因此分作两种情形：

I. 群中所有的平移方向都平行。

II. 群中有不平行方向的两个平移。

第 I 种情形也包括沒有平移的群。

要想把每种类型的群再詳細分类，我們引进轉动。即分做：(1) 不包含轉动的群和 (2) 包含轉动的群。

一个群除去可以通过找出它的轉动和平移来識別外，还可以通过一种簡单的几何图形，即基本区域来識別。所謂群的基本区域，是指不含有一对等价点的任一連通区域，但它不能再行扩充而不失掉这种性質。基本区域不仅在运动群中很重要，就是在所有的不連續群中也很重要。在一般的情形下，要找出一个已給群的基本区域幷不是一个簡单的問題，即使去証明某一类群的基本区域是否存在也頗不容易。不过对于平面运动的不連續群来說，却

不难作出它的基本区域来。可以証明,第 I 种情形的每个基本区域扩充到无穷远,但第 II 种情形的基本区域則永远是有限的。

在未講平面运动的基本区域以前,我們先講今后时常用到的在一个群里的轉动和平移的某些重要关系,当作两个引理。

引理 1. 如果在一个群里有圍繞一点 P 轉过 α 角的轉动,而且 Q 与 P 等价,則在这个群里还包含繞点 Q 轉过同一角 α 的轉动。

証明 由假設,这个群里必有一运动 b,使 P 迁移到 Q;还有一轉动 d,繞 P 轉动 α 角。应用上一节所規定的符号,考慮运动 $b^{-1}db$,由于群的两个公理,可知 $b^{-1}db$ 也必属于这个群。这个运动将是作 α 角的轉动。因为,假設用 β 代表 b 轉动的角,則根据轉角的加法定理,可知 $b^{-1}db$ 的轉角是 $-\beta+\alpha+\beta=\alpha$。轉动的中心必为 Q,因为 Q 經过 b^{-1} 到 P,d 保留 P 不动,P 經过 b 又回到 Q。

引理 2. 如果一个群包含一个轉过 α 角的轉动和一个平移 t,它也必包含一个平移 t',它的大小与 t 的大小相等,方向与 t 的方向作成 α 角。

証明 命 d 是群里以 α 为轉角的轉动,其中心为 A。設 A 經过 t 变到 B,B 經过 d 变到 C (图 61)。則 t' 就是 $d^{-1}td$。事实上,这个运动必为群中的一元素,而且必为一平移,因为按照加法定理,它的轉角等于零。下面只剩下証明 A 挪到 C 了。事实上,d^{-1} 保留 A 不动,A 經过 t 变到 B,B 經过 d 变到 C。

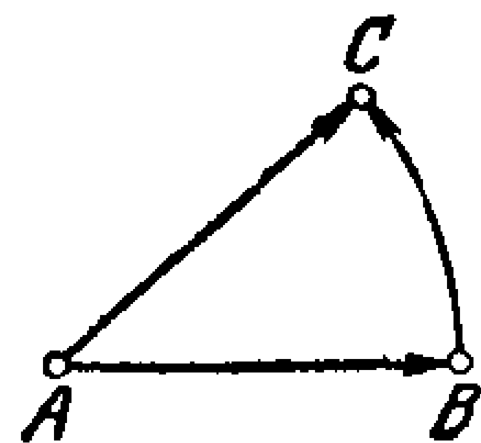


图 61

从这个引理可推出一个結論:在第 I 类的群里除了一般地包含平移以外,只能包含經过 π 角的轉动,而无其他的轉动。假如有其他的轉动的話,那么一个方向的平移的存在势将引起另一个不平行的方向的平移的存在。

§ 11. 有无穷大基本区域的平面不連續运动群

我們先講最簡单的第I类的群。先取不包含轉动的子类型I，1。从任一点 A 开始(图 62)。因为在 A 的有限距离内只有有限个跟 A 等价的点，那末在这些点里必有一个距 A 最近的点 A_1。距 A 最近的点可能不止一个，不过这里只要取一个就够了。把 A 搬到 A_1 而属于群的运动 a 必是一平移，因为根据假設，群里沒有轉动。延长綫段 AA_1 等于原长到 A_2，则 A_2 也必与 A 等价，因为 A 經过平移 aa 达到 A_2。同样道理，在直綫 AA_1 上还有其他与 A 等价的点 A_3, A_4, …，它們彼此間的距离相等，并且是由多次将 a 作用于 A 而得到的。同样在直綫 AA_1 上 A 的他侧也有无穷多的跟 A 等价的点 A_{-1}, A_{-2}, …，它們是由一次或多次将 a^{-1} 作用于 A 而得到的。現在我們断言，这样就把跟 A 等价的所有点完全取尽了。因为根据假設，所有的平移都平行于 AA_1，所以所有跟 A 等价的点都在直綫 AA_1 上。假定有一个点 A' 不是这个"刻度"里的一个分点，则 A' 将为某一綫段 A_nA_{n+1} 的内点(图 63)。这样一来距离 A_nA' 就要小于 AA_1。

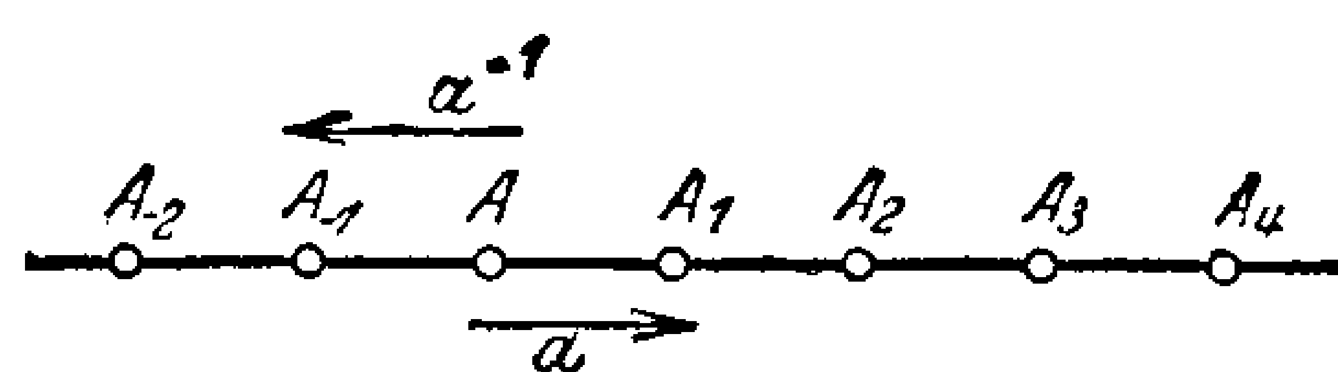


图 62



图 63

但是在群里有一平移将 A_n 迁到 A，同时也就将 A' 迁到跟 A 的距离小于 AA_1 的另一点 A''。这就与 A_1 的最初取法矛盾，因为 A_1 原是距 A 最近的、跟 A 等价的点。

通过上面的探討，我們已經完全解决了I，1类型的群；因为，我們已經找到了跟一已知点等价的所有点，从而也就可以这样地描述出現在群里的一切运动；这些运动便是应用一次或多次的平移 a 和 a^{-1}。由此得知所有类型I，1的群实质上都是等同的。

要想作一基本区域，这很簡单，可以从一条不平行于 AA_1 的直綫，譬如从 AA_1 的垂綫开始，經过平移 a，这条直綫变为它的平行綫，二平行綫間的长条区域显然就是一个基本区域①（图 64）。

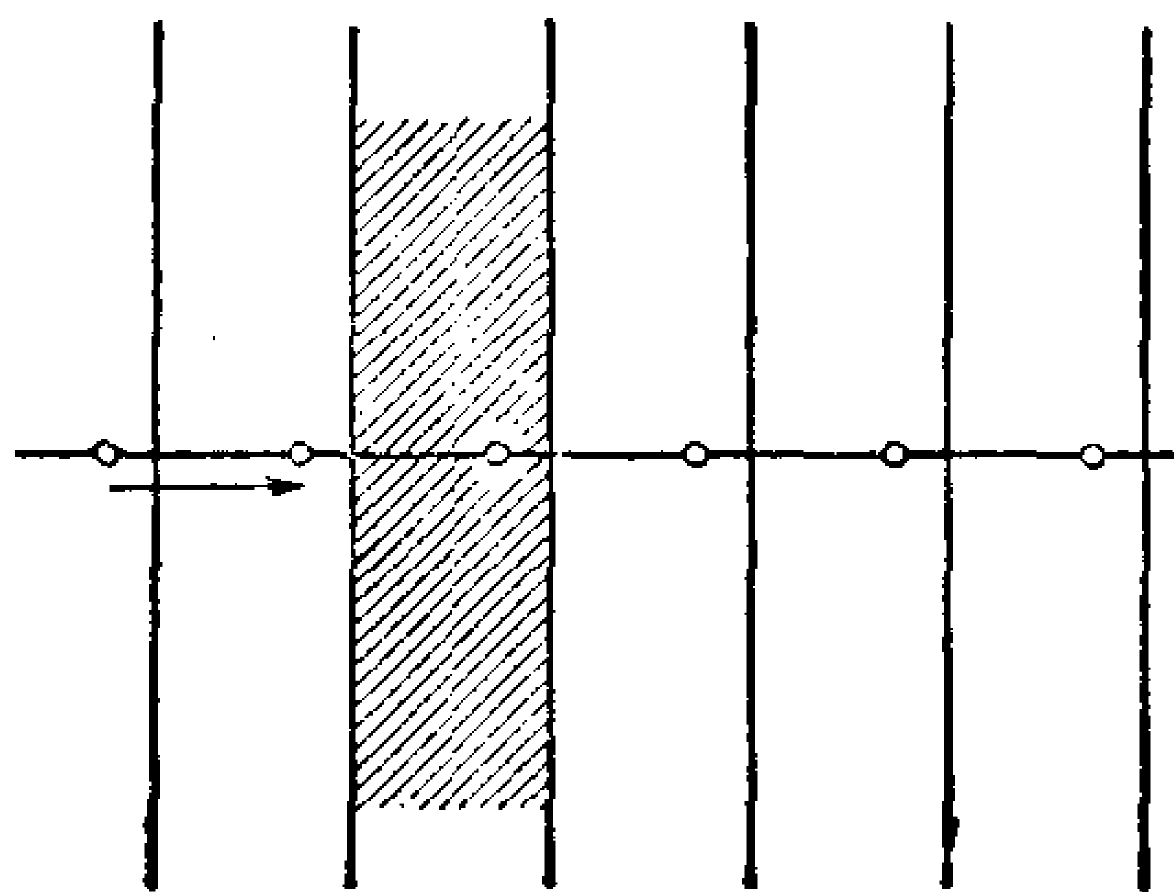


图 64

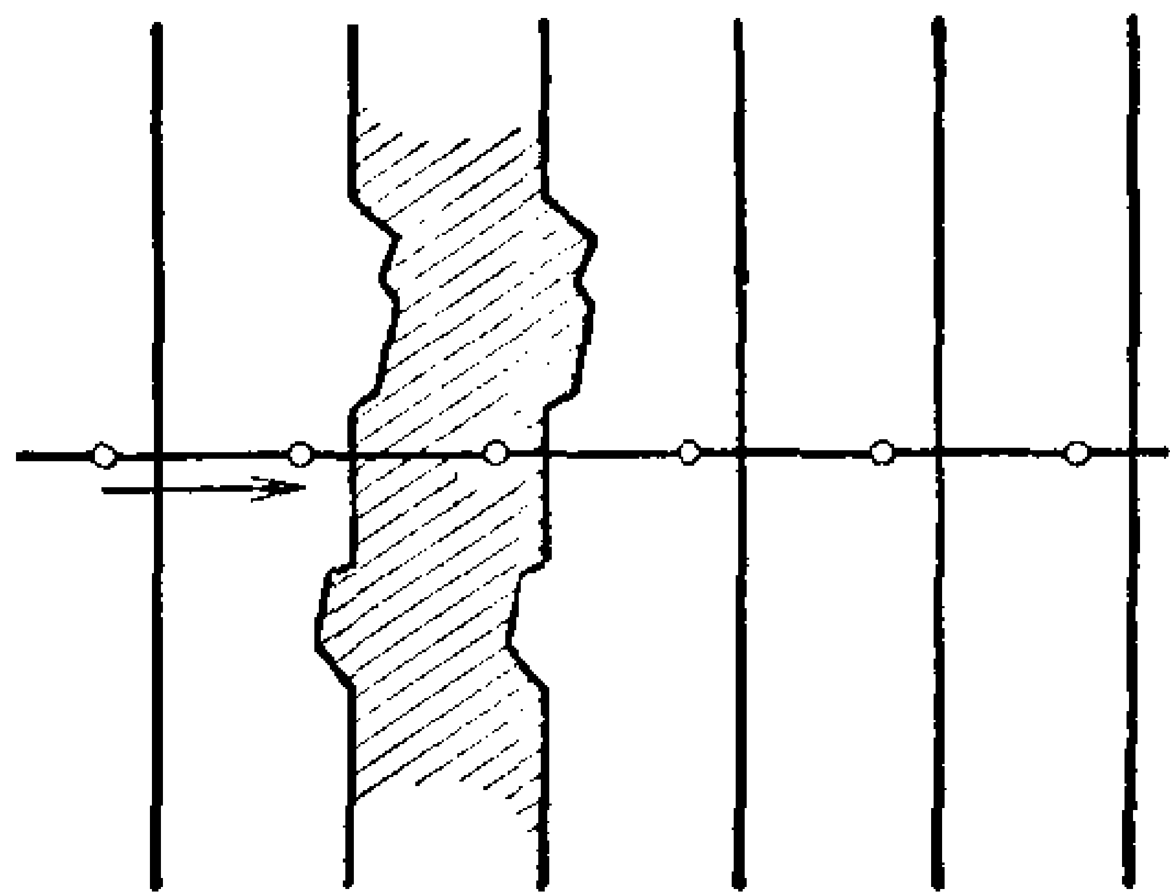


图 65

事实上，在基本区域内部不能有两个等价的点。另一方面，因为区域边界上的两条直綫是等价的，所以如果在长条之外再补加一块上去，就会使扩充后的区域含有一对等价点。不过，我們还可以随意改变基本区域的形状，而不破坏基本区域的性質，这只要在长条的一面添上一块，另一面去掉跟它等价的一块就行了（图 65）。基本区域的这种变形方法不但对于我們今后要研究的其他的群适用，即对于所有的变换群也都适用。在各种可能的基本区域中，我們时常选擇最簡单的一个。

如果把平移 a 作用于整个的基本区域，結果就产生合同的相邻长条。屡用此法，就可将整个的平面用群里的基本区域簡单而无遺漏地盖满。一般可以証明，对于任何不連續变换群，总可以将它的基本区域无重迭地連接起来，而且中間不留空隙。不过它們不一定能将平面盖满的，在本书最后一章中将会看到这样的例子（§ 36 最末一段）。

① 两条边界綫之一，比如說左边的一条，必須看作是属于基本区域的，但另外一条不能算进去，否則或者基本区域包含两个等价点，或者它还不足以作成一个完全的基本区域。

群 I, 1 不产生正則点系，这是因为跟一定点等价的各点仅作成一直綫上的点列，同正則点系所規定的第一个要求不合。

尽管如此，这种群对于正則点系的研究不是完全沒有意义的。这是說，如果我們考慮包含在任意的、不管如何复杂的不連續运动群里的所有平移的集合，而这些平移是平行于群里某一确定的平移的，則这样的平移的集合也作成一个群，因为群的两个公理都滿足。凡是包含在一个群內的群都叫做包含它的群的子群。任何不連續群的子群显然也是不連續的。由此得出这样的結論：我們所选擇的平移的集合，做成一个 I, 1 类型的群，因此它有上述結构，而不論母群的构造为何。这个結論和类似的結論我們以后要时常用到。

現在我們来討論 I, 2 中的群，它含有轉动但不含方向不平行的两个平移。这里我們必須区别这种群包含平移或者不包含平移两种情形。让我們从較簡单的情形开始——用 I, 2, α 表示沒有平移的群。我們断言：所有这样的轉动必有共同的轉动中心。証明如下：假定有两个轉动 a, b，各以不同的两点 A, B 作轉动中心，那么群所包含的运动 $a^{-1}b^{-1}ab$，由于轉角的加法定理，只能是平移或者是恒等。設 B' 是 B 在 a 的作用下的象(图 66)，則B' 与 B 不能重合，因为我們假設 B 与 A 不同，而且在轉动时除了轉动中心不动外沒有不动的点。因此假如 B'' 是 B' 在 b 的作用下的象，則 B'' 也与 B' 不同。但是很容易看出，B' 經过 $a^{-1}b^{-1}ab$ 正好搬到 B''。所以 $a^{-1}b^{-1}ab$ 不是恒等，而是一平移，这就跟群中沒有平移的假設矛盾。

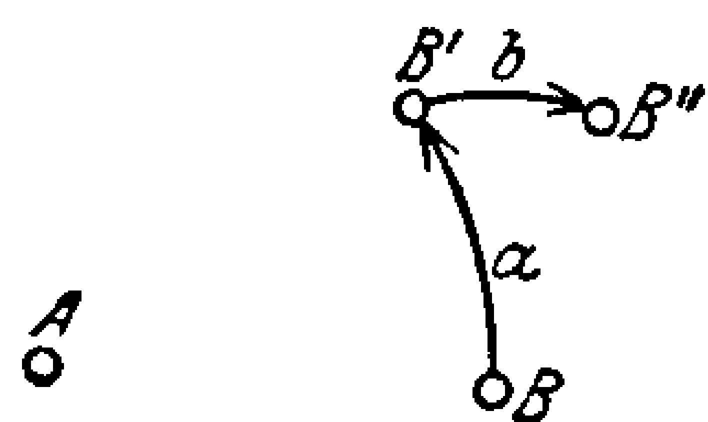


图 66

設 A 是群中的轉动中心（只有一个），設 Q 是任何其他的点。則所有与 Q 等价的点都在一圓周上，此圓的圓心为 A，并且通过 Q。因为群是不連續的，所以只能有有限个与 Q 等价的点，又因为群中

圍繞 A 的任何轉动把一个等价点变换到另一个等价点，所以这些点必定等距地排列在一圓周上(图 67)。設 Q_1 是与 Q 的两相邻等价点之一，并設等价点(包含 Q) 的总数为 n，則 $\angle QAQ_1$ 是群中最小的轉角，因此这个轉角的值必須等于 $\frac{2\pi}{n}$。群中所有的运动都是圍繞 A 經过正或負的 $\frac{2\pi}{n}$ 的倍角的轉动，而且仅有有限个几何上不同的轉动。类型 I, 2, α 的分析到此完毕。适合于这种类型的一个基本区域是一个角区域，角的頂点为 A，大小等于 $\frac{2\pi}{n}$ (图 68)。基本区域也是无限大的，而且这个群不能产生正則点系，因为每一点只有有限个等价点，不适合第 59 頁上所規定的第一个条件。

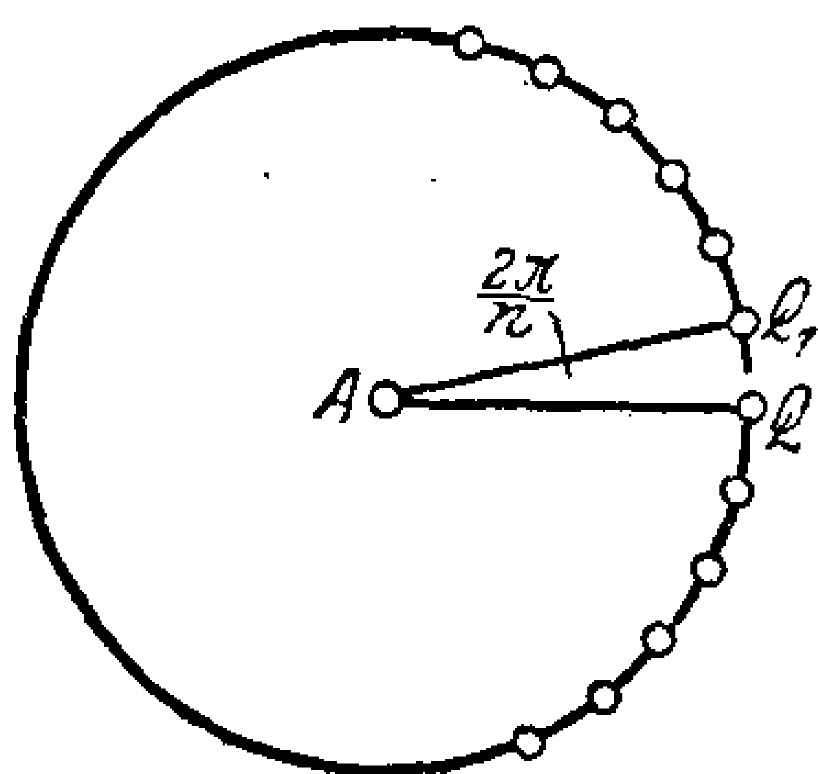


图　67

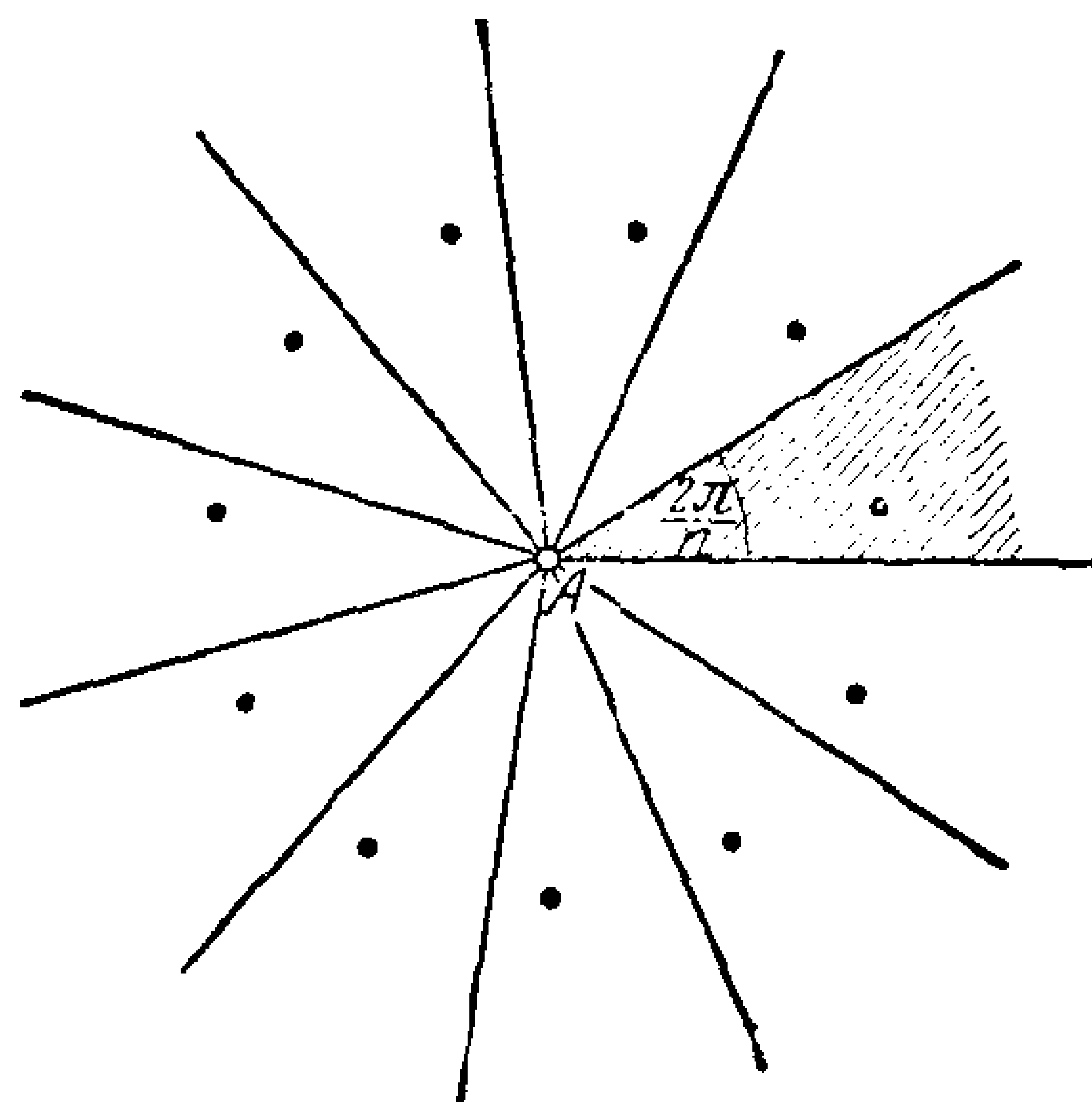


图　68

这个群跟上面所講的平行群一样，对于研究其他不連續平面运动群有重要意义。任何一个不連續运动群如果包含以 A 为轉动中心的一个轉动，則在这群中所有以 A 为轉动中心的轉动的集合是一个不連續子群，因而必为 I, 2, α 类型的。由此可知，所有的轉动的轉角必是呈 $\frac{2\pi}{n}$ 形角的倍数。这样我們可以拿整数 n 作为点 A 的特征值，并称 A 为 n 次轉动中心。

在类型 I 的群里只剩下 I, 2, β 尚未解决，在这个群里有一轉动 d 和一平移 t，其他所有的平移都同 t 平行。根据第 65 頁上的

引理 2, d 的轉角必为 π,因此按照剛才引入的术語,在这群里只有二次轉动中心。設 A_1 是这样的一个点 (图 69)。群里所有的平移必然作成类型 I, 1 的群。让我們考虑在这个子群的运动之下同 A_1 等价的点列 $A_1, A_2, \cdots$。根据引理 1(第 65 頁),所有这些点都是二次轉动中心。我們說,除了这些点之外,綫段 A_nA_{n+1} 的中点 B_1, B_2, …也都是二次轉动中心。因为,設 t 是把 A_1 搬到 A_2 的平移,再設 a_2 是圍繞 A_2 經过一个 π 角的轉动,则 ta_2 把一对点 A_1A_2 搬到一对点 A_2A_1;因为 t 把 A_1A_2 搬到 A_2A_3, a_2 把 A_2A_3 搬到 A_2A_1。因为圍繞 B_1 轉动 π 角也把 A_1A_2 迁移到 A_2A_1, 因此 ta_2 与这个轉动是等同的,所以 B_1 就是二次轉动中心。同理, 由 B_1 产生的点列,即一切的 B_n,也都是二次轉动中心。但是,除 A_n 和 B_n 諸点之外,再沒有其他的轉动中心了。事实上,假如 A 是 A_n 中的一个点,而 C 是群中不同于 A 的任意一个轉动中心 (图 70), 则 C 必是二

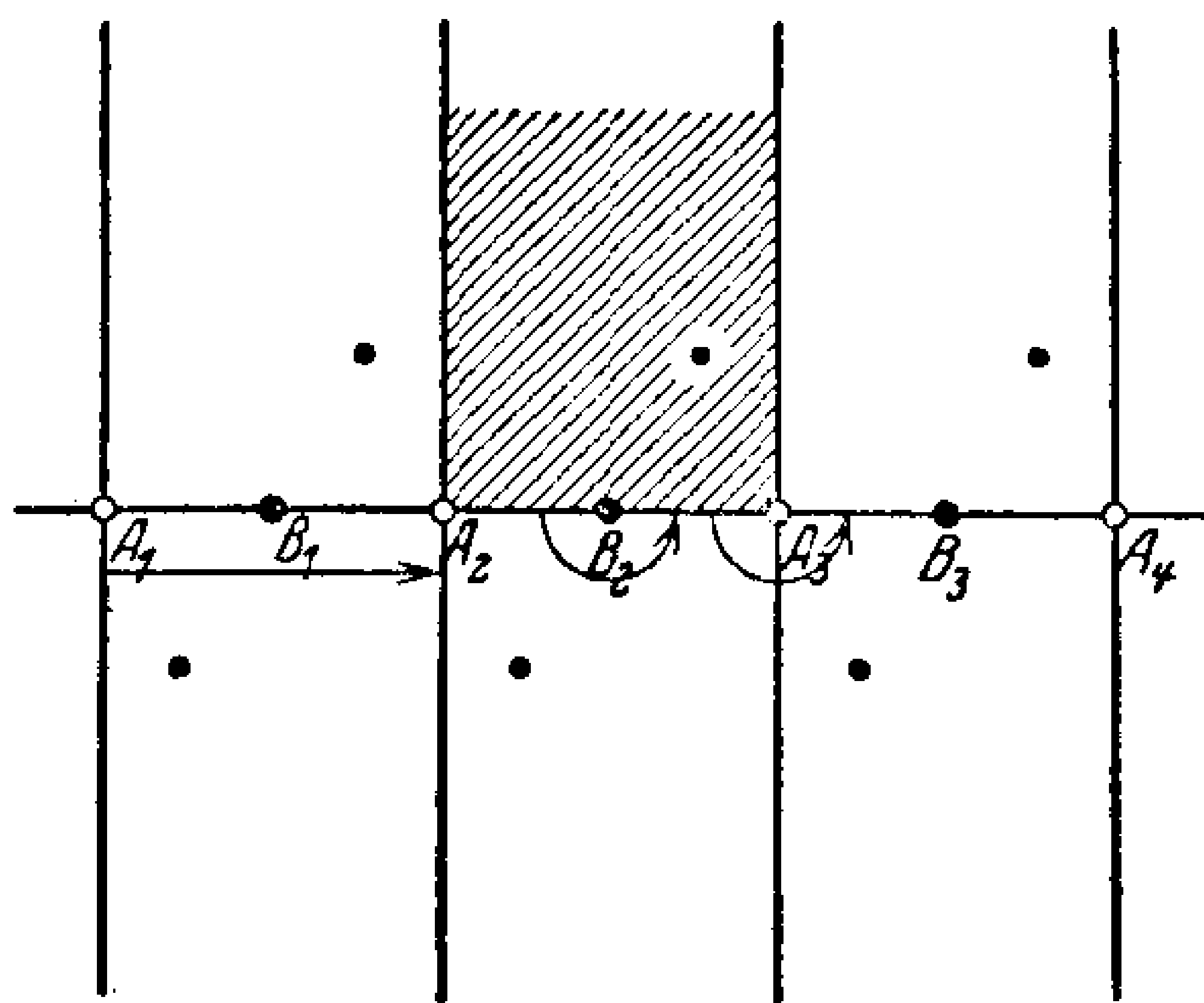


图 69

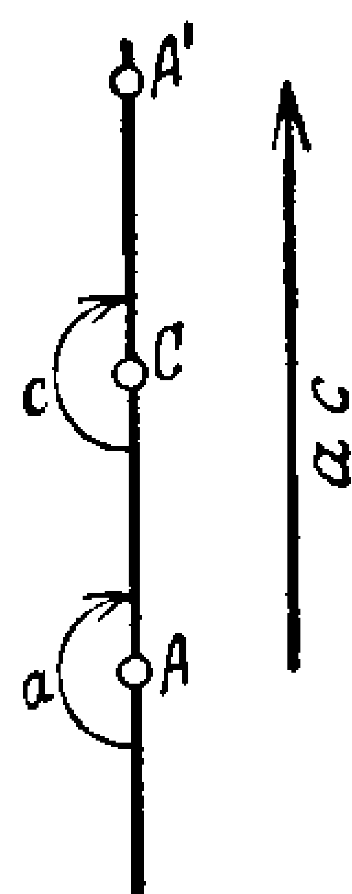


图 70

次轉动中心。設 c 是繞 C 經过 π 角的轉动, a 是繞 A 經过 π 角的轉动。考虑运动 ac。設 A' 是 A 在 c 之下的象, 则 C 是 AA' 的中点,因此运动 ac 也把 A 迁到 A'。但依据轉角的加法定理, ac 是一平移,因此 A' 是在群中的平移之下 A 的象点之一,换句話說 A' 是 A_1, A_2, …諸点之一;由于 C 是 AA' 的中点,所以必定是 A_n 或 B_n

之一。

群 I, 2, β 的分析至此完毕。在图 69 上表出两种的轉动中心和一个基本区域。应該注意,沒有一个 A_n 可以同一个 B_n 等价,因为在群的每一轉动和平移下,两种点都只在自己的点列內活动。

在图 69 上也表出了几个不是轉动中心的等价点,这些等价点作鋸齿状排列。因为这些点局限在有限寬度的长条內,它們在半徑为 r 的圓內的数目只能按照半徑的一次冪来增加,所以它們不滿足我們前面講过的正則点系的第一个要求。同前面講过的两种类型的群一样,类型 I, 2, β 的群,它們的基本区域也是无穷大的。

群里不是轉动中心的任何等价点組可以想象作两列合同而且平行的刻度。仿此,比較复杂的群可以导致合同而且平行的点格。很明显,与一点等价的几个不同的刻度或者点格的存在都要以轉动的存在为条件。事实上,在上述情形下,群里的每一轉动把一列刻度变到另一列刻度,只有包含轉动中心的那一列是例外。

因为一个点是各向对称的,不适于用来表示轉动,所以要表示在轉动之下与某一图形等价的一切图形,显然不宜用点而要用另外的簡单的图形。各向不是对称的最簡单的图形是"指針",即带有方向的点。图 71,a 和 b 表示 I, 2, β 的群中的等价的指針。依照指針的起点是一个一般的点或者是一个轉动中心,得出两种不同类型的图形。从第一种情形可以特别看出用指針方法表示的优越性:不同两列的刻度用方向相反的指針标明,同一列中的指針的方向則都相同。

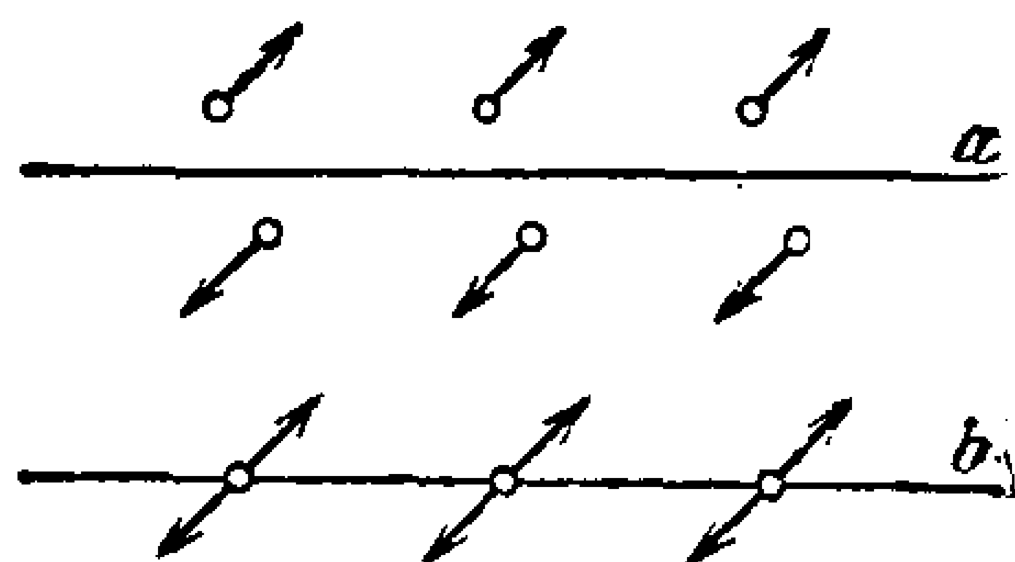


图 71

§ 12 平面运动的結晶体群，正則点系和指針系。以合同区域組成的平面結构[①]

这一节我們来研究类型 II 的群，在这种群里包含两个不平行方向的平移。类型 II 的群与类型 I 的群不同的地方，在于前者永远产生正則点系，因此，若按照第 61 頁的說法，可以称它們为結晶体群。类型 II 的群的基本区域都是有限的，这与它們必然产生正則点系的性質有关。研究这种群时我們首先又碰到平面格子，因为我們前面曾經說过，等价的点組或指針組永远做成一个格子或由多个合同而且平行的格子組成的图形。

在第 64 頁上我們說过类型 II 的群也分两类。现在先研究比較簡单的、群里包含两个不平行的平移而沒有轉动的子类 II, 1。今証明，在这种情形下与一点等价的各点常作成一平面点格。

为了証明，我們从任一点 P 出发，并且从群里选出这样的一个平移 t，使 P 移到与 P 最近的一个等价点 Q (图 72)。如此則与 t 平行的平移在直綫 PQ 上产生一列与 P 等价的刻度。由假設，还有与 PQ 不平行的平移。所以还有不在 PQ 上与 P 等价的另外的点；让我們选取与 P 最近的这样的一点 R，并設 t' 是群中把 P 移到 R 的平移。那么我們总有 $PR \geqslant PQ$。如果 S 是 Q 在 t' 之下的象点，則 $PQRS$ 是一平行四边

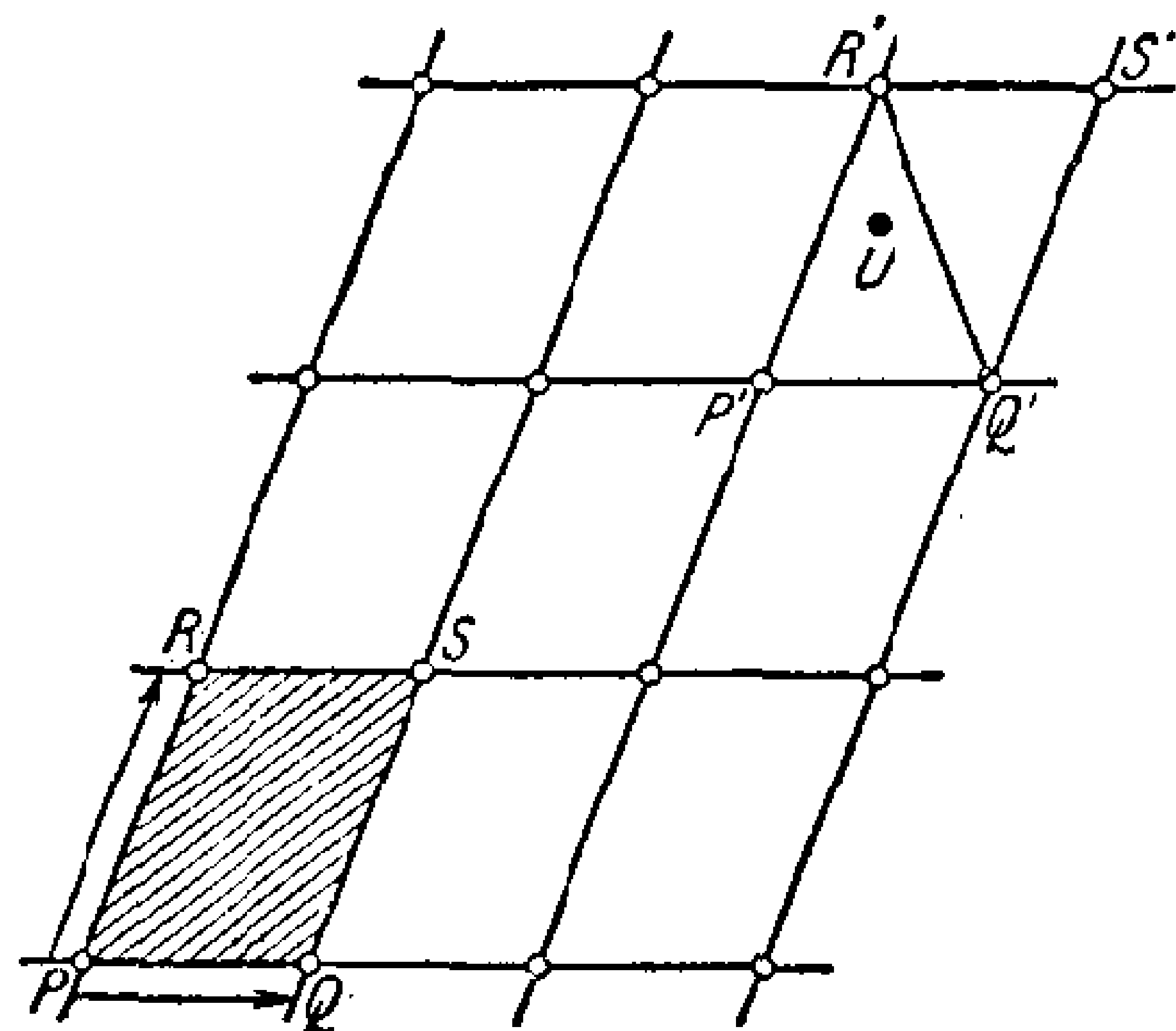


图 72

① 这里所講的理論是 E. C. 費多罗夫的，参看他的 Симметрия правильных систем фигур, Записки Минералогического общества 第二集，第 XXVIII 期，1891——俄譯本編者注。

形。很明显,所有由这个平行四边形产生出来的格子点都等价,因为每一点可以由 P 先施以平移 t(或 t^{-1}),再施以 t'(或 t'^{-1})各若干次而得到。另一方面,我們断言,这个格子完全包括了所有与 P 等价的点,也就是說,群中所有的平移都可以由結合 t 和 t' 得出。假如不然,群中将包含一平移 u,这 u 平移 P 到不属于这个格子的一点 U。那末格子中就有与 $PQRS$ 合同而且包含 U 的某一平行四边形 $P'Q'R'S'$(图 72)。于是二三角形 $P'Q'R'$ 和 $S'Q'R'$ 中必有一个,比如說第一个,包含 U。这样群就有一平移使 $P'\to U$,因为这个平移是 $P'\to P$ 和 u 結合的結果。但是这就导出矛盾,理由如下:我們知道 $PR\geqslant PQ$,所以頂点 R' 是三角形 $P'Q'R'$ 中离 P' 最远的点。所以 $P'\to U$ 这个平移将比把 P 移到 R 的平移为短,也就是比把 P' 移到 R' 的平移为短。因此平移 $P'\to U$ 将平行于 t,而 U 应該在綫段 $P'Q'$ 上。可是这样一来平移 $P'\to U$ 将較 t 更短,这跟 t 为群里最短的平移那种选法矛盾。假如 U 在三角形 $S'Q'R'$ 內,証法相同,在这种情形下只須以平移 $S'\to U$ 来代替 $P'\to U$,便得到象上面所說的矛盾。

現在我們已經証明了,在类型 II, 1 的群中运动之下,所有等价点常作成一个点格。如果这种群的运动不是施用于点而是施用于指針,那么就得到由平行的指針組成的格子(图 73)。

下面說到最后一种类型 II, 2 的群,在这种群里除了平移之外还有轉动。这种情形可以引用方才得到的結果。因为,类型 II, 2 的群也象类型 II, 1 的一样,它包括两个不同方向的平移,因而类型 II, 2 群的所有平移必定作成类型 II, 1 的子群。所以在类型 II, 2 中与任一点 P 等价的諸点,如只考虑从 P 經平移得到的,則它們作成一个格

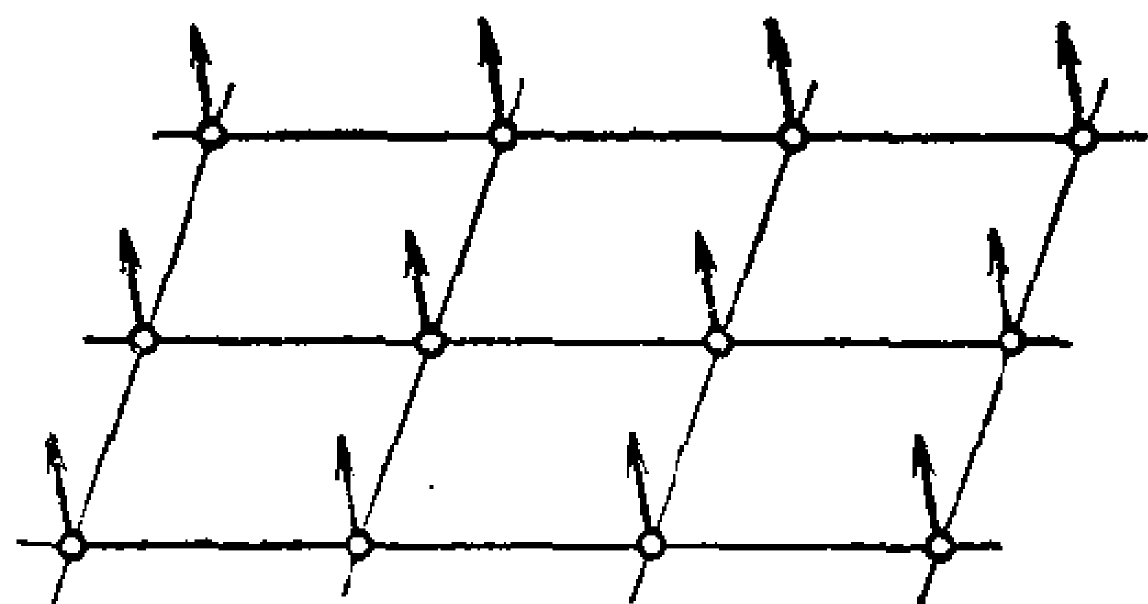


图 73

子。群中所有轉动，或者把格子变到自己，或者把格子中的某一点变到不属于格子的一点 Q。但是經过群中的平移，Q 产生另一个格子，它与 P 产生的合同而且平行，同时新格子的所有点既跟 Q 等价，也跟 P 等价。这个过程显然可以重复下去，一直到跟 P 等价的点用完为止。但用这种办法只能得到有限个不同的格子，否则群便不是不連續的了。由此可見，类型 II, 2 中只有数目相对地不大的几个群，同时这几个群对应的点系总是由平行而且合同的格子組成的。

我們按照群里的轉角的大小把类型 II, 2 分类。所有的轉角必須作 $\frac{2\pi}{n}$ 的形状，这里的 n 是一个整数，因为以群中的某一点为轉动中心的轉动作成一个 I, 2, a 类型的不連續子群。現在我們証明，n 的值除 1 外只能取 2, 3, 4, 6 四个值。为了証明，我們在群里选取一个最短的平移 t，設 A 是群里的 n 次轉动中心（图 74），并設 A 經过 t 移到 B。設繞 A 轉动了 $\frac{2\pi}{n}$ 后，B 移到某一点 B'。根据第 65 頁上引理 2 得知群里也包含把 A 搬到 B' 的一个平移 t'。运动 $t^{-1}t'$ 显然把 B 搬到 B'。从轉角的加法定理，知 $t^{-1}t'$ 是一平移。因为我們选擇 t 是最短的平移，因此 $BB' \geqslant AB$。所以 $\angle BAB' = \frac{2\pi}{n} \geqslant \frac{\pi}{3}$，于是 $n \leqslant 6$。下面只要証明 $n=5$ 时不成立就好了。証明用反証法。假定 A 是五次轉动中心（图 74）。設繞 A 經过轉角 $2\times\frac{2\pi}{5}$ 的轉动把 B 搬到 B''。这样，群里将包含把 A 搬到 B'' 的一个平移 t''。但是因为平移 $t''t$ 显然把 A 移到如图所画的 C 处，又因为距离 AC 比 AB 为短，所以群里就将包含比 t 更短的平移，这跟 t 是群里最短的平移矛盾。

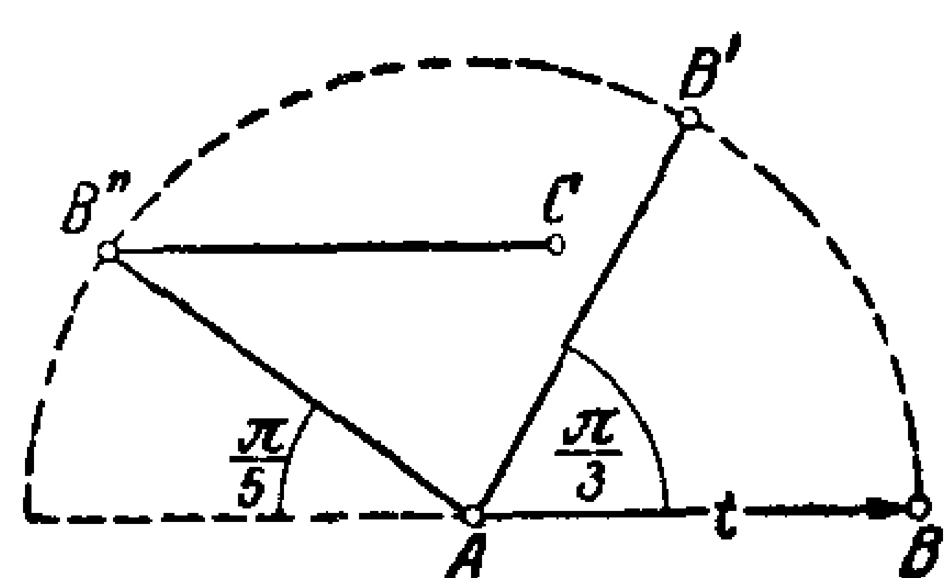


图 74

至此我們知道,类型 II, 2 的群只能包含 2, 3, 4, 6 次的轉动中心。設 φ 是这样一个群的最小的轉角,那么就得到下列四种情形:

$$\text{II, 2, }\alpha:\quad \varphi=\pi,$$

$$\text{II, 2, }\beta:\quad \varphi=\frac{2\pi}{3},$$

$$\text{II, 2, }\gamma:\quad \varphi=\frac{\pi}{2},$$

$$\text{II, 2, }\delta:\quad \varphi=\frac{\pi}{3}。$$

下面将要看到,每种情形恰恰对应一个群。

II, 2, α。在这一群里至少有一个二次轉动中心 A。群里的平移子群把 A 变到一个格子中的各点,因此所有这些点都与 A 等价,而且是二次轉动中心。設 $ABCD$ 是格子中的一个母平行四边形(图 75)。現在可以应用前面討論 I, 2, β 类的群时的推理(第 69 頁)。同样可以得出,每两个格子点所連接的綫段的中点也是二次轉动中心;反之,每个二次轉动中心也是这样綫段的中点。考虑 AB 的中点 Q, AC 的中点 P, BC 与 AD 的中点 T。在这几个中点里沒有两个是等价的。又,方才說过,这几个中点都是二次轉动中心,因而由它們产生的点格和原来的点格一起作成群中的所有的二次轉动中心。这样說来,一共有四种不同的轉动中心。繞这些点的轉动和保留点格 $ABCD$ 不变的平移是群中所有可能的变换。因为我們假定除掉二次轉动中心外,再沒有别的轉动中心了。显然可以取三角形 ABC 作基本区域。

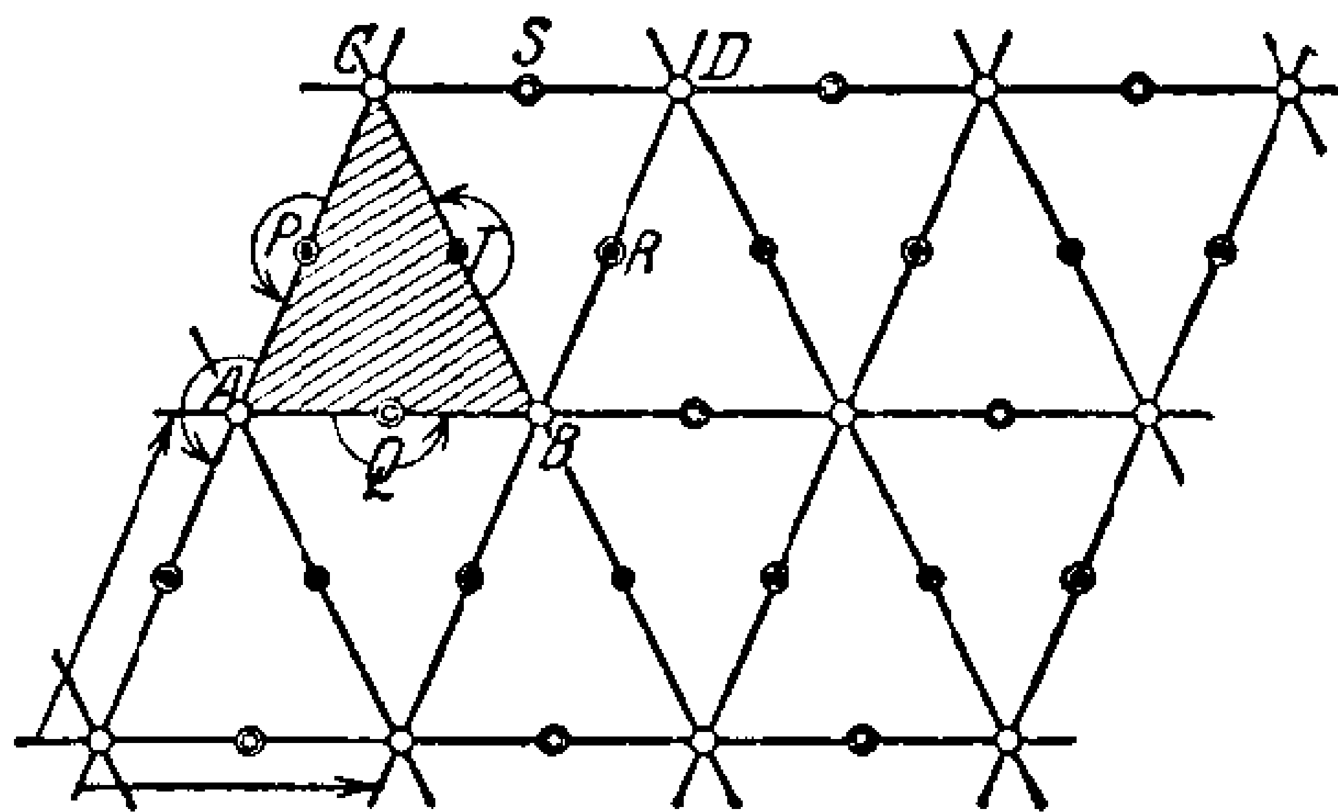
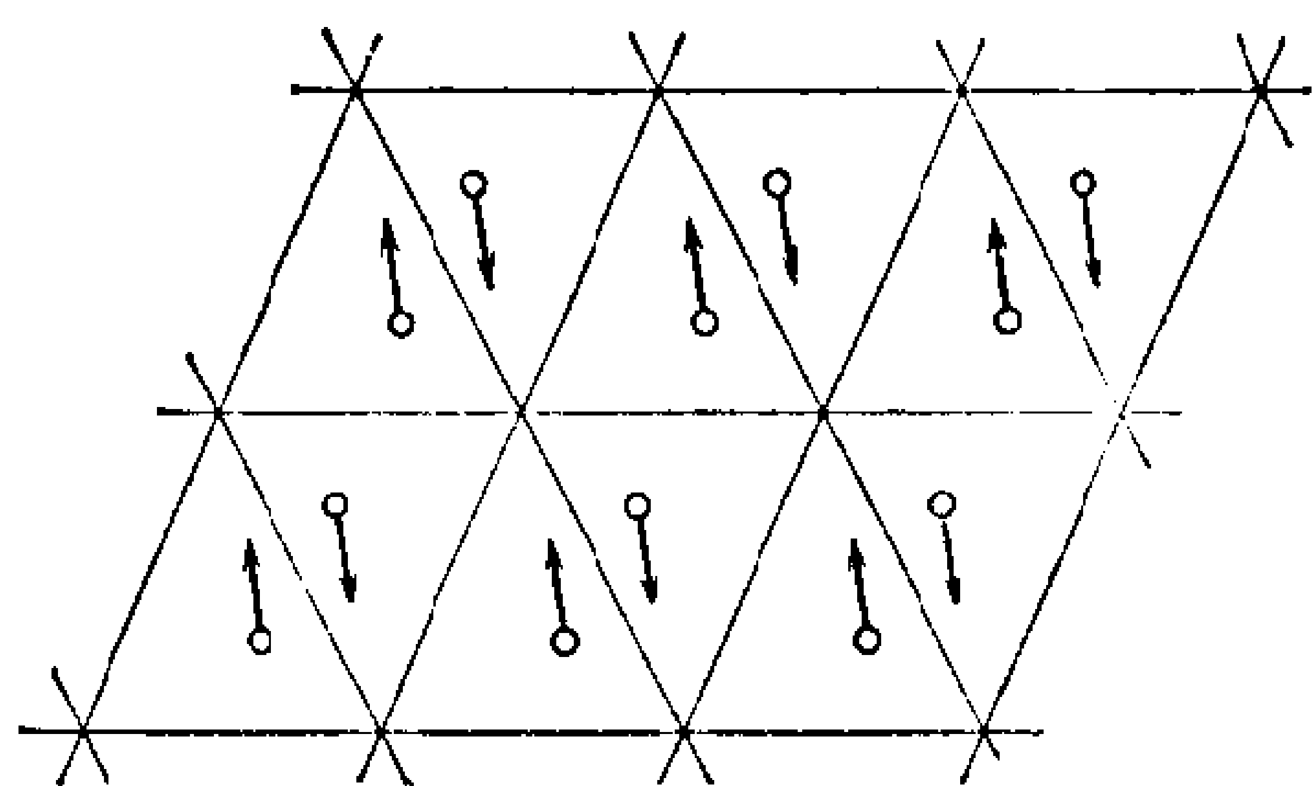
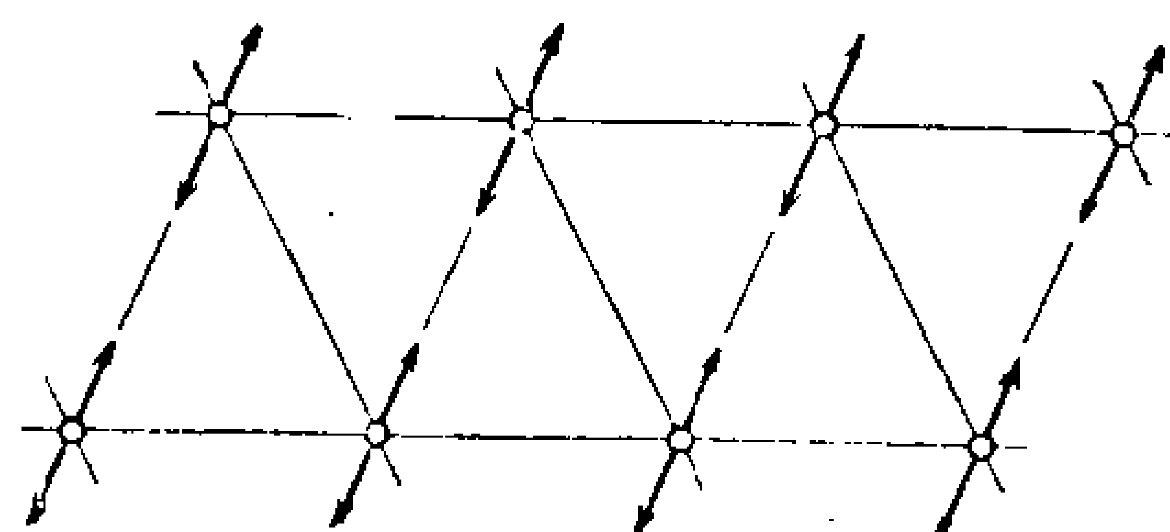


图 75

图 76 和 77 都表示等价指針組成的图形，所不同的是，在图 76 中，指針的起点是一般的点，在图 77 中指針的起点是轉动中心。在前一种情况下，是两个互相交錯的格子，它們的区别在于指針的方向相反。在后一种情况下，两个格子重合为一，因为对于每一个轉动中心各有两个指針。如果所說的不是指針，而是点，則每一个图形表示一个正則点系。但在这时图 77 的指針組和图 72 的一般


图 76


图 77

的平面点格就沒有什么区别了。如果我們反过来欲求属于一般点格的迭合运动群，則得到的不是 II, 1，而是 II, 2, α，因为图 75 的平行四边形 $ABCD$ 可以任意选取，同时这个平行四边形产生的格子在群的运动之下总要变到自己。在这里如用指針来代替点能够把不同的情形区分得更清楚一些。

II, 2, β。 按照題中的假設，$\frac{2\pi}{3}$ 是群里最小的轉角。現在我們断言：除了轉角 $\pm\frac{2\pi}{3}$ 之外，再沒有别的轉角。假如不是这样，只有 π 是别种可能的轉角。但是由于轉角的加法定理，知道經过 π 角的轉动再加上經过 $-\frac{2\pi}{3}$ 角的轉动，将得出 $\frac{\pi}{3}$ 角的轉动，这种轉动是不可能在这个群里出現的。这样說来，群里确实只有三次轉动中心。

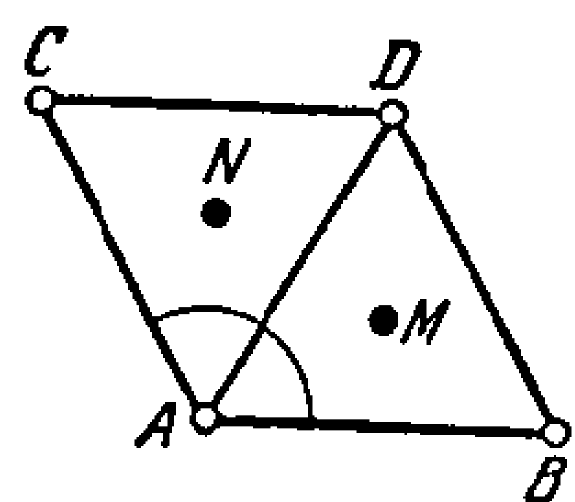


图 78

設 A 是一个三次轉动中心（图 78），并設 $A \to B$ 是群里最短的

平移。如果 B 繞 A 轉了 $\frac{2\pi}{3}$ 时后到 C，则根据引理 2，平移 $A\to C$ 也属于这个群。对应平移子群的点格可以由平行四边形 $ABCD$ 产生，因为由于作图，平行四边形内再沒有其他的格子点。对角綫 AD 分 $ABCD$ 为二个等边三角形。因此群的平移必定产生相当于最紧密圓形堆积的点格，这种点格不象类型 II, 2, α 中的那样可以任意选取（相仿地，在下面的两种类型里我們会看到，由平移产生的点格也必須是一种特殊的形式的）。把 $AB\to AC$ 的轉动 d 和 $A\to B$ 的平移 t 結合起来的 dt 把 AB 搬到 BD（图 78）。因此，运动 dt 必是这样的一个轉动 d'，轉动中心 M 是三角形 ABD 的中点，轉角为 $\frac{2\pi}{3}$。由此可見，M 是群的一个三次轉动中心。其次，$d''=td'$ 把 AC 經过 BD 搬到 DA，所以 d'' 是繞三角形 ACD 的中心 N 經过 $\frac{2\pi}{3}$ 的轉动。由此可見，N 也是群的一个三次轉动中心。跟 A 一样，M 和 N 也产生点格，点格的所有点都是三次轉动中心。現在我們証明，由 A, M, N 产生的点格包括了一切可能的轉动中心。要証明这句話，只要証明两个三次轉动中心 E, F 間的距离不小于 AM 即可。很明显，运动 $d^{-1}d'$ 是平移 t，还有，圍繞 E, F 作相等而相反的轉动，其結果也是一平移，而且移出的大小对于距离 EF 的比等于平移 t 的大小对于距离 AM 的比。因为按照假設，群里的平移不得短于 t，因此 EF 也就不得短于 AM。

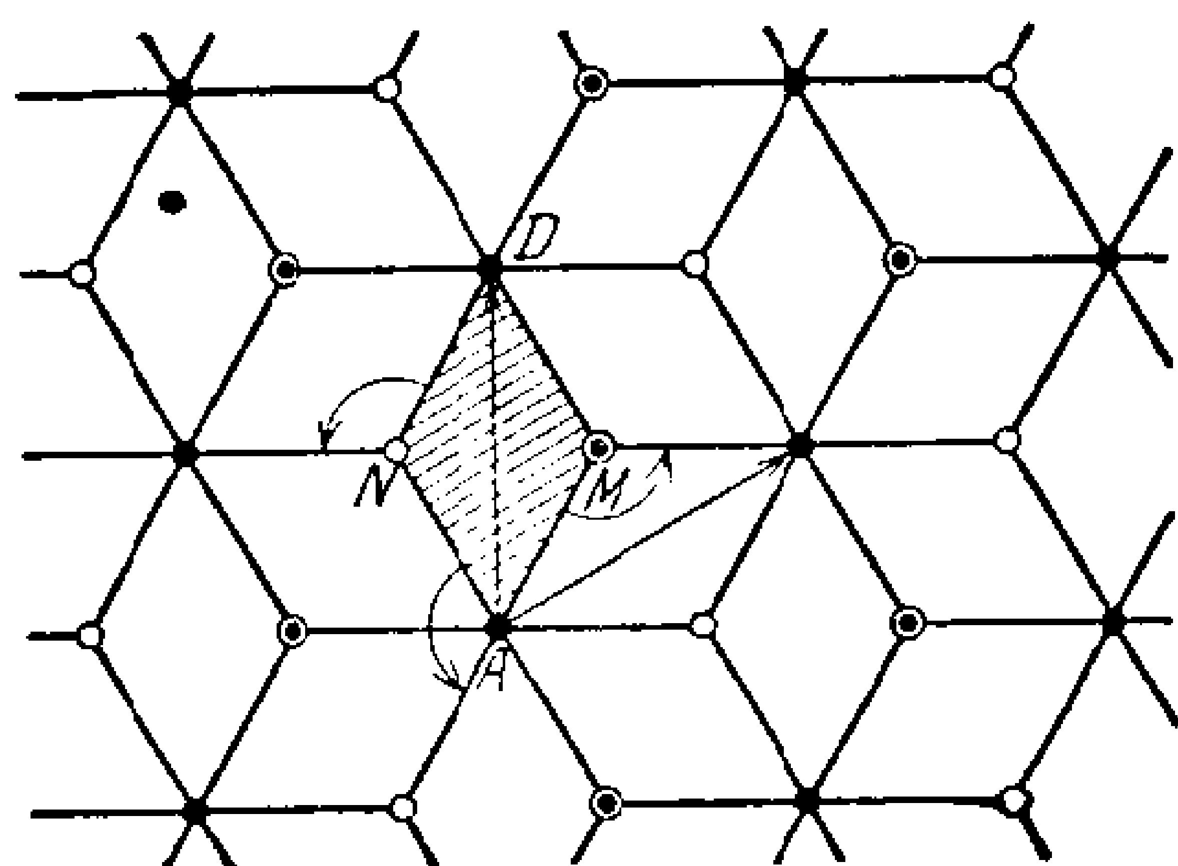


图 79

于是我們确实証明了在群里除了 A, M, N 所产生的三組点格外，再沒有其他的轉动中心。因为繞中心 A 的轉动把这三組点格中的每一組变到自己而不是把这三組中的一組变到另一組，所以 A, M, N 不是等价的点。因而类

型 II, 2, β 的群有三种不同的轉动中心 (图 79)。可以看出, 每一組的点都是簡单复盖平面的正六边形組的中心;而且其他两种轉动中心交錯地落在六边形的頂点上。因此我們得到用一定的方式相互迭置着的三組正則六边形。附带說說, 这个图形可以解释为石墨构形(第 57 頁图 56)的三个相邻层的正投影。

在图 79 中, 菱形 $AMND$ 被选作一个基本区域①。在这張图上也指出了产生平移点格的那两个平移。

起点不是轉动中心的等价指針系組成三組錯綜排列的格子, 各以指針的一定方向来識别 (图 80)。这三組格子的母平行四边形沒有画出来,免得把图形弄得太乱了。

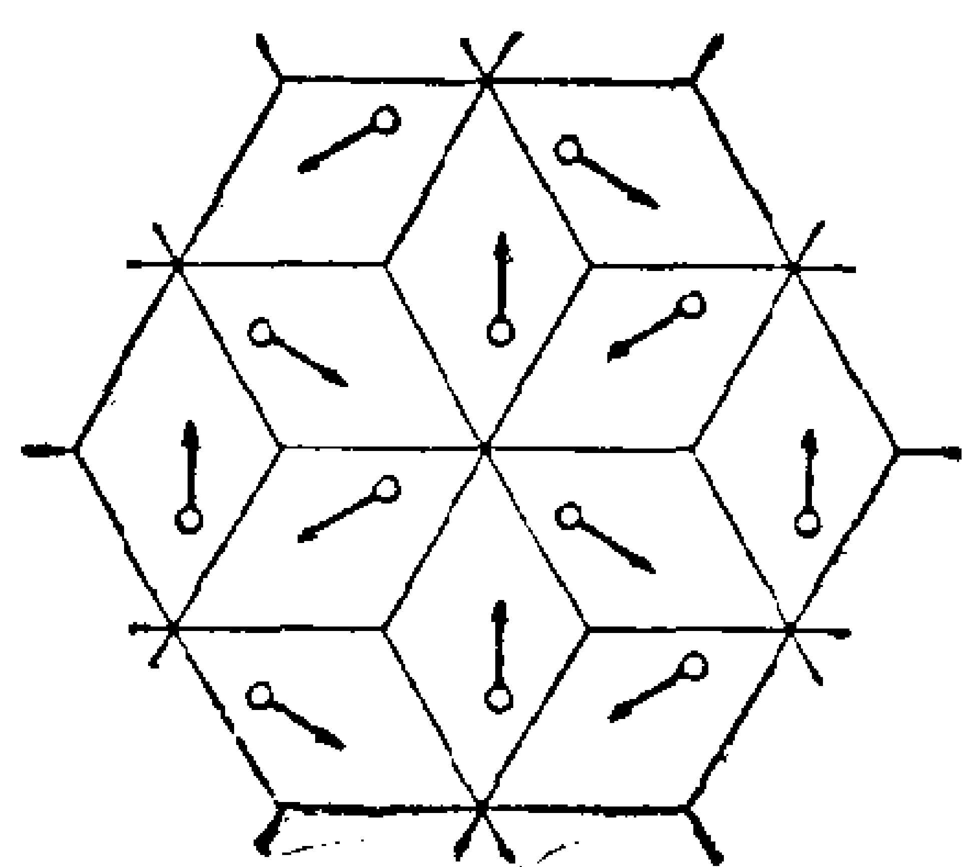


图 80

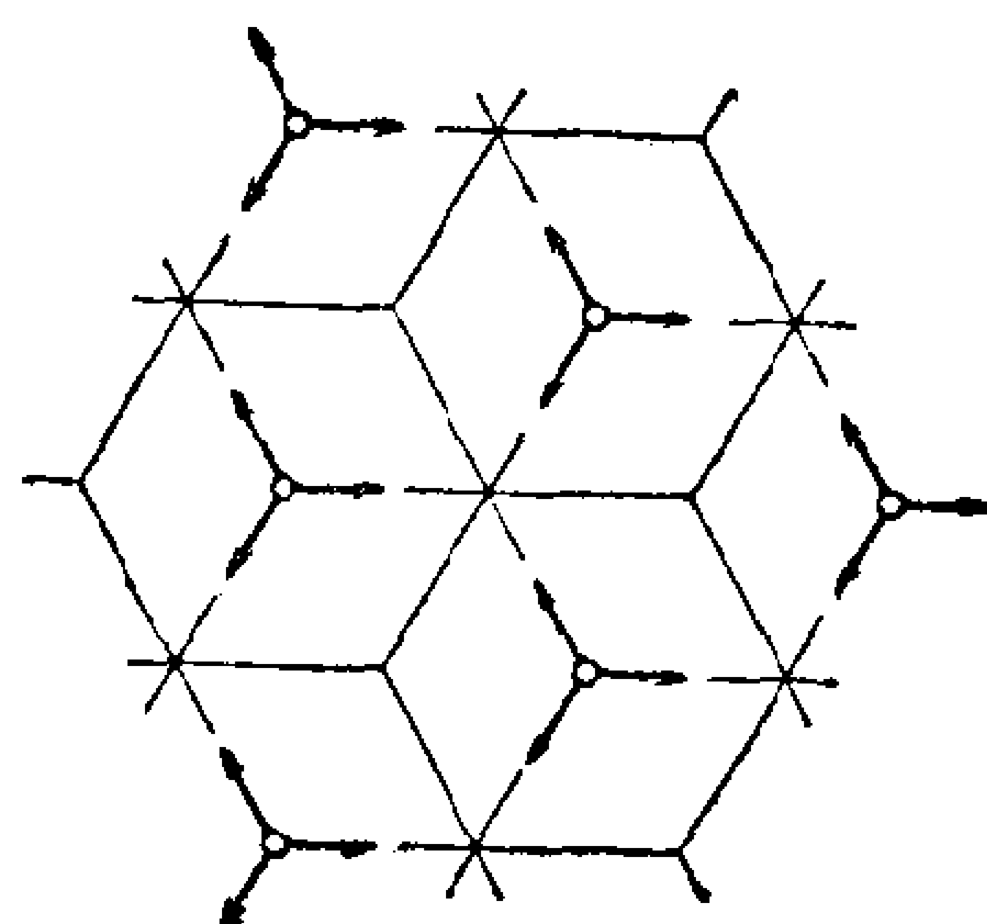


图 81

如果指針的起点是轉动中心,三組点格重合而为一,因为每一点必須带有三个指針。

II, 2, γ。 在这个群里最小的轉角是 $\frac{\pi}{2}$。这样就有二次和四次轉动中心。再沒有別种轉动中心了。因为假如有的話, 应用加法定理,結合 $\frac{2\pi}{3}$ 的轉动和 π 的轉动,便得出 $\frac{\pi}{3}$ 的轉动,这跟我們假設不能有比 $\frac{\pi}{2}$ 再小的轉动矛盾。

以下討論的步驟, 与上面的情形相同。設 A 是任意的一个四

① 这种毗連的菱形組常見于蜂房的构造。

次轉动中心,$A \to B$ 是群里一个最短的平移(图 82)。如果把 B 繞 A 轉过 $\frac{\pi}{2}$ 到 C, 則平移 $A \to C$ 也在这个群里。所以群的平移点格可由正方形 $ABCD$ 产生,因为这个正方形的四頂点是格子点,而此正方形不包含其他的格子点。因此同上面的情形一样,平移格子不能任意选取,而必須有一种特別的对称的形式。如果我們在平移之外,再加上轉角为 π 的而非 $\frac{\pi}{2}$ 的轉动,則得一子群,这个

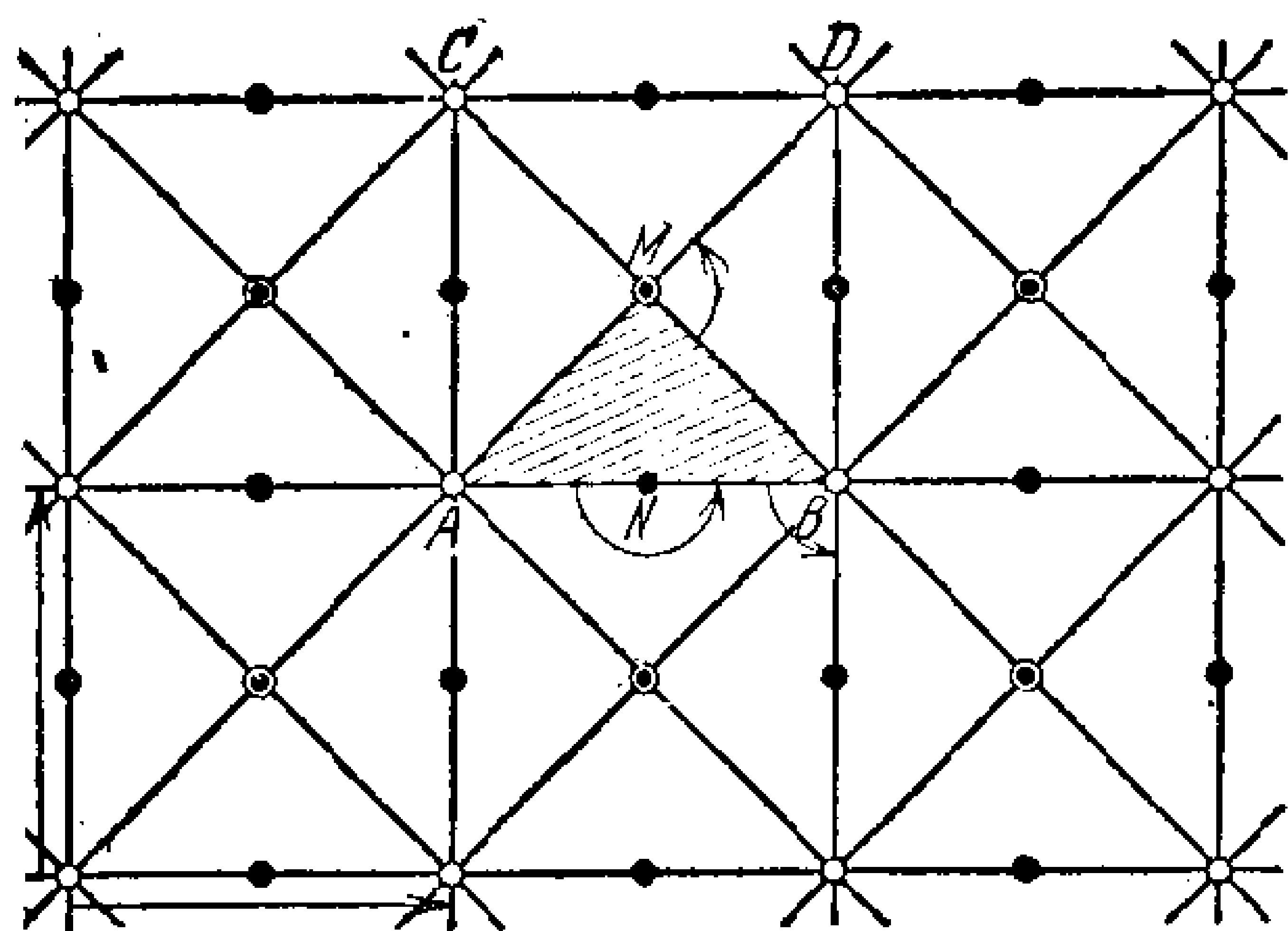


图 82

子群必为 II, 2, α 类型的。正方形的中心点,例如 M, 边的中点,例如 N,以及正方形的四頂点,一同作成子群的全部轉动中心。这些点必定包括了全群的二次中心和四次中心,因为这些中心都是經过 π 角的轉动中心,而这样的中心必然作为二次轉动中心而出現在子群中。設 d 是轉动 $AB \to AC$, t 是平移 $A \to B$, 則 $d'=dt$ 当然把 AB 迁到 BD, 因而是繞 M 經过 $\frac{\pi}{2}$ 的轉动。所以所有正方形的心不仅是二次的轉动中心,也是四次的轉动中心。現在我們可以仿照上面情形的同样理由,断定再沒有別的四次轉动中心了。事实上,$d^{-1}d'$ 卽是群里最短的平移 t; 因此两个四次轉动中心的距离不能小于 AM, 所以除了由 A 和 M 产生的两种的格子点外,再沒有別的四次轉动中心。因为我們考虑过的每一运动都将这两个格子变到自己,而不是彼此轉变,A 和 M 不能等价。另一方面,可以看到,所有的二次轉动中心都是等价的。这样說来,有一种二次轉动中心,組成交錯排列的两个正方形格子,有两种四次轉动中心,每种組成一个正方形格子。三角形 AMB 可以选作一个基本

区域。

一般的点的指針系是由四个正方形格子組成的,每一个由一定的指針方向来識别(图 83)。一个二次的轉动中心产生两个格子,其指針的方向不同(图 84)。一个四次轉动中心产生唯一的格子(图 85)。如果箭头象图 85 那样地两两相对,则图形可以解释作平面上同类的四价原子的正則排列。

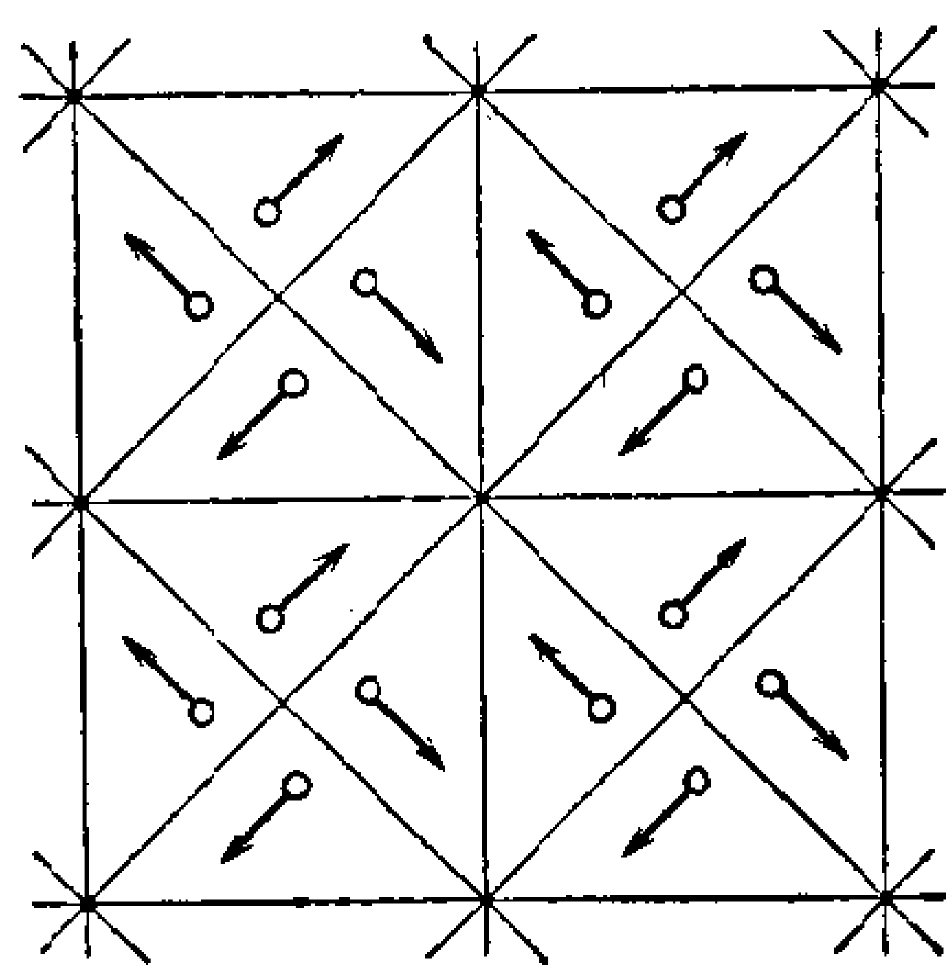


图 83

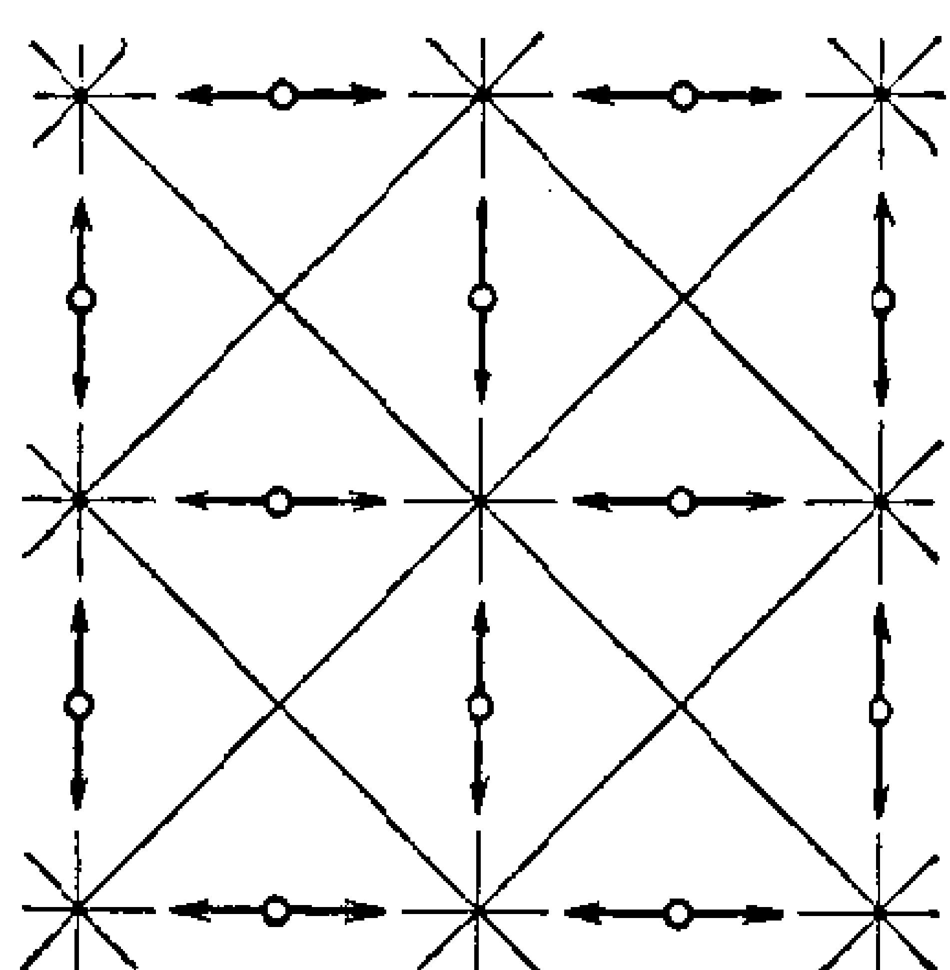


图 84

II, 2, δ。在这种情形下,轉动种类最多。因为这里既然有六次轉动中心,所以二次和三次的也可能出現。但是四次的是不許可的。因为,如果群里包含 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{3}$ 的轉动,当然也包含 $\frac{\pi}{6}$ 的轉动,但是这种轉角不可能在任何平面結晶体运动群里出現。

設 A 是群里的一个六次轉动中心(图 86)。首先我們考虑由平移和經过 $\frac{2\pi}{3}$ 角的轉动組成的子群。

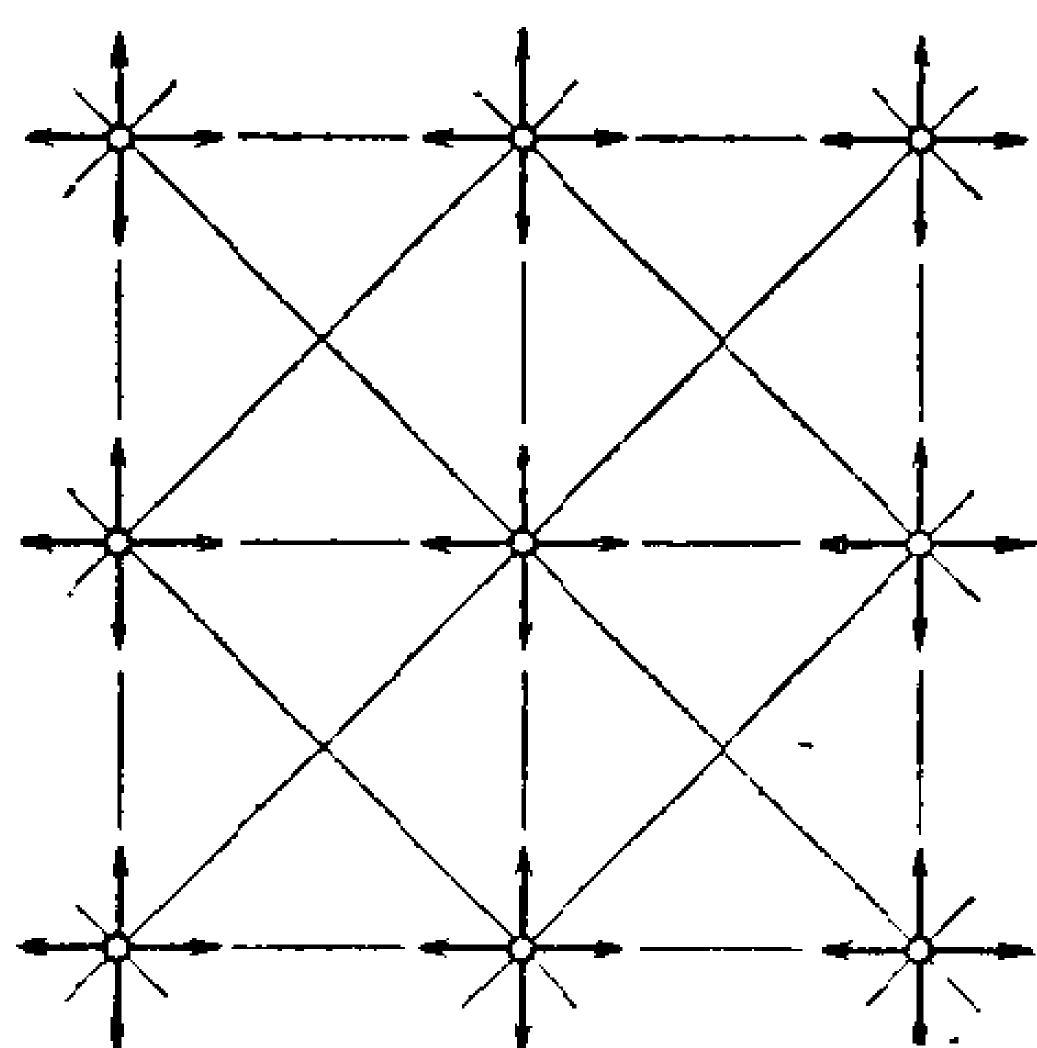


图 85

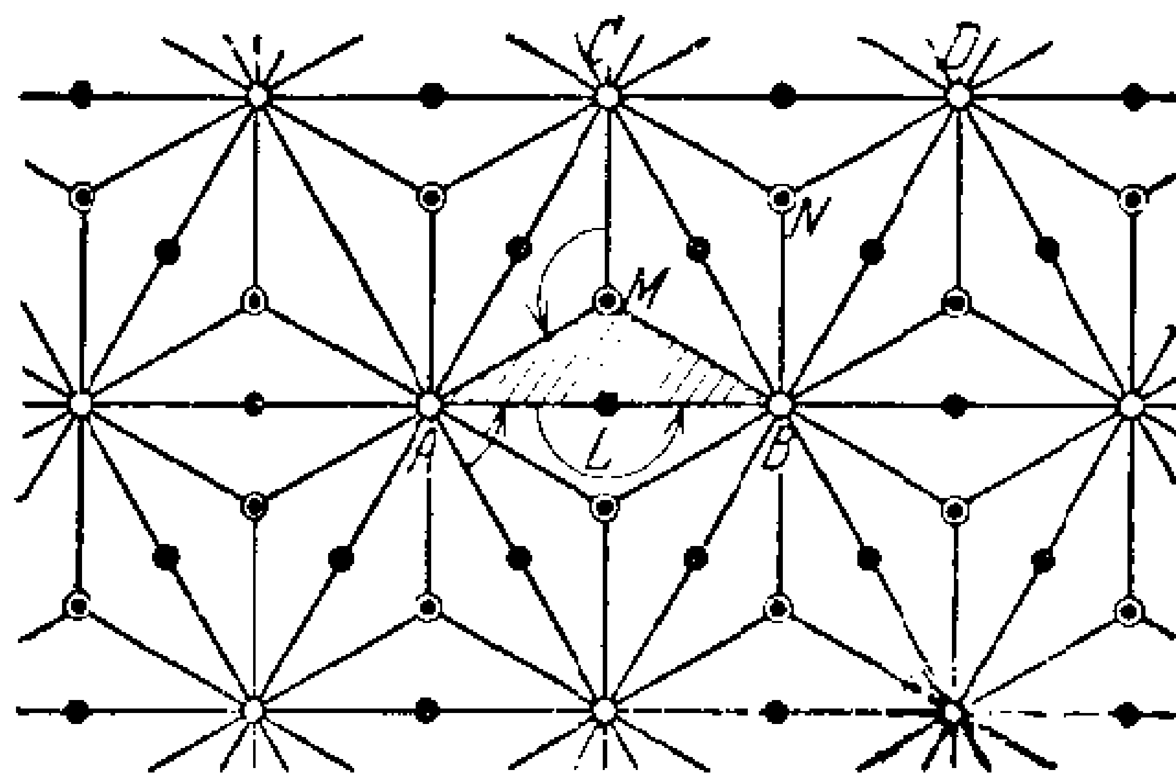
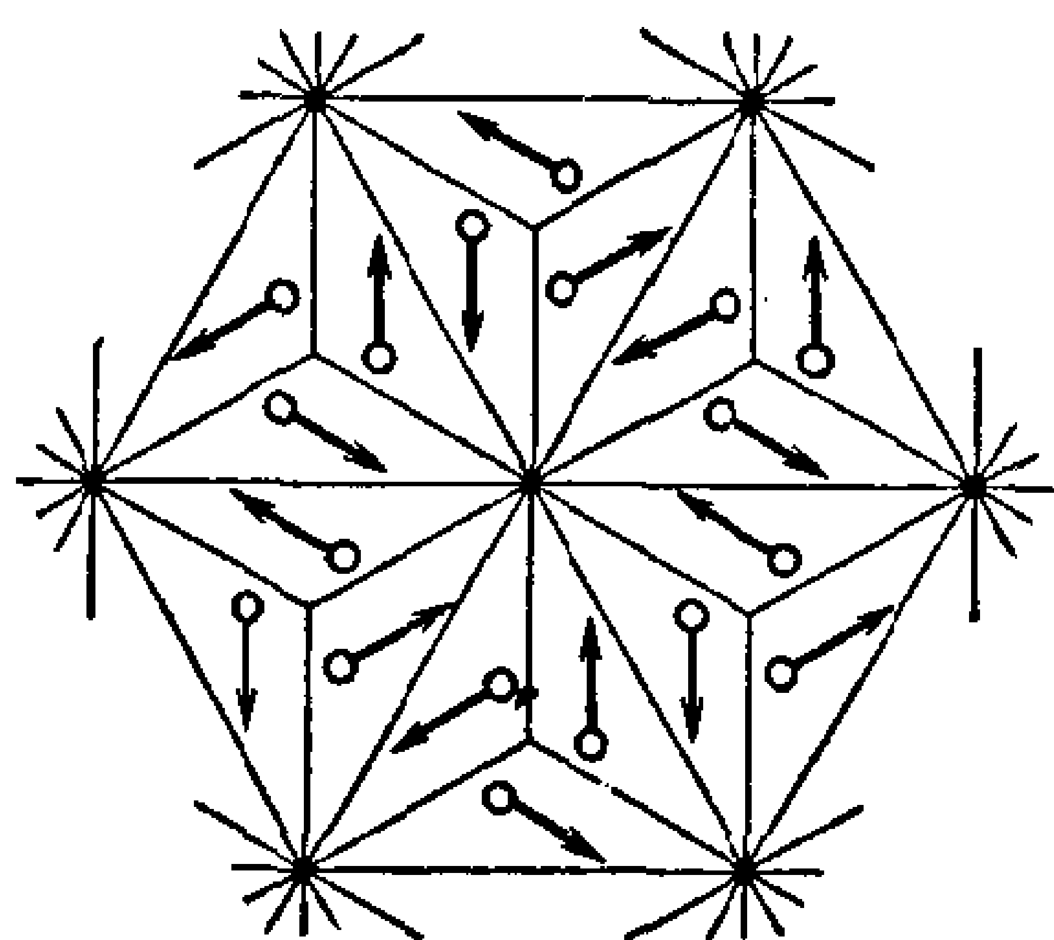


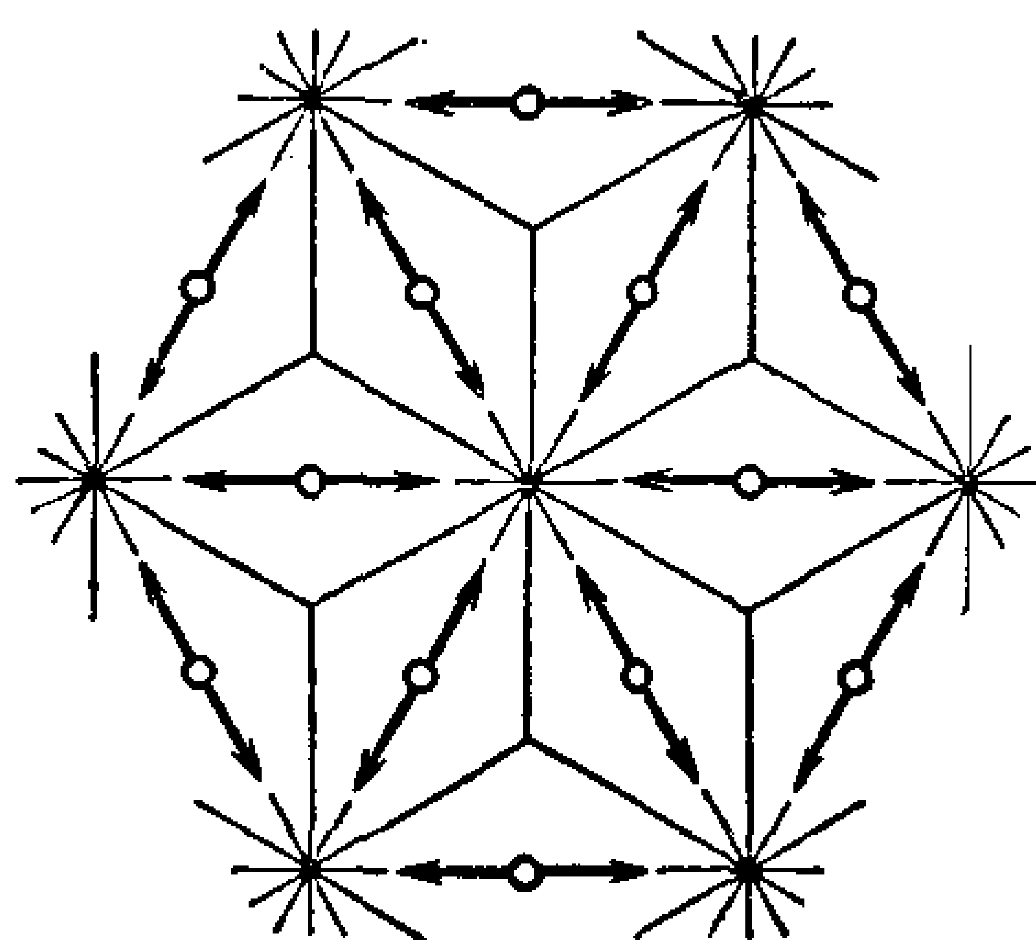
图 86

这个子群的构造我們在 II, 2, β 里已經見过了。我們知道 A 是子群里的三次轉动中心。这个子群的平移格子是等边三角形形状的，而且不仅三角形的頂点，比如 A, B, C 是三次轉动中心，还有三角形的中心，比如 M，也是三次轉动中心。因为子群里已經包括了母群里的所有平移，所以母群里的平移格子与子群里的相同。但是在母群里，A 是六次的，而不是三次的轉动中心，所以由 A 产生的所有的格子点也必是六次轉动中心。假如群里还有其他的六次轉动中心，它們只能是某些三角形的中心，因为所有的六次轉动中心必定已經在子群里作为三次轉动中心考虑过了。因为繞 A 轉动 $\frac{\pi}{3}$ 和繞 C 轉动 $-\frac{\pi}{3}$，結果是平移 $A \to B$，又因为群里沒有比这更小的平移，因此两个六次轉动中心的距离不得小于 AC，所以除了由 A 点产生的格子点外，不存在其他的六次轉动中心。这样說来，三角形的中心仅是三次轉动中心。群里再沒有别的三次轉动中心，因为所有的三次轉动中心都已在子群里考虑过了。跟 II, 2, β 的情形不同，所有的三次轉动中心都等价。比如点 M，可以繞 B 轉动到 N。

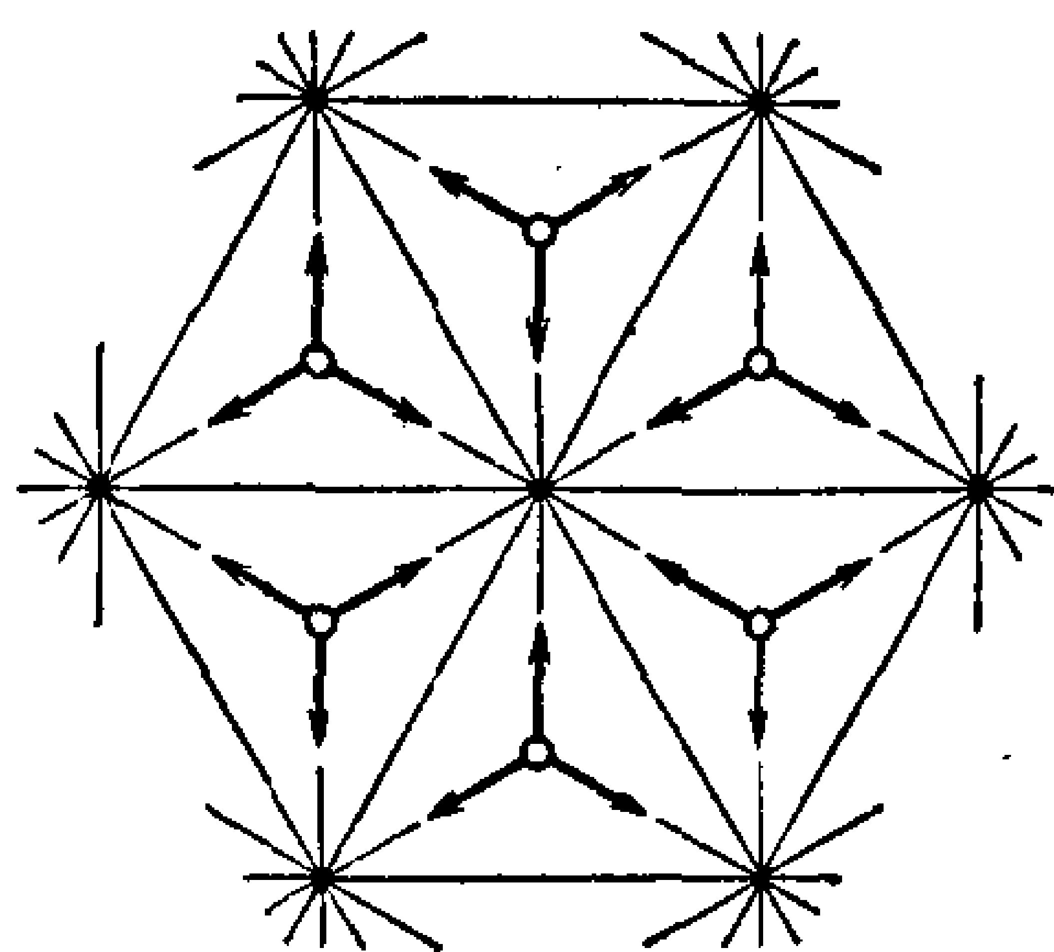
要想找出所有的二次中心，我們用相同的办法：考虑由平移和經过 π 角的轉动組成的子群。由情形 II, 2, α 的討論可知，格子的各个基本平行四边形的頂点、它們的中心、各边的中点，亦即所有等边三角形各边的中点，都是經过 π 角的轉动中心。三角形的頂点已經作为六次轉动中心用过了。因此只剩下作为二次轉动中心的三角形各边的中点。我們知道它們是等价的。这样說来，二次、三次、六次轉动中心各有一种。AMB 是群的一个基本区域。

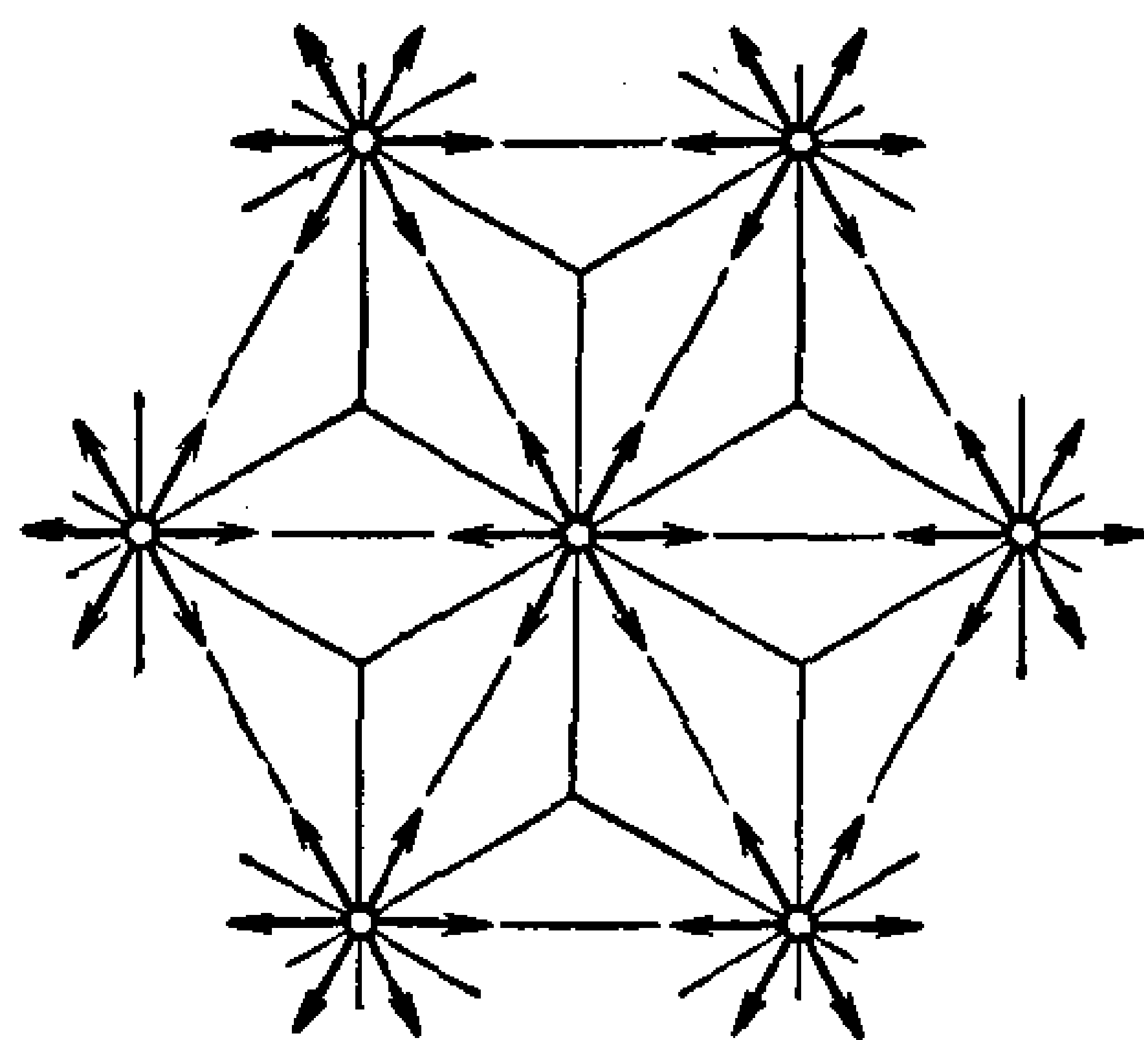
一般位置的指針系是由六个彼此交錯的格子組成的，每个格子的指針各有一定的方向。在图 87 中，每一个格子由三个一組的平行指針表示，各組指針的起点是一等边三角形的頂点。如果从一个二次轉动中心出发（图 88），則格子两两重合，成为三个格子。这


图 87


图 88

种图形代表平面上一类六价和一类二价的两类原子相結合的可能的正則排列。把所有的指針轉过 $\frac{\pi}{2}$，得到二价和三价原子結合的排列。三次轉动中心产生的指針系由两个格子組成(图 89)。若指針的方向如图所示，那末，图形表示三价和六价的原子排列。六次


图 89


图 90

轉动中心产生的指針系只做成一个格子(图 90)。若指針的方向如图所示，图形可以解釋作同类的六价原子在一平面上的正則排列。

到此为止，我們已經完全解决了§9中所提出的問題。我們已經造出了平面上所有可能的結晶体运动群，从而知道这样的群只有五种。最一般的正則点系和指針系是应用这些群于一般位置的

点而得到的。事实上，对于复杂的群来說是由轉动中心組成的点系，如以簡单的群作基础，可以化为一般位置的点系。与此相反，以轉动中心为起点的指針系产生新的构形。

解决了上述問題，同时也就解决了另一有关問題，即求出用各种不同的方式把平面分成合同的有限的片段，使适合条件：整个构造在一个迭合运动之下不变，并且总有一个迭合运动使任一已給片段搬到任一别的片段。这些迭合运动的群必是不連續的，因此必是結晶体群，因为在一圓內片段的数目按半徑的平方增加到无穷。所以只有两种可能性，或者除去恒等运动外沒有迭合运动保持一个片段不变，在这种情形下，这个片段就是一个基本区域；或者有一些片段它們在一个迭合运动之下不变。在这种情形下，这一类的一切运动作成一个不連續的子群；而且显然这个子群不含任何平移，因而是由繞一固定点的多个轉动組成的（因此这个子群的类型应为 I, 2, α）。在这种情形下，各个片段具有中心对称性，而且都是由許多基本区域組成的。由合同的正六边形或者正方形拼成的平面是这种情形的例子。这种排列方式常用来拼砌花磚地板。

另外一个比較难的“拼磚”問題是：要找用合同的有限的磚鋪滿平面的可能結构，但不要求这結构有迭合运动。

§ 13．空間結晶体类及运动群。鏡面对称群和点系

在空間，也象在平面上一样，只有有限个結晶体运动群，但在数量上空間的比平面的多得多。要想决定空間有哪些群，我們也象以前一样，先用几何方法来鉴别个别的运动。在空間，也可以用比較簡单的运动来代替复杂的运动。首先可以証明，空間保留一定点不动的任何运动也保留通过这一点的一条直綫上所有点不动，因而它就是以这条直綫为軸的經过一定角的轉动。空間的运

动也可以是一个不动点也沒有的,譬如平移就是一例。

可以証明,空間任意的运动可以看作是一定的轉动和沿轉动軸的一定的平移二者合成的运动;单独的轉动或平移也可以看作是这样两部分合成的运动,不过有一个部分是恒等罢了。如果我們把一般运动中的平移和轉动看作是同时进行并且都是匀速的,则得一螺旋状的推进轉动。正因为这个原故,空間的一般运动也叫做螺旋运动,轉动和平移是它的极限情形。此外,跟平面平移的情形一样,平移可看作圍繞无穷远点經过零角的轉动,这样能使問題簡单化。

空間两个螺旋运动的合成运动沒有象平面上那样簡单而一般的轉角加法定理。但是也有两个对于特殊情形成立的定理,足够研究空間結晶体之用:第一,两个平移的合成还是一平移;第二,旋轉軸平行和轉角相等的二螺旋运动只相差一个平移。这里所說的螺旋运动的轉角是指螺旋运动所包含那个轉动的轉角。

根据上述第一个定理,可知空間的平移运动群必作成一子群。同平面上的一样,这个子群的結构决定空間不連續运动群是否为結晶体群,即是否产生空間正则点系。因为,如果群的所有平移都与一个定平面平行,群里必有无穷大的基本区域,因此不产生正則点系。另一方面,如果平移群包含三个平移,而三个平移的方向不都与一个定平面平行,则它是一結晶体群。在这种情形下,平移子群里与一点 P 等价的諸点,必作成一个空間格子。如果除此之外,群里还有一个螺旋运动,把 P 移到不是格子点的另一点 Q,则平移子群把 Q 移到与 P 和 Q 等价的另一个幅点格。由于群是不連續的,所以用这种办法得到的格子数目总归有限,也象在平面上一样,这个限制使我們能够逐一檢查所有可能的情形。并且我們能看到,空間的正則点系都是由有限个合同的、交錯而平行排列的格子組成的。以前曾經看到过这样的一个例子,这就是在四面体

堆积中的球心系。

由上述第二定理(即关于具有平行軸的二螺旋运动)可以得出将一个非平移群里的运动加以分类的一个重要的几何办法。为此,我們在空間任取一点 M。对群里每一螺旋运动,通过 M 作一直綫 a_0 平行于它的軸 a。这样一来,对于群里繞軸 a 的任何螺旋运动 s,总有繞軸 a_0 的轉动 s_0 和它对应,它們的轉角相同。因此 s 和 s_0 只能相差一平移。用这种方法可使群 G 里任何非平移运动都有保留点 M 不动的另一运动和它对应。要使对应完全,再让恒等变换对应 G 里的所有平移。这样,群 G 就对应保留点 M 不动的运动組 G_M。我們断言,G_M 是一群。为了証明,設 s_0 和 t_0 分別是与 G 里螺旋运动 s 和 t 对应的 G_M 里的轉动。根据具有平行軸的螺旋运动定理可知 s_0t_0 不是別的,正是 G_M 里和 st 对应的轉动。于是运动組 G_M 事实上满足下面的群的两个公理:如果它包含轉动 s_0 和 t_0,它也包含 s_0t_0 和 s^{-1}。

群 G_M 的結构不能唯一地决定 G,也就是說,它沒有告訴我們群 G 里平移的任何东西。比如,单独由平移組成的一切群 G 对应仅由恒等变换組成的同一个群 G_M。因此 G_M 代表相差只是一些平移的一組群。我們把可以化归同一个群 G_M 的所有空間运动群称为空間运动群的一个类。如果这类包含一結晶体群,則它叫做結晶体类。这个概念对于应用結晶学和空間群的几何分类都很重要。因为,首先作出一切可能的結晶体类,然后在每一类中找出它所包含的群,总要容易得多。

因为 G_M 的所有的运动都保留 M 不动,它們也应該把以 M 为中心的球面变到它自己,因此 G_M 可以看作球面上的运动群。有一个定理說,若 G 是不連續群,G_M 也一定是不連續群。应用这个定理,可使我們的討論简化不少。G 的不連續性和 G_M 的不連續性有完全不同的意义,所以这个定理并不是自明的。不过如果是

結晶体群，就容易由相当的平移格子着手証明。这一証明姑从略。

根据上面的結果，可知要想找出空間运动群的所有的結晶体类，只須討論球面上的不連續运动群卽可。这里还有一种簡化的办法。正象在平面上一样，空間的結晶体运动群除了轉角为 π，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}$ 的倍角的轉动外，沒有其他的轉动。从这个結論得知，正象在平面上只有二次、三次、四次和六次轉动中心一样，空間的結晶体运动群只有二次、三次、四次和六次的軸（用相仿的术語）。这个結果对于結晶体类的群 G_M 也一定成立。根据这个限制，只能有十一类的結晶体。逐一列举如下：

首先，我們看在 G_M 中只有一根軸，而且是 n 次軸的情形。这样的結晶体类在結晶学中称为 C_n。C_n 共有五个（图 91）：

1. C_1（恒等，平移群类），
2. C_2，
3. C_3，
4. C_4，
5. C_6。

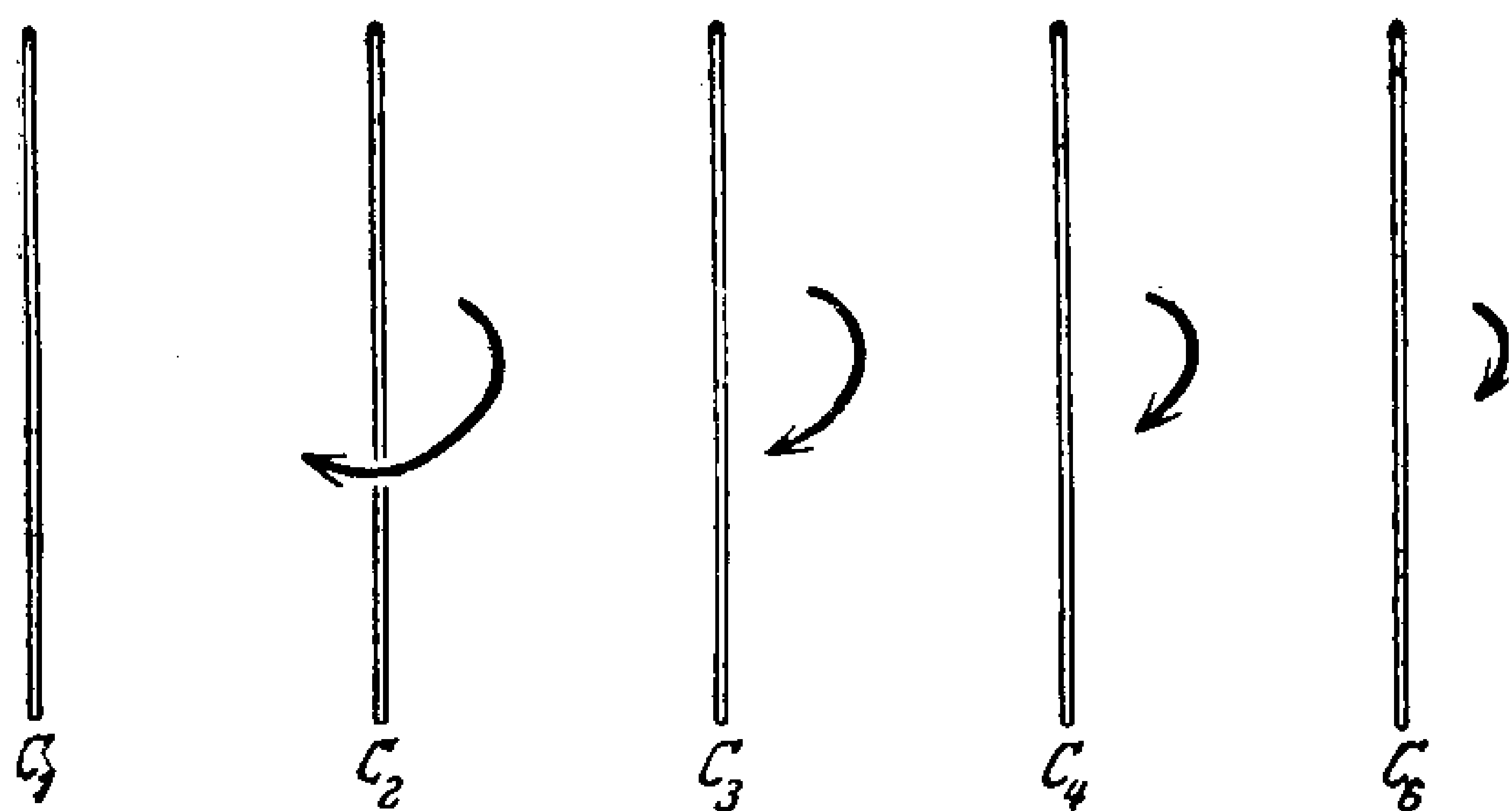


图 91

現在假定有多个軸，其中最多有一个是大于二次的軸。我們指定这个 n 次軸 $(n>2)$ 为"主軸"，二次軸为"副軸"。那么容易从群的公理推出恰好有 n 个副軸，这 n 个副軸都与主軸垂直，而且彼

此作成等角。其对应的群和类用 D_n 标明（二面的群或类）；一共有四类：

6. D_2(3 个等价軸)，

7. D_3，

8. D_4，

9. D_6。

其次，容易看出，在 $n=3$ 的情形下所有的副軸都等价，但在其余的情形下，这些軸交錯地属于两类等价軸里。

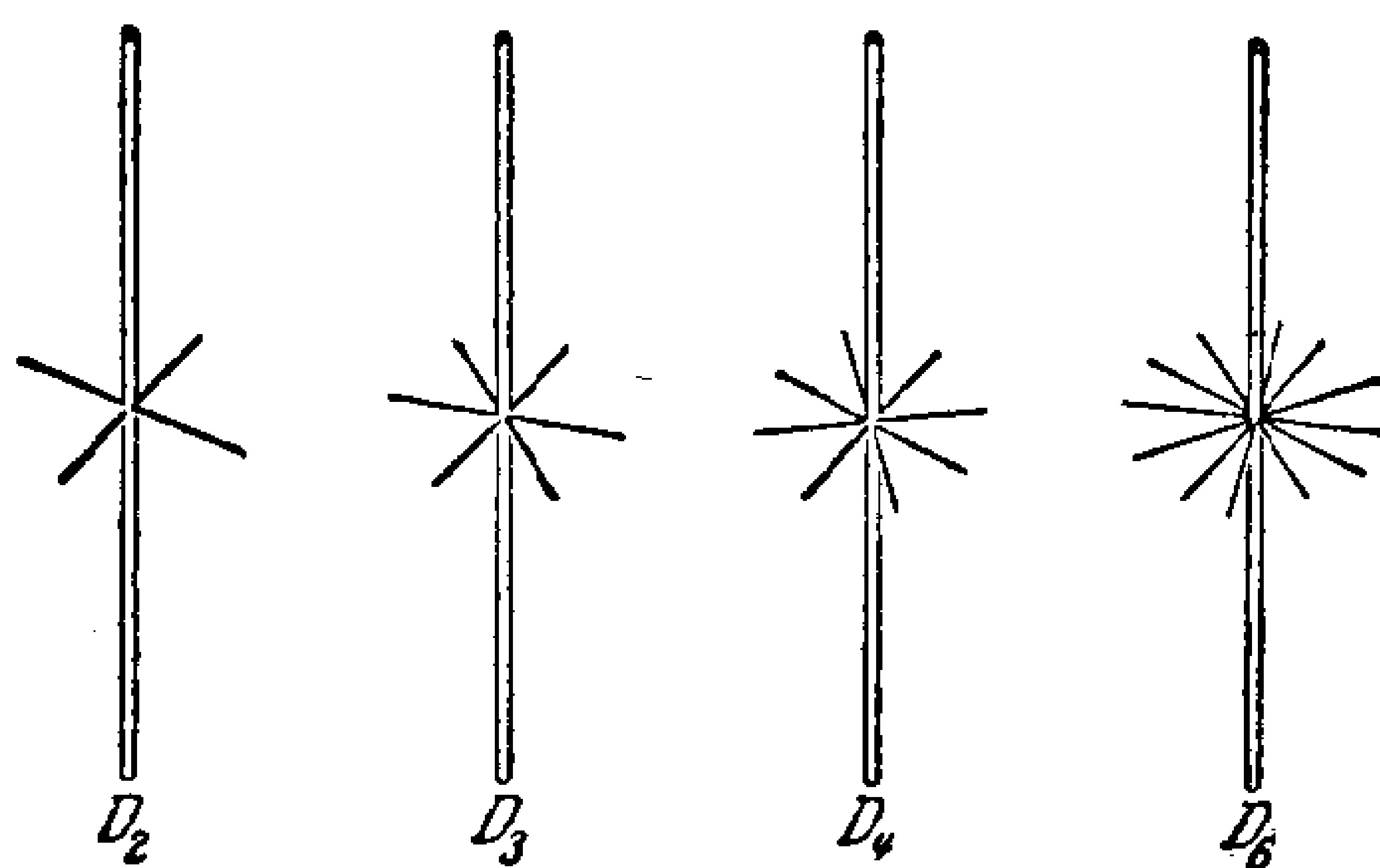


图 92

还留下一种可能情形，就是大于二次的軸可能不止一个。在这种情形下，詳細地研究后可以証明，在球面上的諸等价点必是正四面体的頂点(T)或是正八面体的頂点(O)。从这两个多面体的对称性自然就得出各軸的排列情形。連接球心和各頂点、各棱的頂点、各面的中心就得到所有的軸。因此，四面体产生类：

10. T(图 93)。

連接球心和正四面体的一个頂点的直綫必过对面的中心。因为对面是等边三角形，而每个頂点处有三个面相交，所以我們得到四个三次軸。其次，我們将六个棱的中点和球的中心連以直綫，則得到三条直綫，而不是六条。因为各棱的中点是成对地在一直徑上。因为四面体能够以这几根直綫为軸轉动使与自己重合，它們

必定是二次軸。这样类T里有三个二次軸,并且这些軸相互垂直。

要想作出球面上的一个基本区域,我們先从和正四面体的一个面对应的球面三角形开始。因为这样的三角形可繞三次軸使与自己重合,所以它不是一个基本区域。但是显然这个三角形可以分成三个基本区域(图 93)。

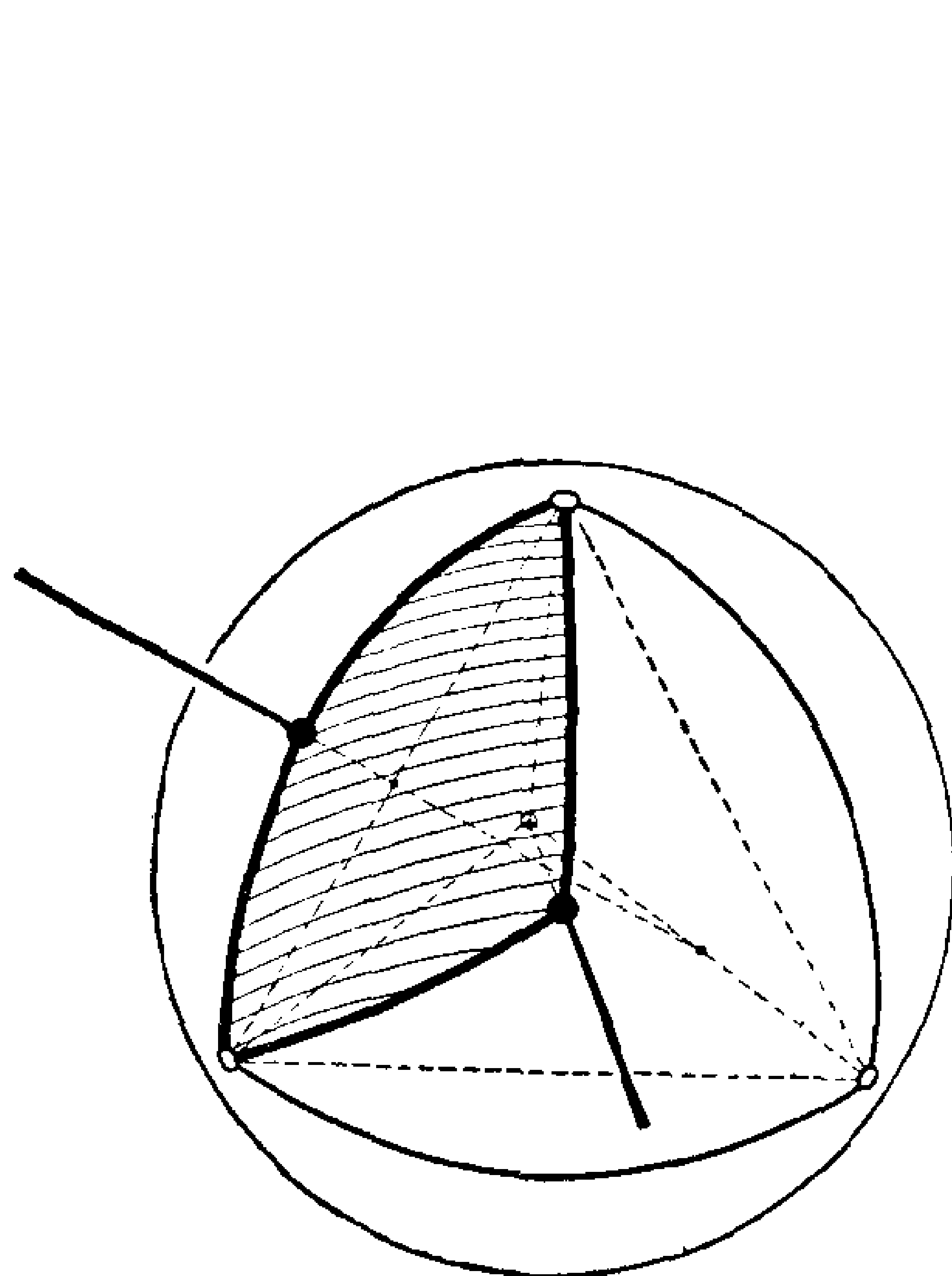


图 93

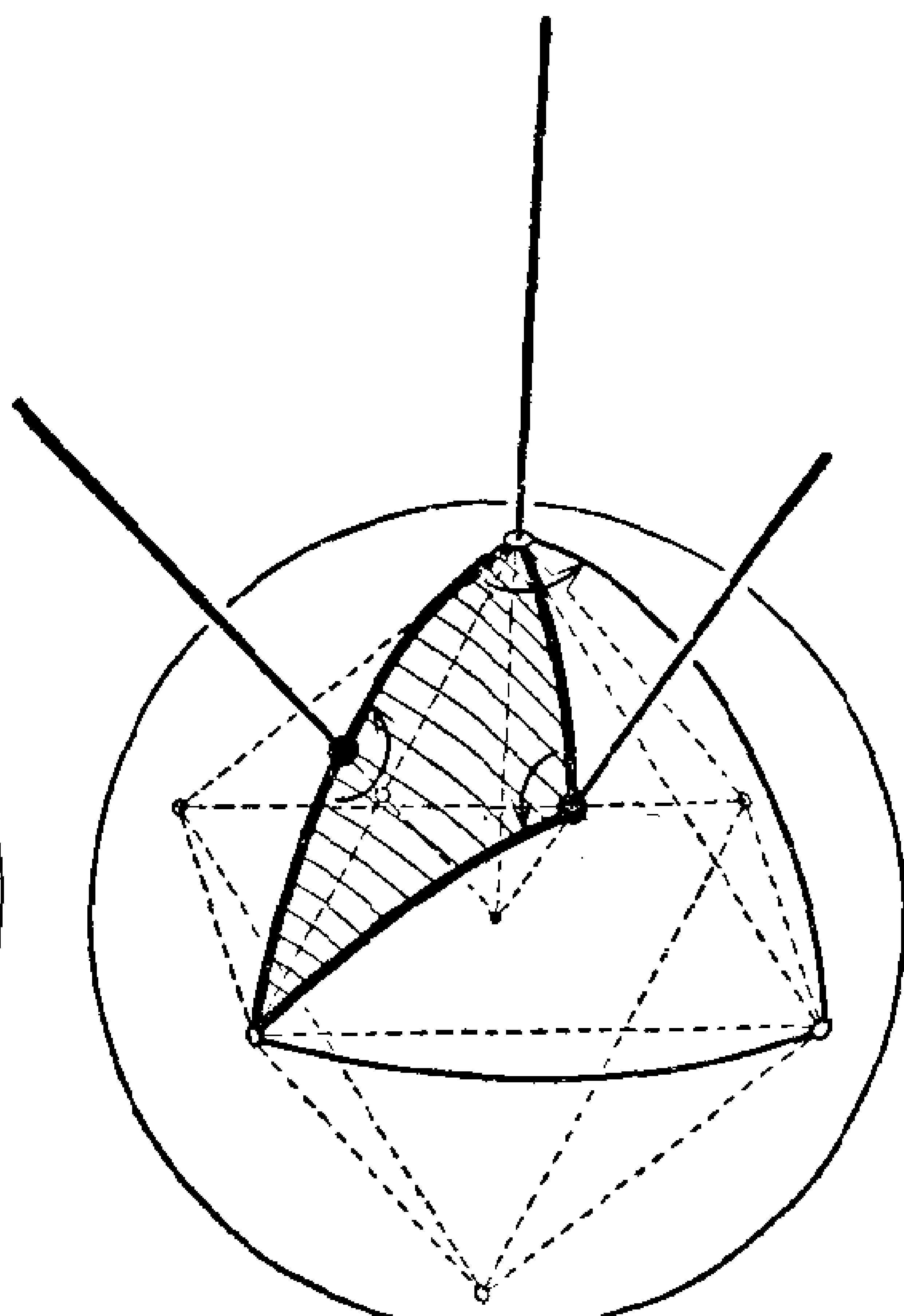


图 94

最后一类:

11. O(图 94)

的研究方法与前同。八面体的六个頂点两两連成一直徑,每个頂点处有四个面相遇,因此我們得到三个四次軸。相仿地,八面体的八个面两两相对,而且每个面都是等边三角形,因此它們产生四个三次軸。最后,八面体有十二个棱,它們也是两两相对,所以类O里有六个二次軸。至于基本区域可以取和八面体一个面对应的球面三角形的三分之一(图 94)。

从上面作出的十一类可导出 65 个空間的結晶体运动群。这

样看来，只因有了类的区分，才使如此繁多的群的研究大为簡化。本来也可以把类的概念同样用到平面上的結晶运动群中去。这就得到在圓周上不連續的运动群，其中包括恒等运动和轉角为 π，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}$ 的轉动。因此一共只有五类，每类只有一个結晶体运动群。因此，把平面結晶体运动群分成类的办法沒有什么好处。

同平面的情形一样，空間的結晶体运动群产生正則点系，而且它們也可联系这个問題：試把空間剖分成合同的有限的片段，这些片段中的任意一个可在迭合运动下与其他任一片段重合。这个問題直到現在还沒有解决。

为了結晶化学上的用途，不仅要考虑点系，也要考虑指針系，这才方便。不过在空間，一个点只带一个指針是不够的，因为图形还可以繞着指針轉动。要想得到有完全确定的定向的图形，須使一点带不同长度和不同方向的两个指針才行。

把存在于自然界的不同結晶体的結构和所有用几何方法作出的指針系加以比較，得到惊人的結果。自然用尽了用几何方法作出的一切儲备还不够，还存在大量的結晶体結构，不属于正則点系概念的范圍內，虽然所有的元素也都是等价的。原因是这样：我們規定正則点系时用来表明所有点都等价的第三个性質是說，系中的任何点可以通过**迭合运动**搬到系中的任何另一点。若在迭合变換之外再允許**鏡面反射**，还可以导出更一般的点系的概念。所謂鏡面反射，在平面上是对于一直綫来講的，在空間是对于一平面来講的。这两个更一般的变换也保持距离和角都不变，不过把左右的部分对調了一下，还有空間的鏡面反射不能由連續运动产生。如果**迭合变換**一語系指包括保持距离和角不变的所有的空間变換，那么迭合变換的不連續群作成的集合，不仅包括不連續运动群，也包括許多別的群。这些更一般的群也已經完全确定出来。任何一群所包括的眞运动（也就是沒有鏡面反射的变換）必作成一

子群，这个事实可使群的討論簡化。这种子群的类型可以用从前讲过的办法来决定。将平面或空間的結晶体运动群分成类的办法也可以扩充到包含鏡面反射的群。象具有平行軸和相等轉角的二螺旋运动一样，对于平行平面或平行直綫的二鏡面反射也只差一平移。現在把用这种办法得到的群和类的数目写成下表：

	平面		空間	
	結晶体群	結晶体类	結晶体群	結晶体类
运动	5	5	65	11
加入鏡面反射	12	5	165	21
共計	17	10	230	32

唯有加入鏡面反射之后才能完全概括自然界中存在的各式各样結晶体构造。

至于說到指針系，无論在平面上或在空間都須各加一指針；因为在平面上一个指針在对于它的直綫上所作的鏡面反射下不变，同样，在空間里由两个不等长的指針构成的图形在对于二指針的平面所作的鏡面反射下也不变。因此在空間我們必須使用带有不全在一平面上的三个不等长的指針的点子。

如不用几何方法，也可以用代数方法去找迭合变換的不連續群。在平面的情形下，这种方法导致复数之間值得注意的关系；在空間就要用到超复数系。

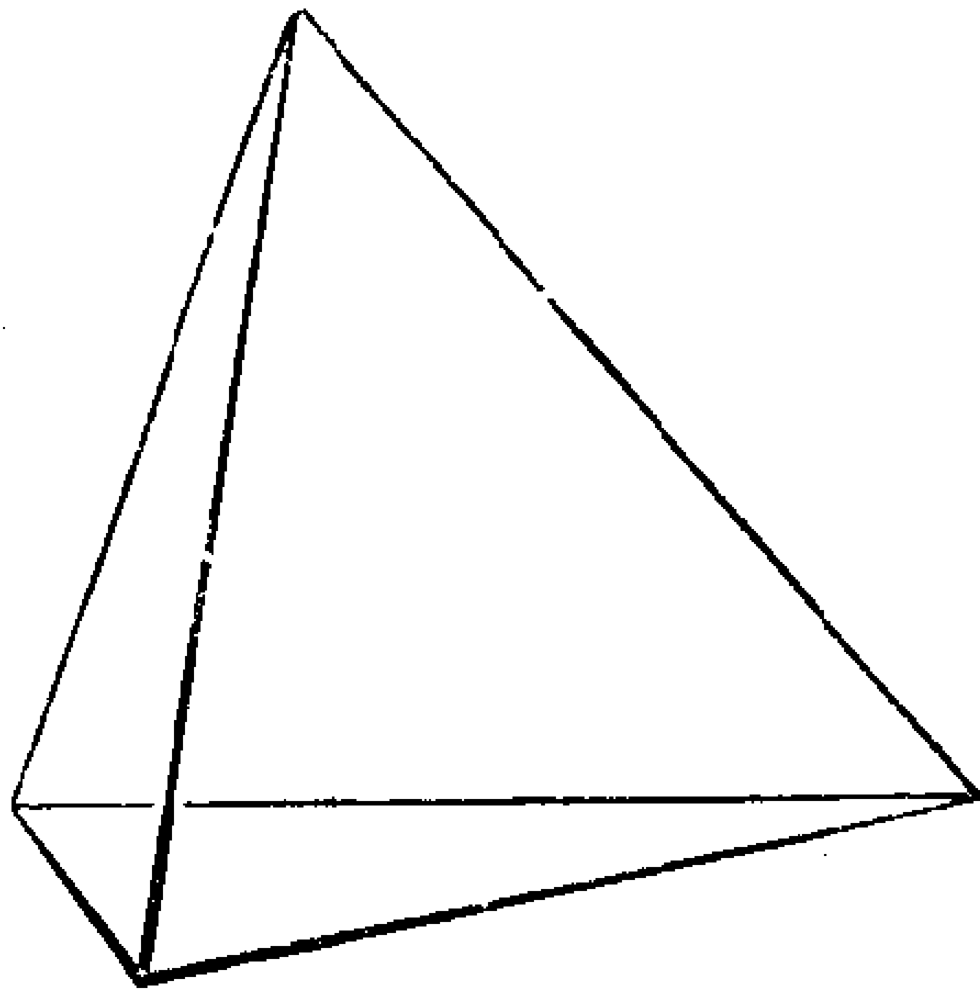
把現在的討論推广到高維空間里去是一个很有趣的問題。关于高維球在迭合变換下的不連續群已經得到一些結果，因为在任意空間关于正多面体的类似情形已經知道了。这些高維的图形我們在下一章还要讲一下。另外比伯巴哈 (Bieberbach) 曾經証明，对任意的 n，仅有有限个 n 維結晶体群，而且每个这样的群包含 n 个綫性无关的平移。

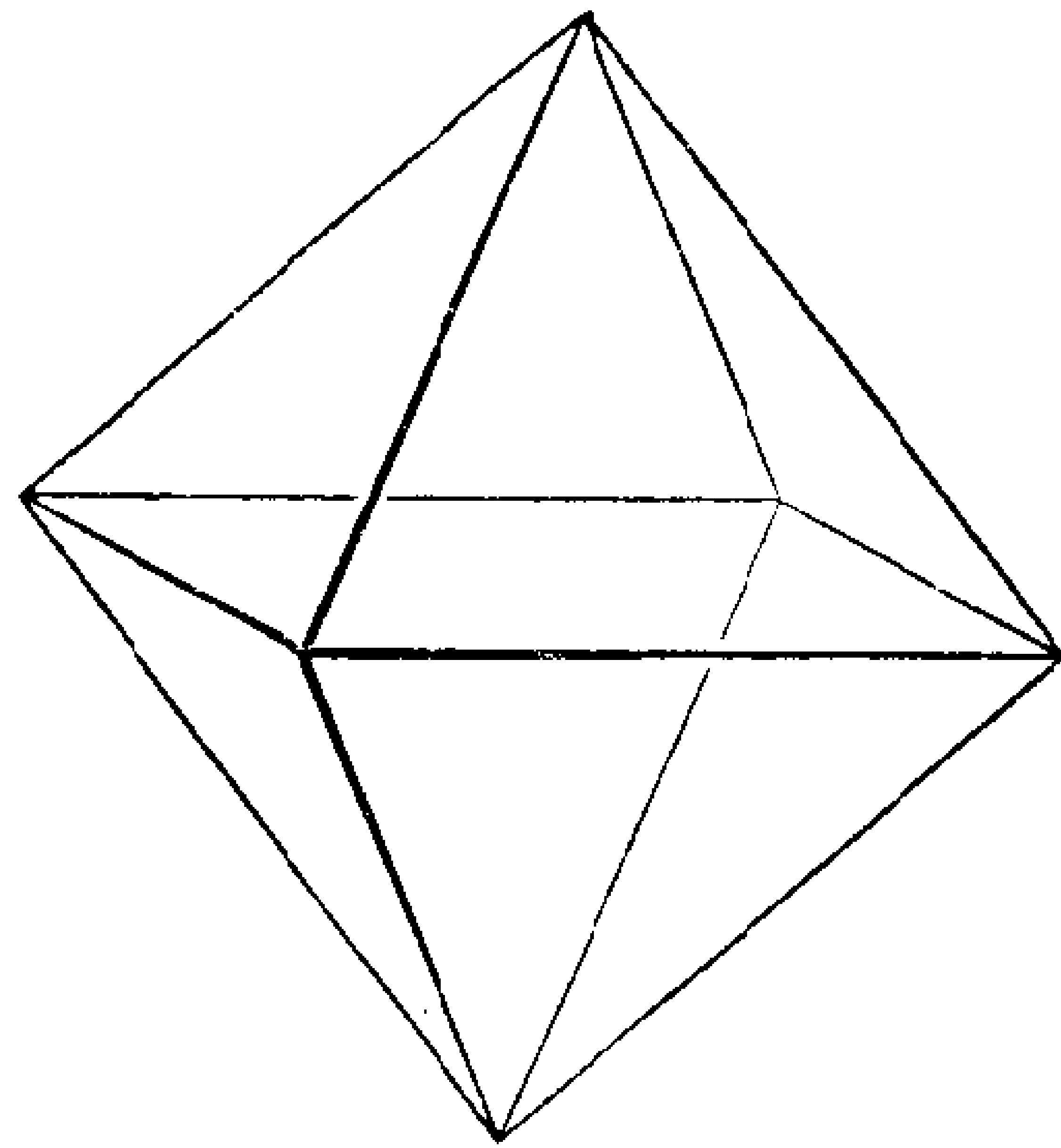
§ 14. 正多面体

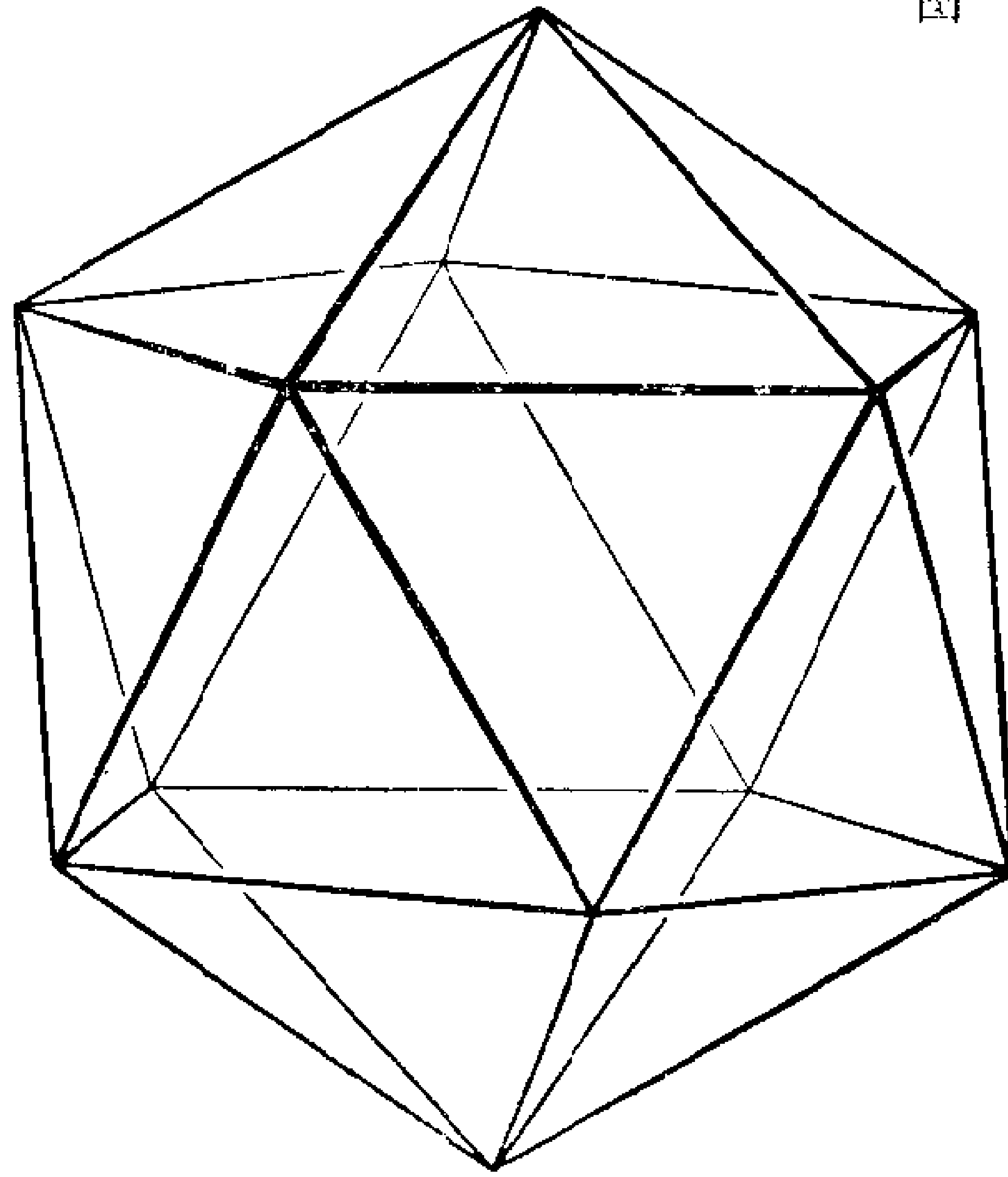
在建立結晶体的种类时曾經引出了正四面体和正八面体。現在要給一般的正多面体下个定义,并且还要找出在正四面体和正八面体之外还有哪些可能的正多面体。

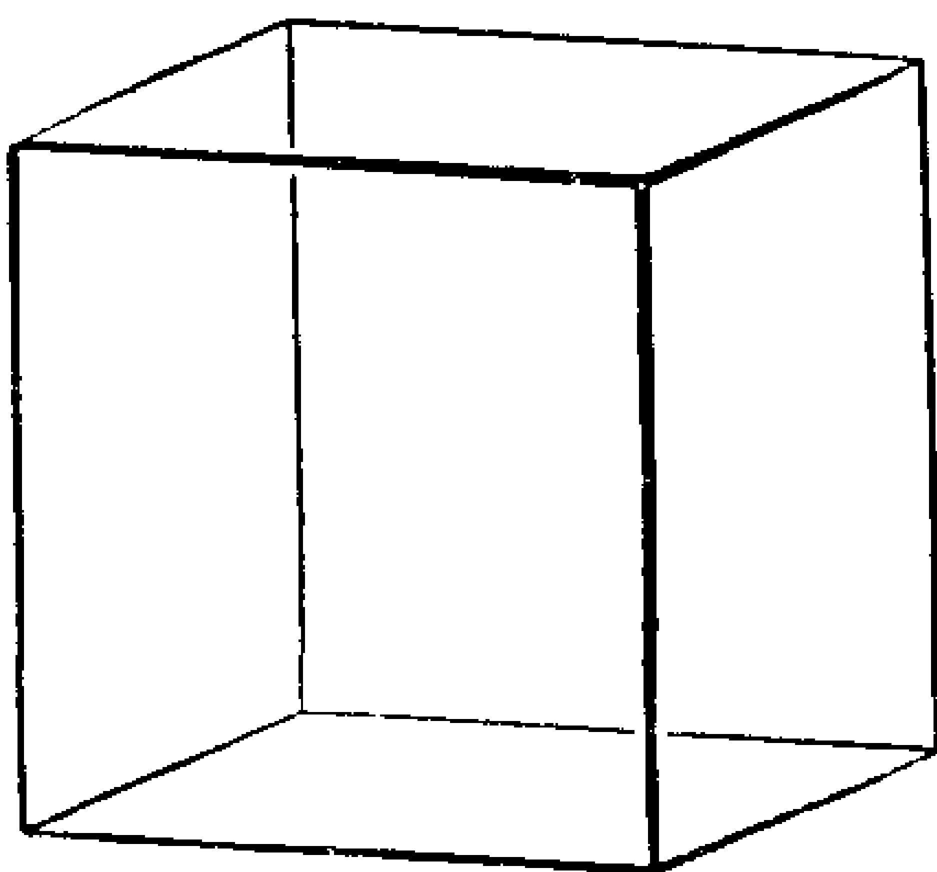
我們对正多面体有如下要求:它的所有的頂点、棱、和面都各自等价。此外,还要求所有的面都是正多边形。

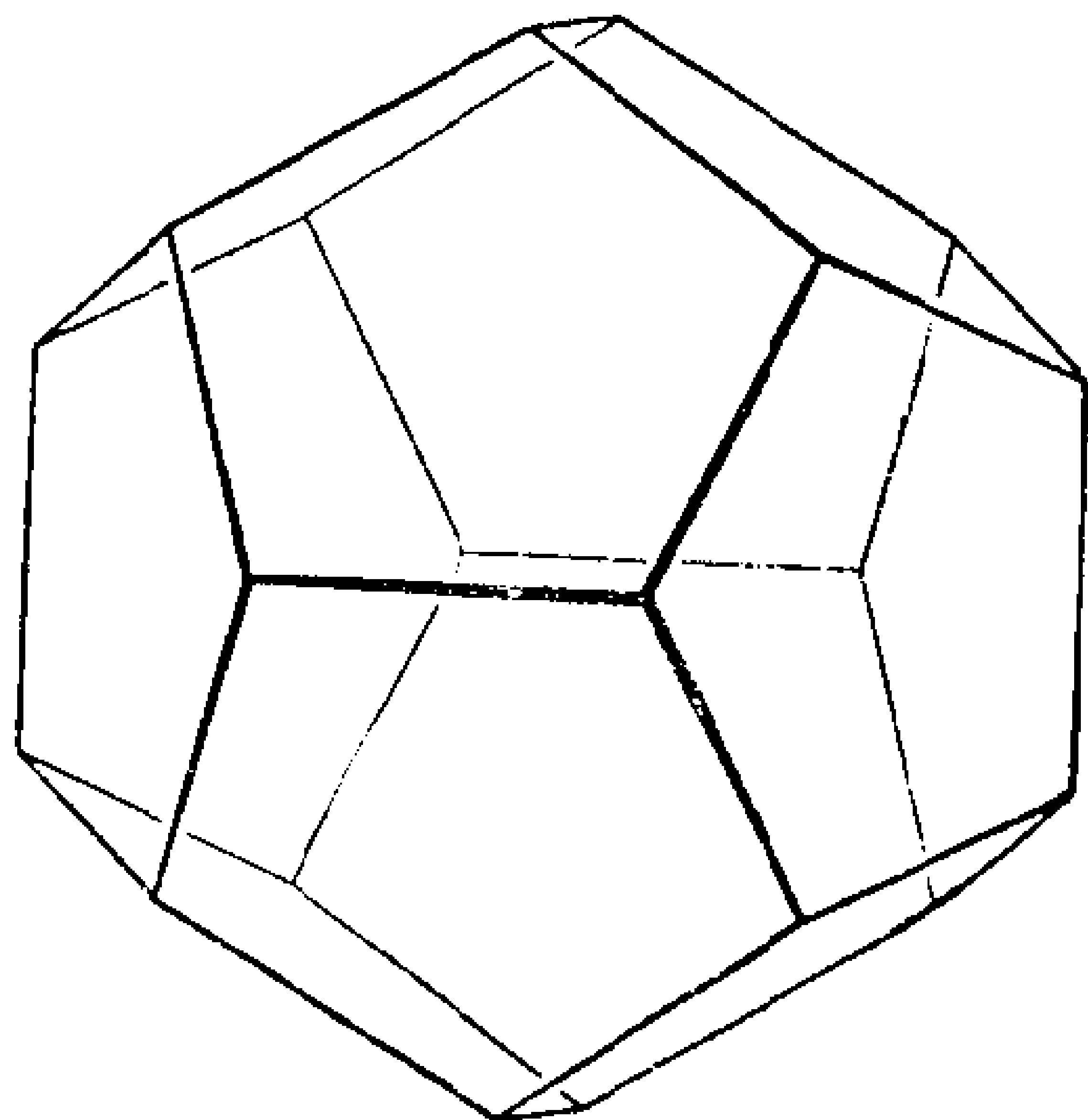
首先,我們知道,适合上述二条件的正多边形沒有陷入的頂点或棱。因为,显然不可能所有的頂点都是陷入的,假如有任何陷入的頂点,则并不是所有的頂点都等价;对于棱也是一样。由此可見,每一頂点上的平面角之和永远小于2π。因为不然的話,若不是交于一个頂点的所有的面将落在同一平面上,就是以頂点为端点的某些棱将陷入。其次,因为一頂点上至少要有三个多边形相遇,又因为所說是正多面体,所以所有的多边形的內角都相等,每一角小于$\frac{2\pi}{3}$。再其次,因为正六边形的每一內角剛好等于$\frac{2\pi}{3}$,而正n边形的內角随边数增多而加大,所以正多面体的面只可能是三边、四边、五边的正多边形。因为正四边形(也就是正方形)的角是直角,所以不能有三个以上的正方形遇于一点,而不使各角之和等于2π或大于2π。同理,不能有三个以上的五边形遇于正多面体的一頂点。因为多面体的形状完全取决于一頂点上的面数和一面上的頂点数,所以最多有一个由正方形圍成的正多面体,最多有一个由正五边形圍成的正多面体。另一方面,一个頂点只可以有三个、四个、五个等边三角形相遇,因为假如有六个,那么在这一个頂点上各角之和就等于2π。因此以等边三角形作面可作成三种不同的正多面体。总起来說,一共得到五种可能的正多面体。这五种可能的正多面体事实上都存在。它們老早就为柏拉图所知道。在他的哲学中,他把它們放在很重要的地位,因此有"柏拉图


图 95


图 96


图 97

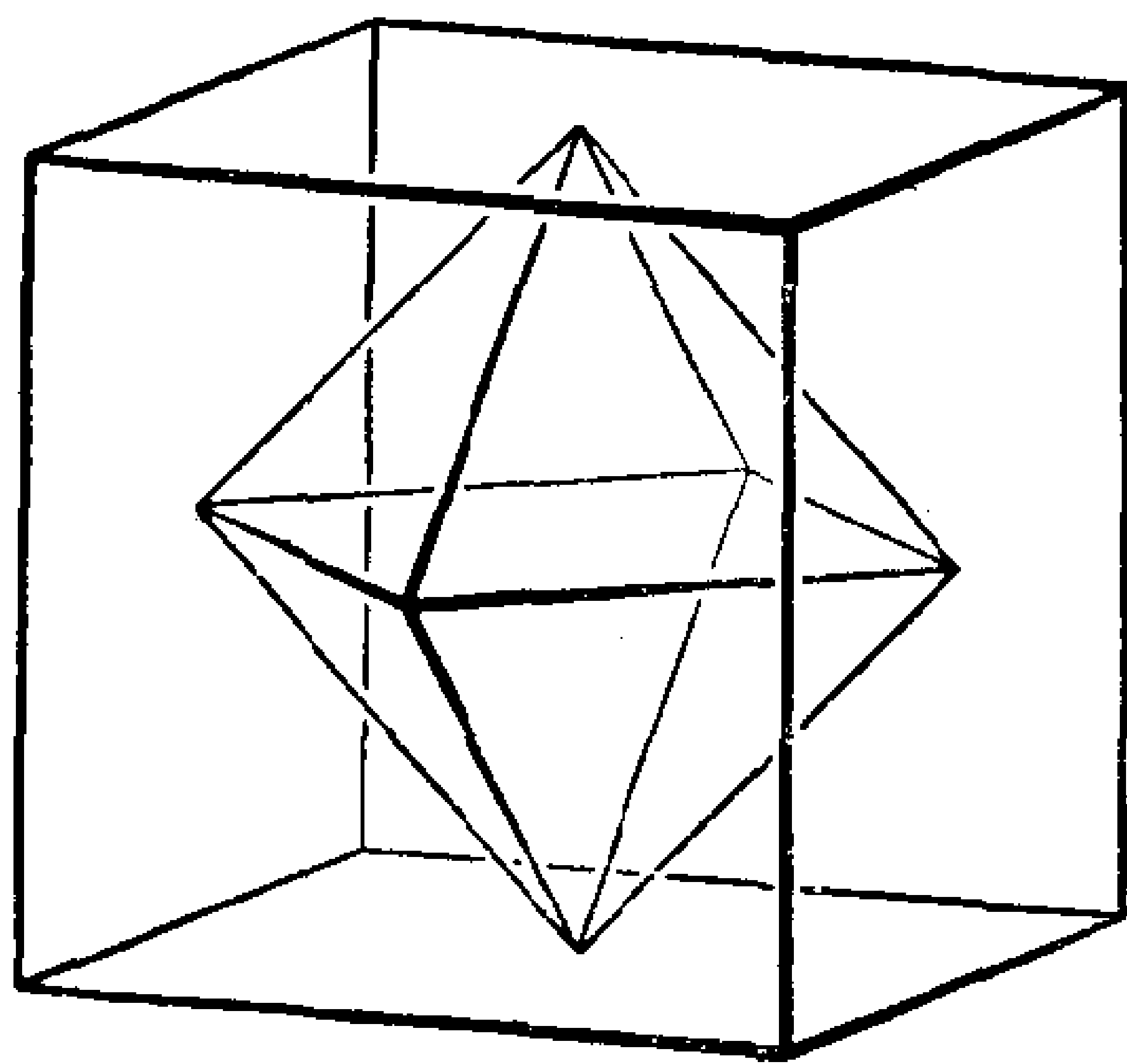

图 98


图 99

体"之名。下面的表給出五种正多面体的最重要的数据。图 95—99 是五种多面体的平行投影。

多面体名称	各面的形状	个数			
		頂点	棱	面	遇于一頂点的面
正四面体 (图 95)	三角形	4	6	4	3
正八面体 (图 96)	三角形	6	12	8	4
正二十面体 (图 97)	三角形	12	30	20	5
立方体(正六面体) (图 98)	正方形	8	12	6	3
十二面体 (图 99)	五边形	20	30	12	3

所有正多面体跟球的关系正象我們上一节講过的四面体和八面体的一样，它們都可內接于球，而且每个多面体都产生球面的不連續运动群，其中各頂点作成一組等价点。如果我們通过多面体的每个頂点作球的切平面，这些切平面必圍成一个新的多面体，在群的运动之下也重合于自己。我們可以期望新造出的多面体也是正多面体，而且这种作法建立了五种多面体的两两对应关系。如果作图是对于八面体进行的，实际上就得到一个正多面体，卽立方体。图 100 上表明这两个多面体的相互位置。这样一来，群 O 可以用八面体来定，也可以用立方体来定。从表中可以看出这两个多面体有这样的关系：一多面体的頂点数等于另一多面体的面数，两个多面体都有相同的棱数。还有，一多面体的一頂点上的面数等于另一多面体一面上的頂点数。据此八面体也可以外接于立方体(图 101)。


图 100

从表上可看出十二面体和二十面体也有相仿的关系。因此这

两个图形产生同一的群，通常叫做二十面体群。从結晶学的观点不能发現这个群，因为五这个数字在这里起作用，然而在結晶体类里是不能有五次軸的。

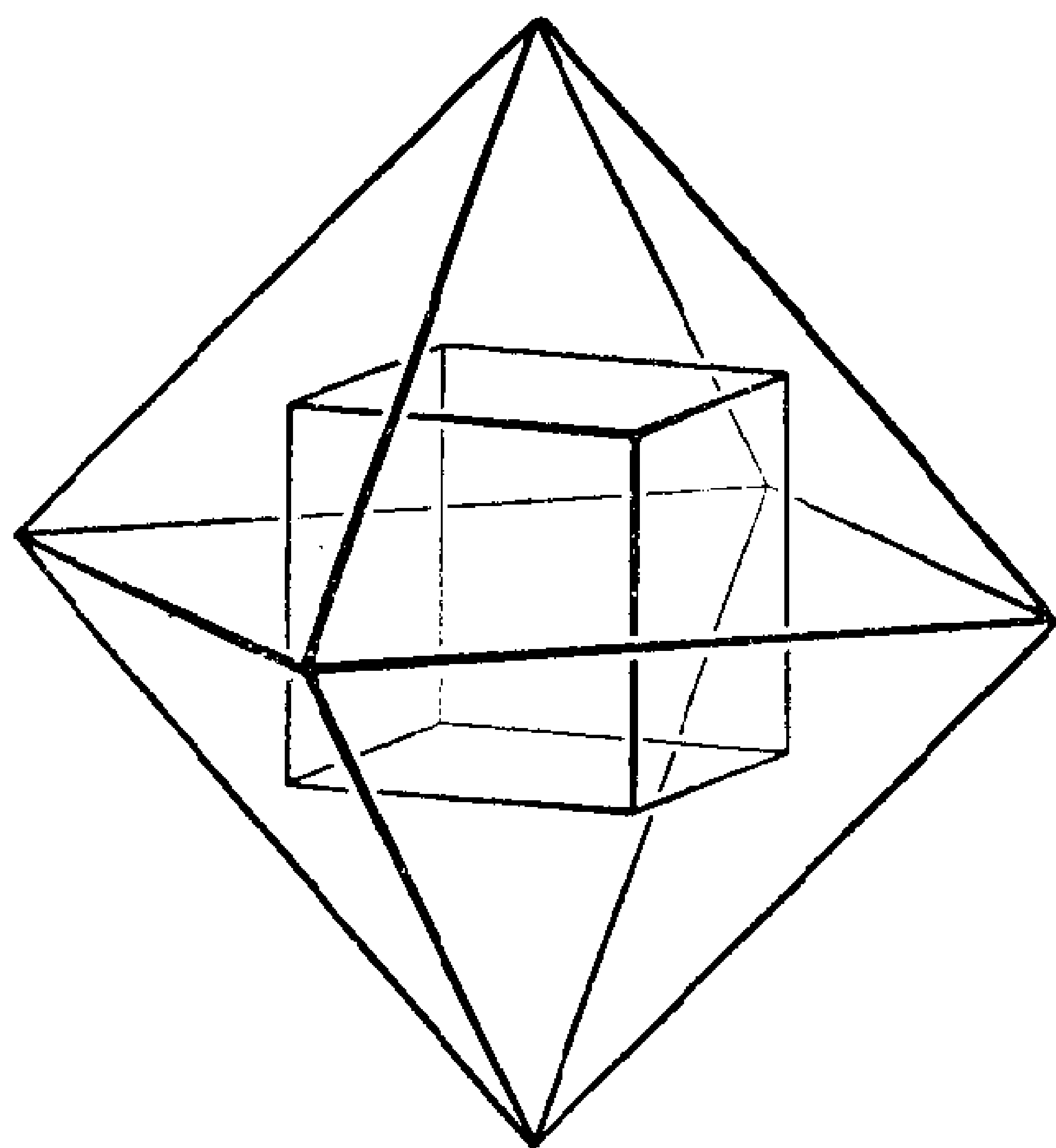


图 101

如果作图是对于四面体进行的，不产生不同形状的图形，只产生另一个正四面体。

在下一章我們要介紹空間的对偶原理。对偶原理供給我們更一般的方法来建立一个图形的点、直綫、平面同另一个图形的面、直綫、点的对应关系。根据这一原理，立方体同八面体"对偶"，十二面体同二十面体对偶，四面体同自己"对偶"。

再进一步研究，可以发現四面体群是八面体群的子群。与此相仿，我們已經知道某些平面不連續运动群是另外一些群的子群。从 T 群和 O 群之間的关系可得出下列直观的推論：正四面体可內接于立方体，使正四面体的頂点是立方体的頂点，正四面体的棱是立方体面上的对角綫。正四面体可有两种不同的方式內接于立方体(图 102)。

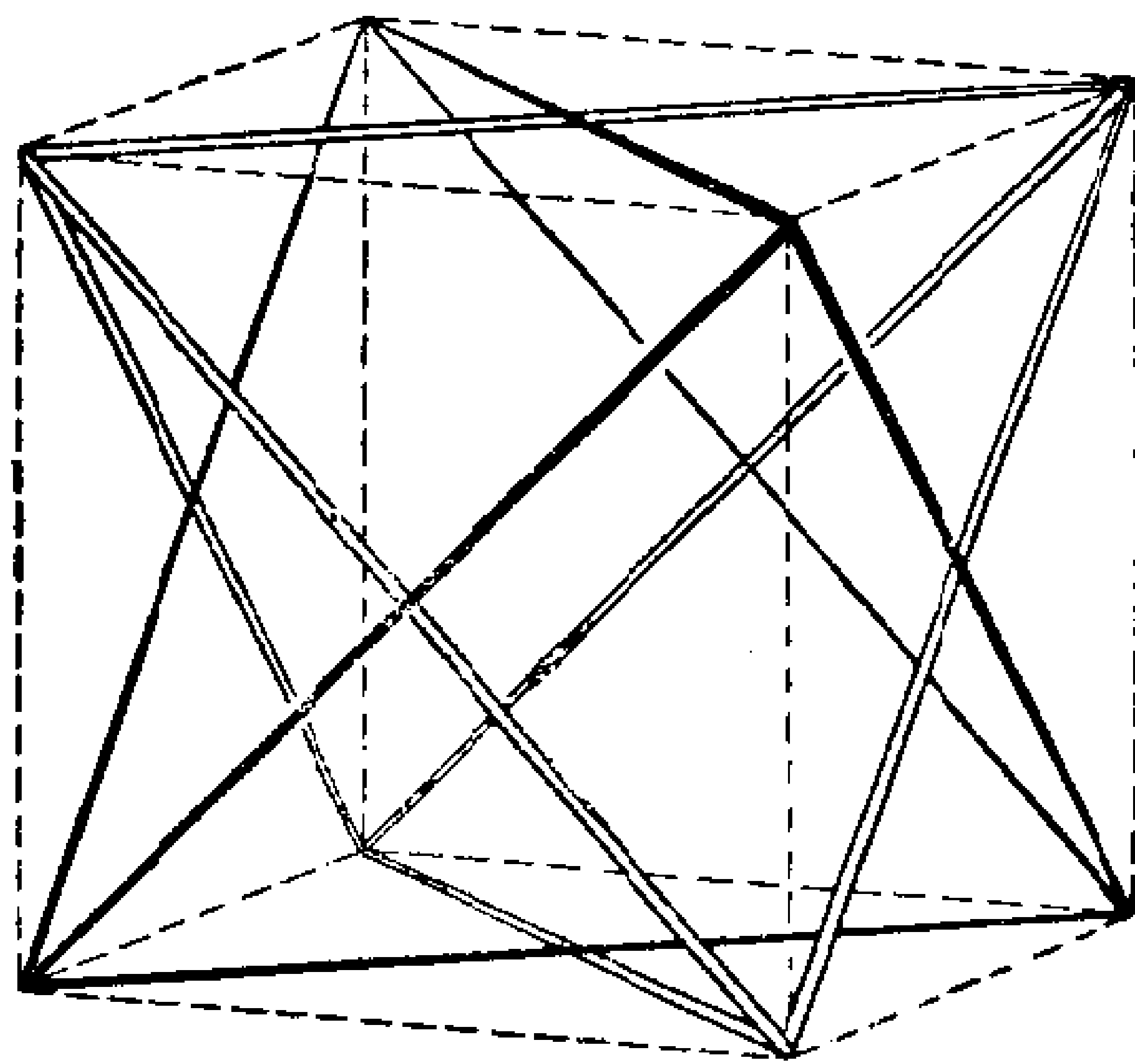


图 102

同样也可以証明，八面体群是二十面体群的子群。据此可知，立方体可內接于十二面体，理由如同正四面体可內接

于立方体 (图 103)。仔細推究，我們会发現在每一个十二面体里有五个这种的立方体。在十二面体的每一面上有每一立方体的一个棱，在十二面体的每一頂点处有两个立方体相遇。

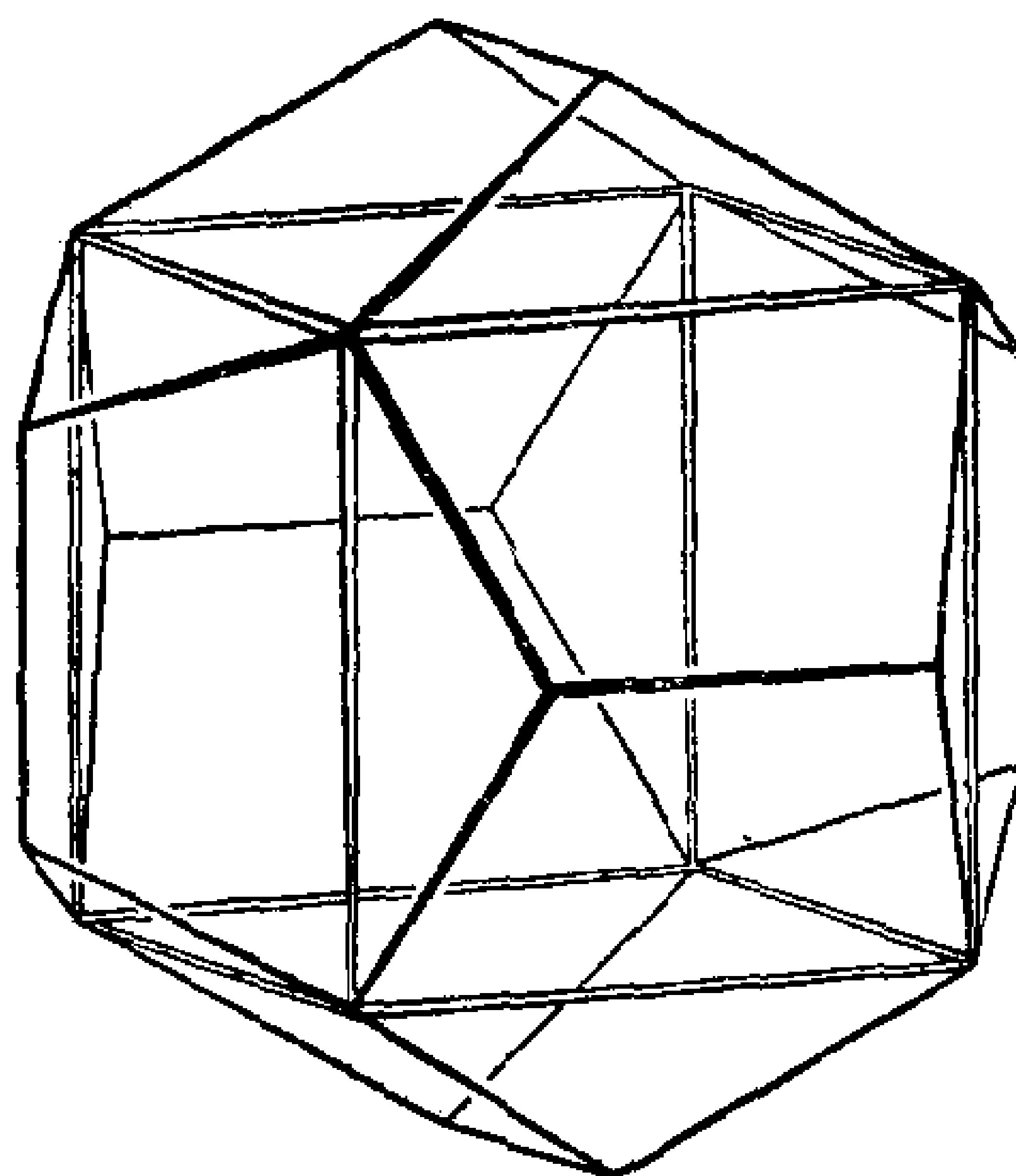


图 103

第三章 投影构形

在这一章里我們将要研究一些不用距离和角的度量或比較，也能够表述和証明的几何事实。也許有人以为不用距离和角的度量便得不出图形的重要性质，只能得出不明确的論断。其实不然。事实上，长期以来，几何学中仅仅研究度量关系。而象这一章所要討論的一类問題，只有在对透視画法的原理进行了科学的研究之后才能提出来，例如把一平面图形从一点投影到另一平面上去，距离和角就有所变更，甚至平行綫可能变为非平行綫；然而，图形的某些基本性质必然仍旧未改，否則我們就不会認为投影图是原图的眞正表象了。

如此通过投影的过程可得出新的理論，这种理論因其起源而有投影几何之名。自十九世紀以来，投影几何在几何研究中占着中心的地位。引进齐次坐标以后，投影几何的定理可化为代数方程，正象笛卡儿坐标之于度量几何的定理一样。不过投影解析几何比起度量解析几何来，显著地更为对称和更为一般，所以，假如我們想反过来用几何方法去解釋高等的代数关系，就常把这些关系变为齐次式，并把变数解釋为齐次坐标，因为如用笛卡儿坐标系里的度量解釋将会是太不明显了。此外，可以認为度量几何是投影几何的特例。

投影几何的基本图形是点、直綫、平面。投影几何的基本結果是关于三者之間最簡单的可能的关系，即結合（也称关联）关系。結合关系有三种：点在直綫上，点在平面上，直綫在平面上。显然这三句話可以換成意义相同的另外三句話：直綫通过点，平面通过

点，平面通过直綫。引进結合概念之后，便可以把两种形式的說法改成对称的一种形式：直綫与点結合，平面与点結合，平面与直綫結合。

跟結合有关的定理是投影几何中特别重要的定理。不过，今后我們还要用到不能从結合概念推出来的另外两个基本概念。第一，必須区别一直綫上四点的两种不同的排列法；第二，必須用連續概念，这个概念把一直綫上的所有点同实数全体联系起来。投影几何的基本概念至此完备了。

下面我們将要研究投影几何学中最富于启发性的部分——构形。这种研究还可以揭示各式各样其他的几何問題。可以在这里提一提，从前有一个时期，竟把构形視为全部几何中最重要的分支①。

§ 15. 平面构形导言

平面构形是由平面上 p 个点 g 条直綫合成的一組，組中每一点与相同数目的直綫（γ 条）相結合，而且組中的每一直綫与相同数目的点（π 个）相結合。这样的构形我們用符号 $(p_\gamma g_\pi)$ 表示。p, g, π, γ 四数不能任意选取。因为，按照我們的要求，組中总共有 γp 条直綫通过这 p 个点。但是由于每条直綫通过 π 个点，因而它被計算了 π 次，所以直綫的条数 g 等于 $\frac{\gamma p}{\pi}$。由此可知，对于每一构形，关系式

$$p\gamma = g\pi$$

① 关于构形的詳細叙述可以参考 F. Levi 著 Geometrische Konfigurationen (Leipzig, 1929)——著者注。

构形理論新近又有属于代数方面的进一步发展。关于这方面的文献可参考 Б. И. Аргунов 的論文：Конфигурационные постулаты в проективных Плоскостях и их алгебраические эквиваленты, Вестник Московск, Ун-та, №1, 1948——俄譯本編者注。

常成立。

一点和通过这一点的一条直綫，形成最簡单的构形，它的符号是$(1_1 1_1)$。比这个构形稍微复杂一点的是三角形$(3_2 3_2)$。我們在平面上画四条直綫，其中沒有两条是平行的、也沒有三条是共点的。这四条直綫定出六个交点 A, B, C, D, E, F (图 104)。如此得到熟悉的完全四边形，它是构形$(6_2 4_3)$。等式 $6\cdot 2=3\cdot 4$ 証实了我們一般的公式。这种构形与上面講的两种簡单构形不同：不是构形中所有点的联綫都是該构形的直綫。同样，在一般的情况下，构形中的直綫与直綫的交点，也不一定属于該构形。

要想得到在图 104 中的所有各点的連綫，还須作三条对角綫 AD, BE, CF。由此又得到三个新点，它們是对角綫三角形的頂点 P, Q, R。可能有人以为，継續連新綫和継續加入新交点于此构形，到后来必可得到象三角形一样的构形，即此构形的任二点的連綫还是此构形的直綫，此构形的任二直綫的交点还是此构形的点。但是可以証明，除三角形以外，根本沒有象这样的构形存在。

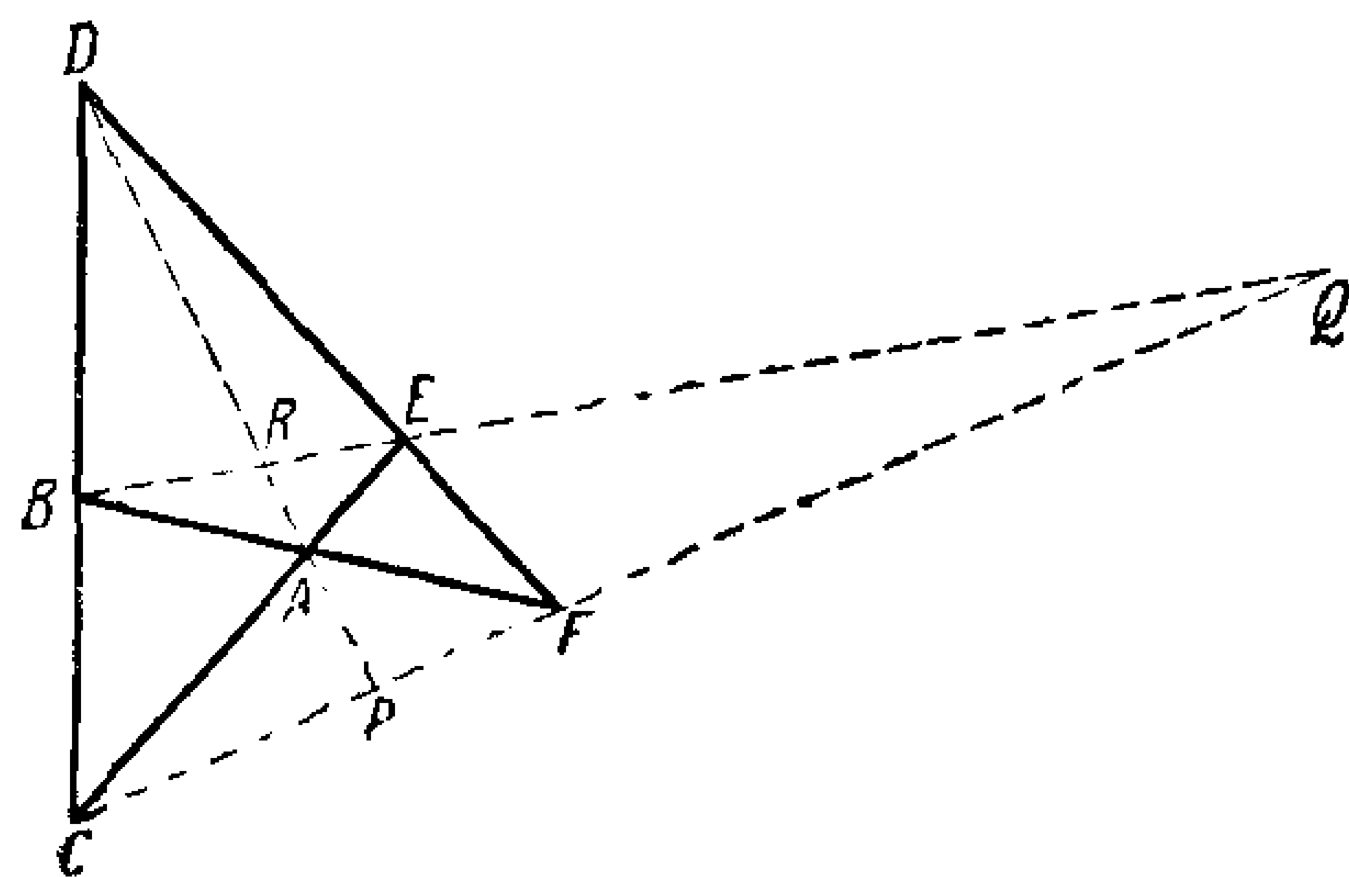


图 104

假定我們从一个四边形出发，无限制地連直綫，再把所得的新交点加进来，那么甚至可以証明，最后在平面上每一点的任意邻域内总有象这样的一些交点存在。用这种方法得出来的图形叫做默比斯(Möbius)网。这种网可用来規定投影坐标。

为了今后应用起見，我們回忆一下，四边形对于作調和点的意义。一直綫上的四点 C, P, F, Q 叫做調和点(或者說 Q 叫做对 C, P, F 的第四調和点)，如果可作一四边形，而这几个点是由如图 104 中的結合关系决定出来的話。投影几何中有一个簡单的基

本定理說：对一直綫上的任意三点恰有一个第四調和点。所以如果按图 105 的作法，用两种不同的方式将三点 CPF 补充成为四边形，则根据这个定理①，这两个图形必引出同一点 Q (图 105)。

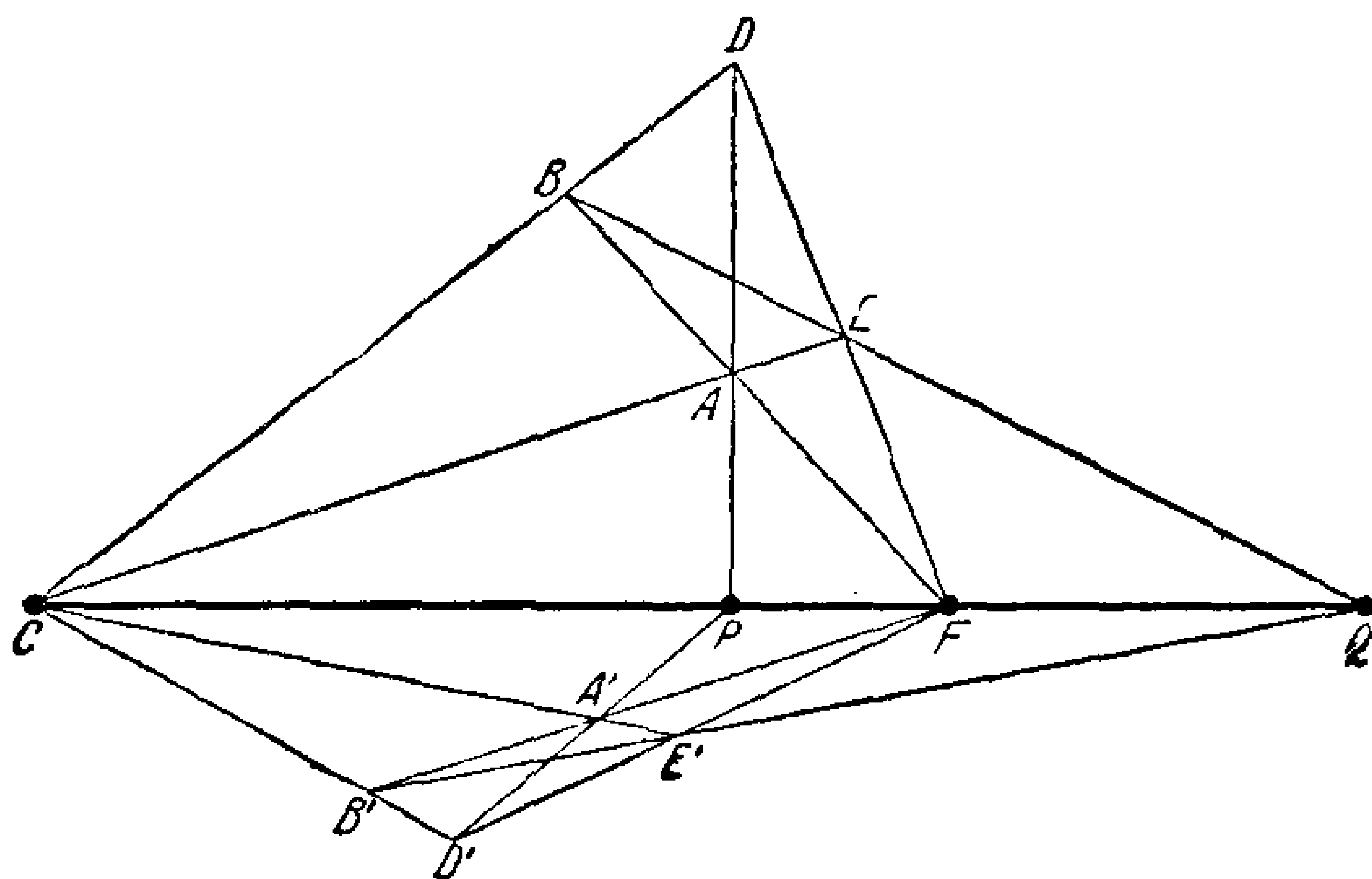


图 105

下面我們主要地討論点数和直綫数相等的构形，即当 $p=g$ 的时候。由关系式 $p\gamma=\pi g$，就得出 $\gamma=\pi$；因而这样的构形，其符号常作 $(p_\gamma p_\gamma)$ 的形状。也可以用更簡单的符号 (p_γ) 代表。其次，我們永远假定：构形都是連通的而不能分开成为几个图形。

$\gamma=1$ 和 $\gamma=2$ 的情况沒有多大意义。$\gamma=1$ 时，构形极其簡单，它只有一点和过該点的一直綫。事实上，假如在这种构形上有多个点，这个构形便可分开，因为构形中任何直綫不能包含多于 1 的点。$\gamma=2$ 的情况可由平面閉合多边形来实現。又因为在构形 (p_2) 中通过每一点有二直綫，每一直綫上有二点，所以我們可以知道，任何构形 (p_2) 必由 p 边形的各頂点和各边組成。

另一方面，$\gamma=3$ 的情况給出好多个有趣的构形。在这种情况下所討論的点数（也是直綫数）p 不得少于 7。这是因为通过构形中的每一点有三直綫，而在这三直綫的每一条中尙須有該构形的另外的二点。下面我們只預备将 $7\leqslant p\leqslant 10$ 的情况詳加討論。

① 这个定理是将在 § 19 討論的德沙格定理的直接推論。

§ 16. 构形(7_3)和构形(8_3)

欲建立构形(p_γ)，当以下法为最簡便：把p个点用号碼1到p标出，同样，把p条直綫用号碼(1)到(p)标出。然后作一个有$p\gamma$个点的长方形表，表内每一列中排着一直綫上的γ个点，这样，对应p条直綫一共有p个列。

据此，我們得出构形(7_3)的表：

$$\gamma\left\{\begin{array}{ccccccc} \multicolumn{7}{c}{\overbrace{(1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5)\ (6)\ (7)}^{p}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

在填这張表时，必須滿足下列三个条件：第一，每列的数字都不相同，不然在一直綫上的点数将少于三；第二，不許有两列有两个相同的数字，否則所決定的二直綫将重合；第三，每个数字一共出現三次，因为在每一点处有三直綫通过。一个表如果可以在几何上实現的話，这三个条件都是必要的。另一方面，它們不是充足的，下面就可以举一些例子。为了一个表能在几何上实現还要进行某些不能直接化归簡单算术的几何上或代数上的探討。但是假如一个表确实代表一个构形的話，那末我們可以把这張表作几种变换，而不影响构形的实質，这指的是，任一列中数字的上下次序可以調換；列与列本身的次序也可以調換，因为这不过是将直綫重新編号而已；最后，各点可以随便編号。因为这些变换幷不影响构形，所以我們今后認为所有只相差这几种变换的表是等同的。

从这个观点出发，我們可以造出一种而且只有一种(7_3)的表。先把第一条直綫上的三点写作1, 2, 3。这样通过点1的另外两条直綫不能再包含2和3了。把第二条直綫上的两个点写作4,

5, 第三条上的写作 6, 7。于是所有出現的点都編上了号；这張表到現在为止填写到：

1	1	1	·	·	·	·
2	4	6	·	·	·	·
3	5	7	·	·	·	·

在后面的几列里，2 和 3 两数必須各出現两次，而且須在不同的列里出現，所以第一行可写成：

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	·	·	·	·
3	5	7	·	·	·	·

数字 1, 2, 3 用完了，只有 4, 5, 6, 7 可作填充剩下的八个空位之用。数字 4 还須出現两次；因为它不得在一个数字底下出現两次，那末它的位置可以这样安排：

2	2	3	3
4	·	4	·
·	·	·	·

所有其他可能的排列实质上同这一个沒有什么区别。再有，5 也必須出現两次，但不能再在 4 的底下。因此可以这样放：

2	2	3	3
4	5	4	5
·	·	·	·

其余的四个空位中的前两个必須填上 6 和 7，因为所有别的数字都用完了，而且在两个 2 的底下不能填上同一个数字。6 和 7 对調，不会引起实质上的变化，所以我們可以写

4	5	4	5
6	7	·	·

最后的两个空位只好先后各以 7, 6 填充了，所以对于构形(7_3)实

际上只能得出一种表：

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	6	7	7	6

前面我們說过，这張表的存在并不就意味着确有一个构形(7_3)存在。恰恰在这个例子里可以証明构形不存在。这可以用解析几何的方法；找出表中直綫的方程組，当可看出，其中包含矛盾。也可以用图解法說明这个构形的不可能。为此，首先作表中的直綫(1)和(2)(图 106)，按照表上的規定，命它們的交点为 1。在直綫(1)上任取二点 2 和 3，在直綫(2)上任取二点 4 和 5。然后作由两对点 24 和 35 决定的直綫(4)和(7)，根据我們的表，此二直綫的交点为 6。同样，两对点 25 和 34 决定直綫(5)和(6)，而(5)，(6)的交点为 7。至此构形的所有点都被决定下来。然而我們发現，最后的也是尙未提到的直綫(3)上的三点 1, 6, 7 現在不在一直綫上了，这样一来，直綫(17)和(7)又决定一个另外的交点 6′ 出来。也許有人以为这是由于最初 2, 3, 4, 5 等点位置选擇得不适当的原故。其实不然，我們认得出这个图形正是图 104 的調和作图的翻版。因而 6′ 是对 3, 5, 6 三点的第四調和点，所以根据投影几何

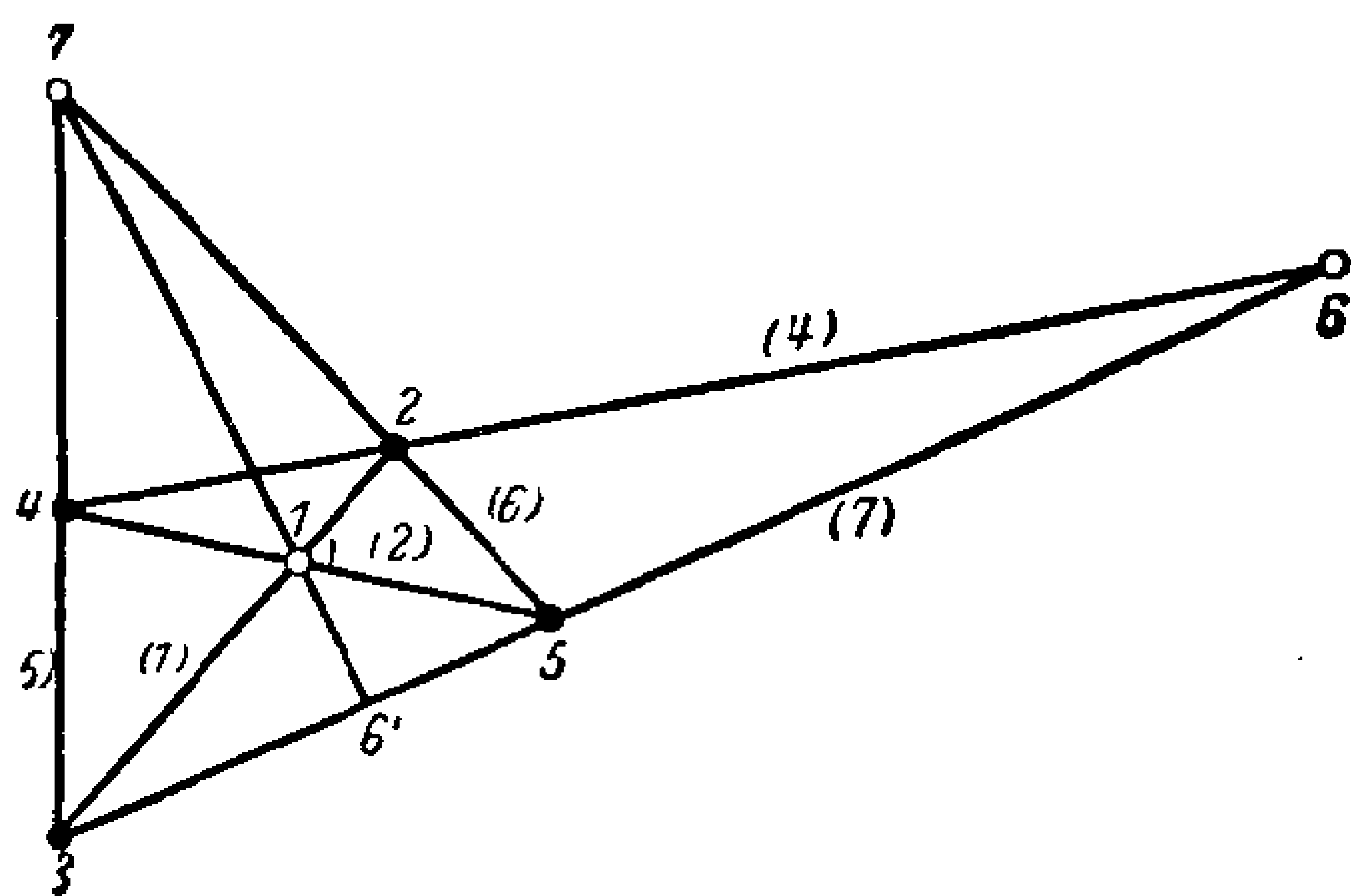


图 106

的初等定理，6′不能同这三点中的任一个重合。

現在再来談构形(8_3)。用同以前一样的方法可以証明，在这里实质上也只能得出一种表来：

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	1	1	2	2	3	3	4
2	4	6	3	7	4	5	5
5	8	7	6	8	7	8	6

这个构形可以解释为两个同时相互内接又相互外接的四边形1234和5678(图107)。这是說，直綫(12)通过点5，(23)通过点6，(34)通过点7，(41)通过点8；同时还有边(56)，(67)，(78)，(85)分别通过点4，1，2，3。显然象这样的构形是画不出来的。这个表如用解析方法处理，可导出这样的方程組，它不象构形(7_3)那样包含矛盾，可是只有复数解而无任何实数解。

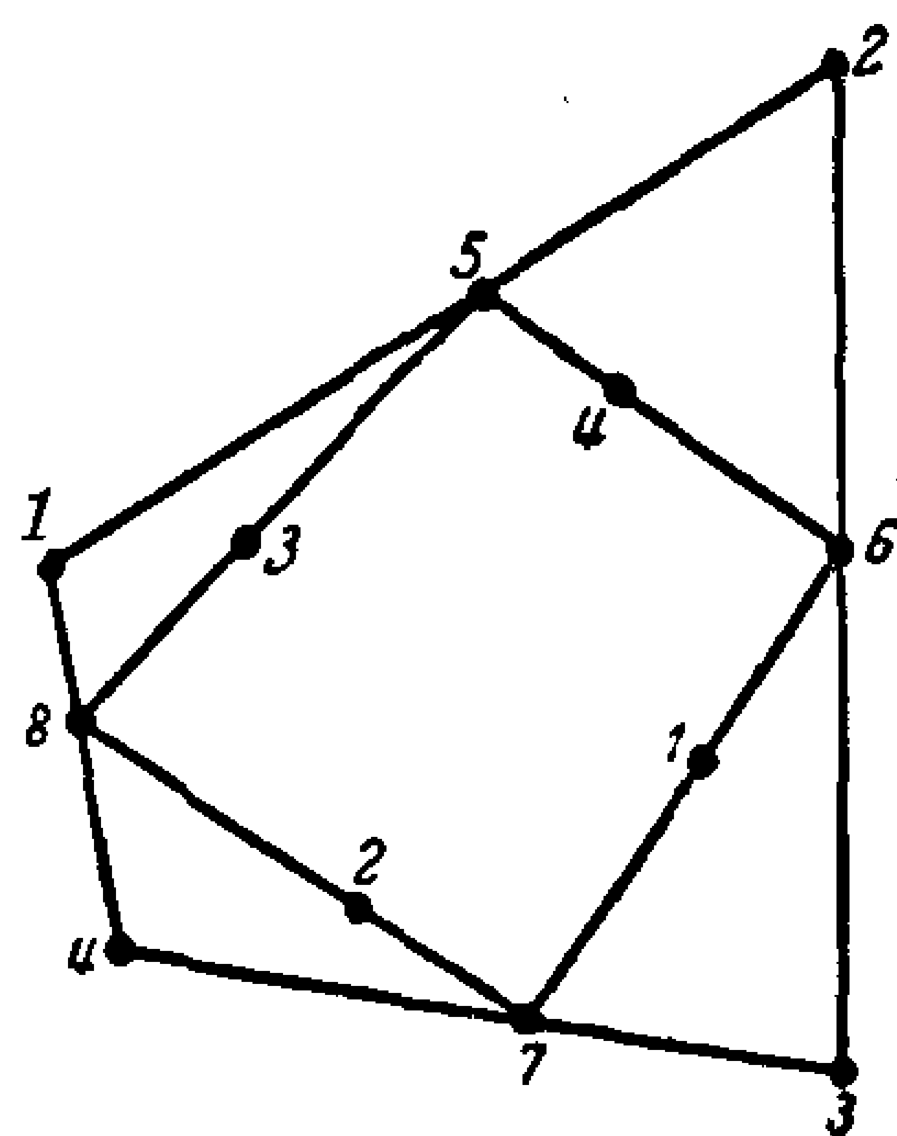


图 107

虽然如此，这一构形在几何上并不是沒有意义的，它在沒有二重点的三阶平面曲綫理論中很重要。这类的曲綫一共有九个拐点，不过其中最多有三个是实的。其次，可以用代数方法証明，連接任意两个拐点的直綫必通过第三个拐点。其次，沒有四个拐点能在一直綫上，因为一个三阶曲綫不能交一直綫于三个以上的点。連接諸拐点的直綫作成一构形，此时 $p=9$，$\pi=3$。而且，$\gamma=4$；因为如果取出一个拐点，则其余的八个拐点必成对地同这个拐点在一直綫上，因此通过每一点实际上有四条直綫。由公式 $g=\frac{p\gamma}{\pi}$，得 g 等于12。所以这一构形呈($9_4 12_3$)的形状。如果要求出这一种构形的表，而不考虑无关紧要的变换，也只有一种可能：

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
1	1	1	2	2	3	3	4	1	2	5	6
2	4	6	3	7	4	5	5	3	4	7	8
5	8	7	6	8	7	8	6	9	9	9	9

把这个构形中的点 9 和通过它的四条直綫 (9), (10), (11), (12) 去掉，剩下的刚好是我們 (8_3) 的表。完全同样，构形 (8_3) 可以如此得出：去掉九个点中任意其他一个及通过此点的四条直綫，因为我們知道，构形 $(9_4 12_3)$ 的所有点都处于平等地位。

§ 17. 构形 (9_3)

我們知道，在 $p=7$ 和 $p=8$ 两种情况下每种只得出一个构形表，而且已經証明这两張表的构形不存在。但是，$p=9$ 的情况可得出三种实质上不同的表，而且所有这三种都可借用实的点和直綫来实現。

这三个构形中最重要的一个，也可說是几何中最重要的构形，是所謂布朗香-巴斯加构形(Brianchon-Pascal configuration)。为簡便起見，我們引用符号 $(9_3)_1$ 代表它。至于 (9_3) 中的其他两个构形，則用 $(9_3)_2$ 和 $(9_3)_3$ 代表。

构形 $(9_3)_1$ 的表可以写作：

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	1	1	2	2	3	3	4	5
2	4	6	4	7	6	5	6	7
3	5	7	8	9	8	9	9	8

要想画出这样的构形，我們先任意取二点例如 8 和 9 (图 108)，通过 8 作任意三条直綫 (4), (6), (9)，通过 9 作任意三条直綫 (5), (7), (8)。所得的九个交点中，有六个属于本构形。按照上表，把这些点标作 2, 3, 4, 5, 6, 7。这六个点决定了其余三直

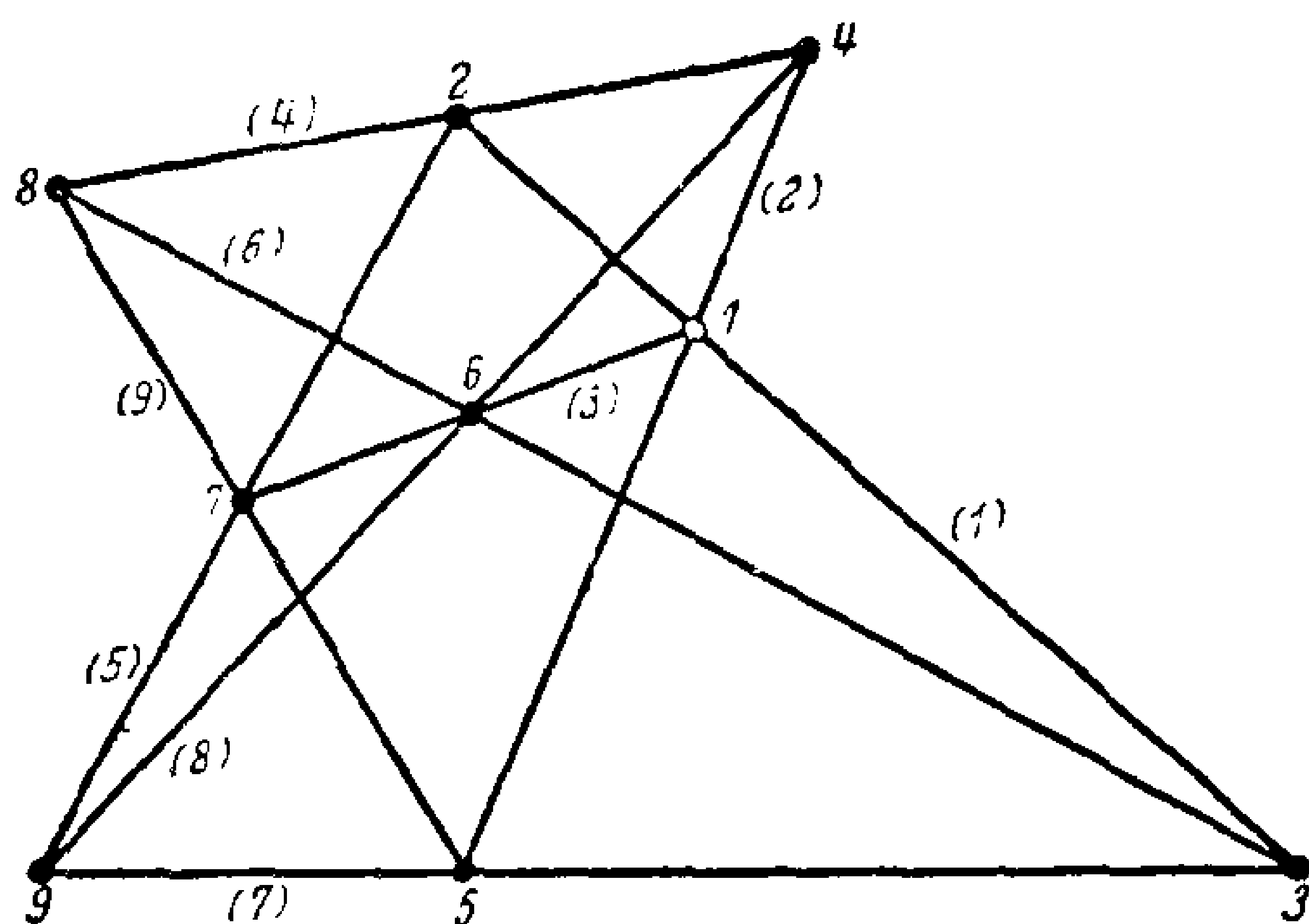


图 108

綫(1)，(2)，(3)的位置。首先通过2和3作直綫(1)，通过4和5作直綫(2)。直綫(1)，(2)的交点，查表应标作1。还有，尙未提到的由点6和7决定的直綫(3)。这条直綫，按表中的要求，应該通过1。我們发现这种結合性是自动成立的，不論8和9二点以及通过这二点的直綫如何选擇。

这一奇妙的現象的几何根据蘊藏在卽将研究的布朗香定理中。

讓我們从单叶双曲面說起。在第一章中我們曾經講过，在这种曲面上有两族直綫，其中一族的任一直綫同另一族的任一直綫相交，但同族的二直綫不相交。現在我們从一族中取出三直綫（图109中用双綫画的），从另一族中也取出三直綫（用黑綫画的）。这六条直綫形成空間的六边形 $ABCDEFA$。为了得到这个图形，我們先从第一族的一条直綫上自 A 走到 B。通过点 B 有第二族的一条定直綫，沿这条直綫走到 C。自 C 沿第一族的一条直綫前进到另一点 D，再自 D 沿第二族的一条直綫走到 E。最后沿第一族

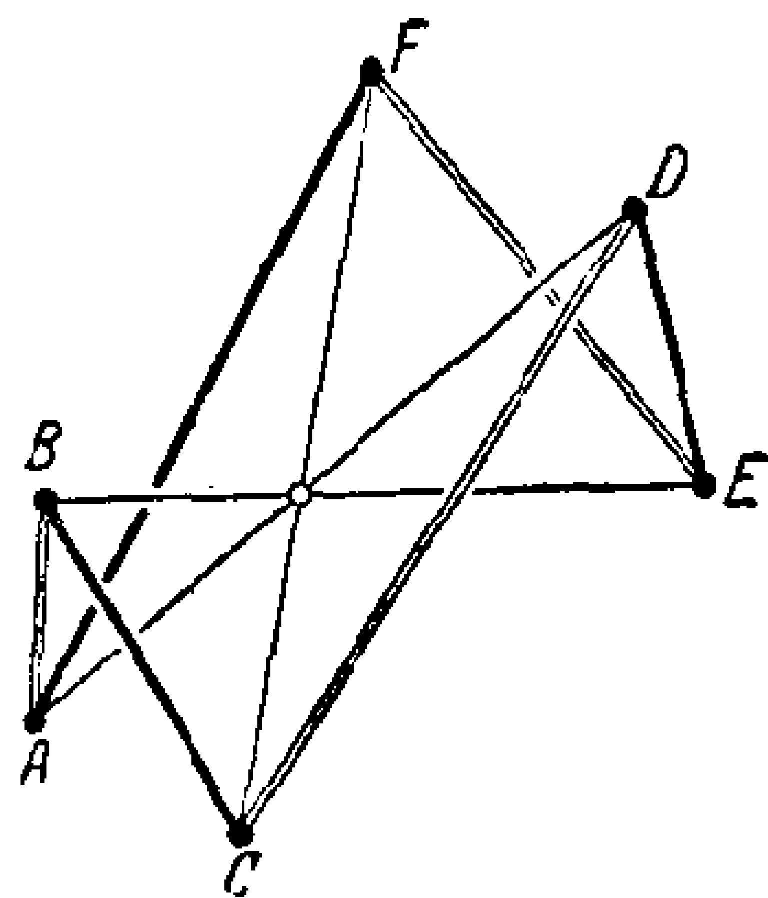


图 109

的一条直綫走到一点 F，而 F 是这条直綫与通过 A 的第二族直綫的交点。这样，六边形的諸边交錯地属于第一族和第二族。

現在我們要証明这个六边形的三条对角綫 AD, BE, CF 交于一点。先說 AD 和 BE。因为六边形的二边 AB 和 DE 属于曲面上不同的直綫族，它們必相交。因此四点 A, B, D, E 在一个平面上，从而可知 AD 和 BE 必相交。用完全相同的方法可以証明，其余两对对角綫也都相交。但两两相交的三条直綫或者在一平面上，或者共过一点，二者必居其一。假定六边形 $ABCDEFA$ 的三条对角綫在一平面上，那末这六边形本身也将在这个平面上，因此，它們的任何两边必相交；这是不可能的，因为举例来說，AB 和 CD 既然是同一族的直綫，就不可能相交。由此可見，三条对角綫实际上共过一点。

从这个空間的几何定理可推出平面几何的布朗香定理。为此，我們从一点 P 出发来观看单叶双曲面，此处的 P 点先假定不在此曲面上。从这点所見的双曲面的边緣呈圓錐曲綫形，可以是双曲綫(图 110)，也可以是椭圓(图 111)。边緣一側的区域是空的，但是另一側则出現双重复盖的形状。图中所見的两层是沿着作成边緣的圓錐曲綫而連在一起的。在曲面上的直綫，一部分可見，一部

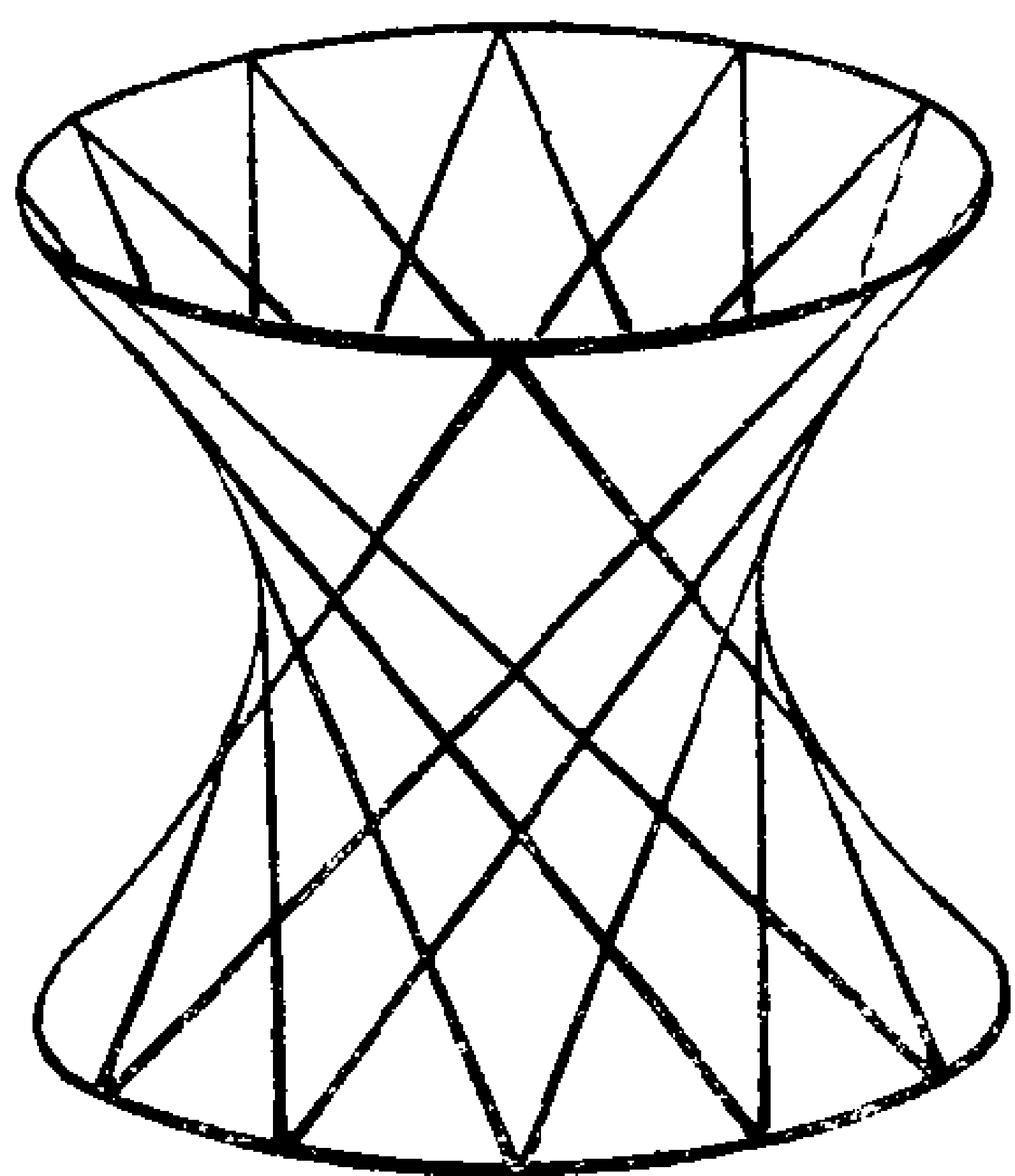


图 110

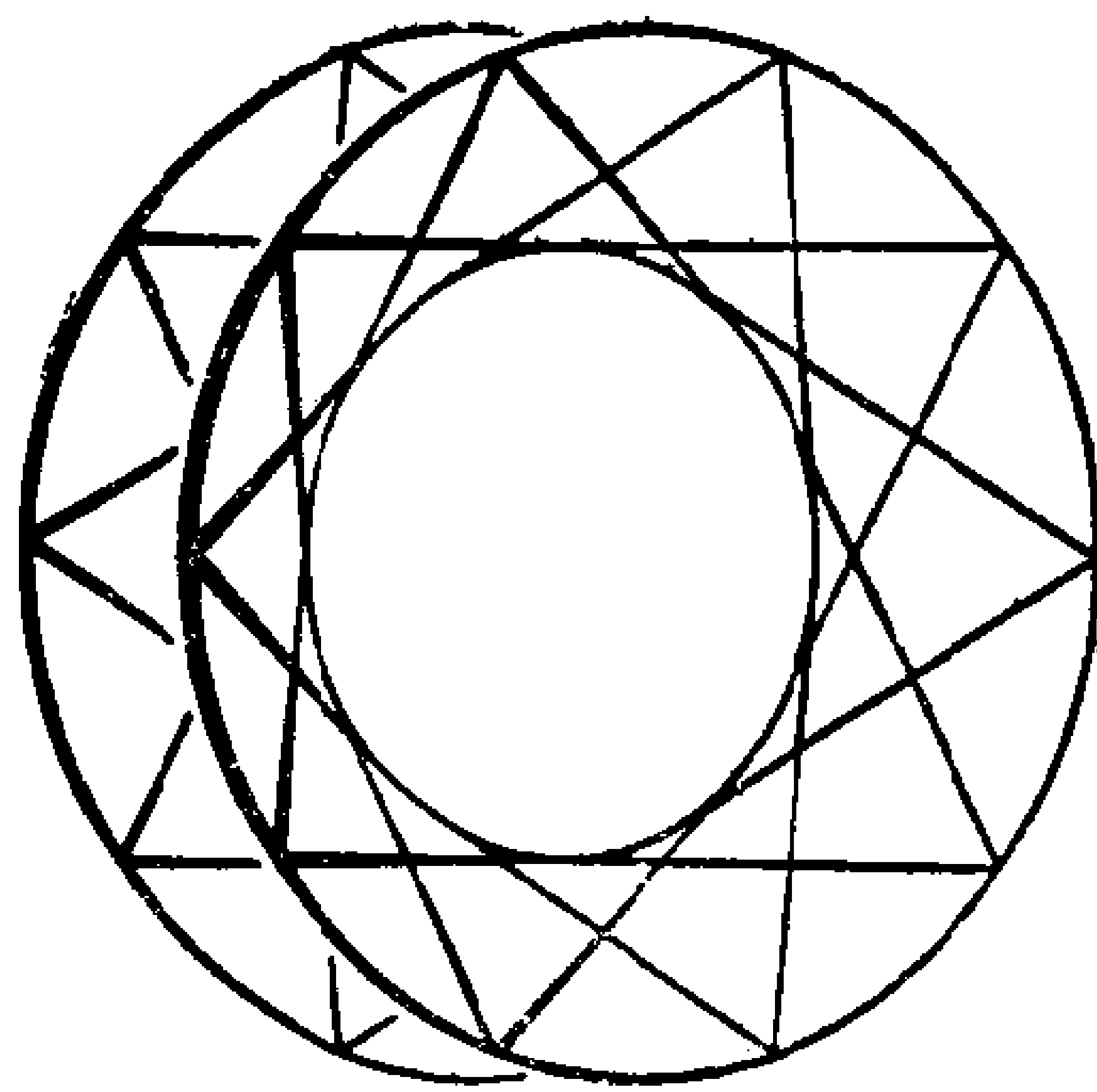


图 111

分被遮盖。所以这些直綫从一层穿过另一层时必和边緣相遇。另一方面，这些直綫不能与此曲綫相交，因为它的一側是空的。所以这些直綫必須是边緣的切綫。因此我們的空間六边形变成了平面六边形，它的各边成为圓錐曲綫的切綫；由此得出平面几何上的定理：

外接于一圓錐曲綫的六边形的三条对角綫相交于一点。

到此为止，我們仅对于作为单叶双曲面的边緣的圓錐曲綫証明了定理，卽首先是对于某些双曲綫和椭圓把定理加以証明。但是圓錐曲綫也可以是拋物綫。事实上，产生边緣的視綫，形成曲面的以 P 为頂点的切錐面，所以是二阶錐面(参看第 12 頁)。如果我們把象平面这样放置，使得它同这个錐面的母綫平行，则曲面在这个平面上的象是一拋物綫；因为边緣是錐面与象平面的交綫，所以在这种情况下圓錐曲綫是一拋物綫(参看第 12, 13, 8 頁)。

我們轉到視点 P(投影中心)在曲面上的情形。这时曲面上通过 P 的二直綫看起来成了两点，但曲面上其他的直綫仍然是直綫。因为一族中的每一直綫跟另一族中通过 P 的那一条直綫相交，第一族的直綫看起来成了一綫束，綫束的頂点是其他一族中通过 P 的直綫 g 的象。同样，第二族的直綫也成了一綫束。两个綫束的頂点不同，因为它們各自是通过 P 的二相异直綫的象。

据此，由空間六边形定理得到下面的推論：

一个平面六边形，如果它的諸边交錯地通过二定点，则三个对角綫共过一点。

关于三种圓錐曲綫(或退化为一对点的圓錐曲綫)的六条切綫定理是布朗香发見的，所以叫做布朗香定理。三个对角綫的交点，叫做布朗香点。

借助于上述的空間作图，事实上还沒有完全証明布朗香定理。因为可能有的布朗香六边形不是从我們討論过的空間六边形用投

影法得来的。然而确可証明，凡滿足布朗香假設的任何平面六边形，都可以用上述的空間六边形得出。

剛才所說的布朗香定理跟构形$(9_3)_1$有密切关系，而且解釋了为什么$(9_3)_1$的作图中最后一个結合条件自然滿足。事实上，按照图 112 和图 108 上的記法，可知 2, 4, 6, 3, 5, 7 各点作成一个諸边交替通过 8 和 9 两点的六边形。直綫 (1), (2), (3) 是六边形的对角綫，因此(3)必过(1)和(2)的交点 1，而且 1 就是六边形的布朗香点。

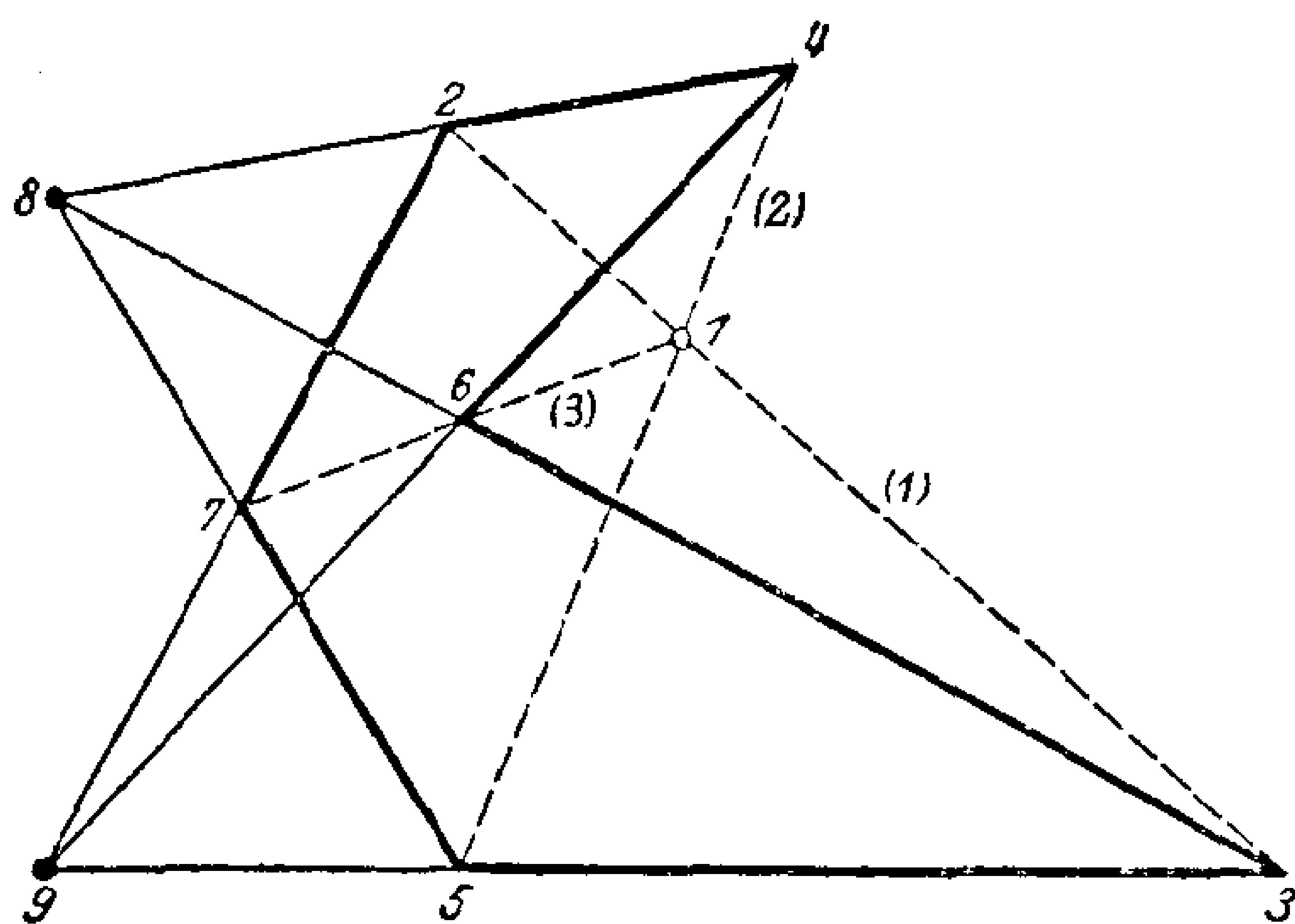


图 112

在我們的作图中，构形$(9_3)_1$各点的地位不是平等的。2, 4, 6, 3, 5, 7 諸点作成六边形，8 和 9 是各有三边通过的两点，1 是布朗香点。这里各点的不对称状态不是由于构形的本性，而是由于我們任意选擇的結果。其实也可以把 8 或 9 当作布朗香点；这只要看一看点 8 就够了(見图 113)，因为从图 112 上可看出，8 和 9 的地位完全平等。同样，也可以选擇 2, 4, 6, 3, 5, 7 中任一点当作布朗香点，因为这几个点都处于平等地位，所以只要証明对点 2 成立即可(見图 114)。

因为有这种內在的对称性，$(9_3)_1$就称为**正則构形**。恰恰象在

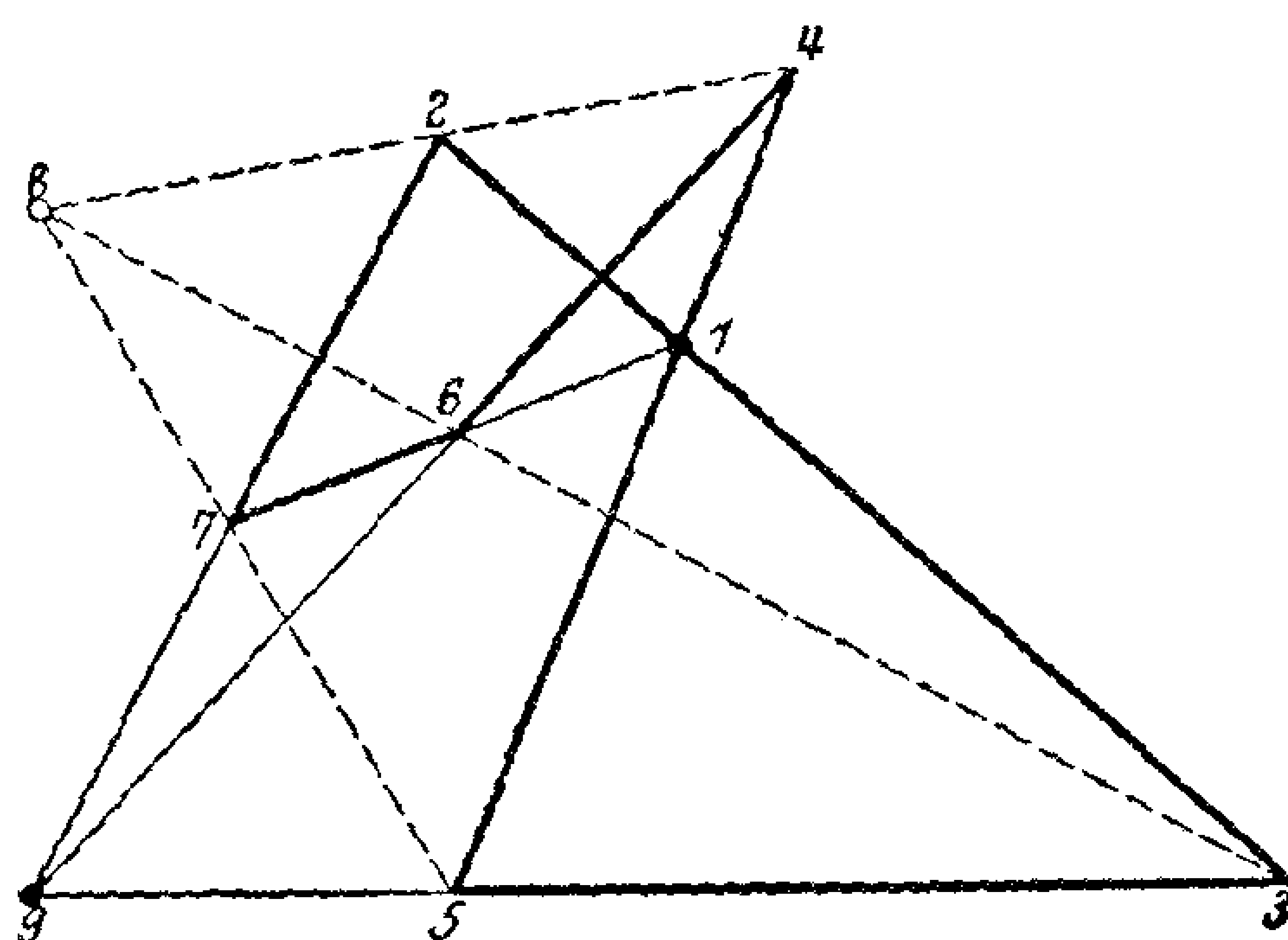


图 113

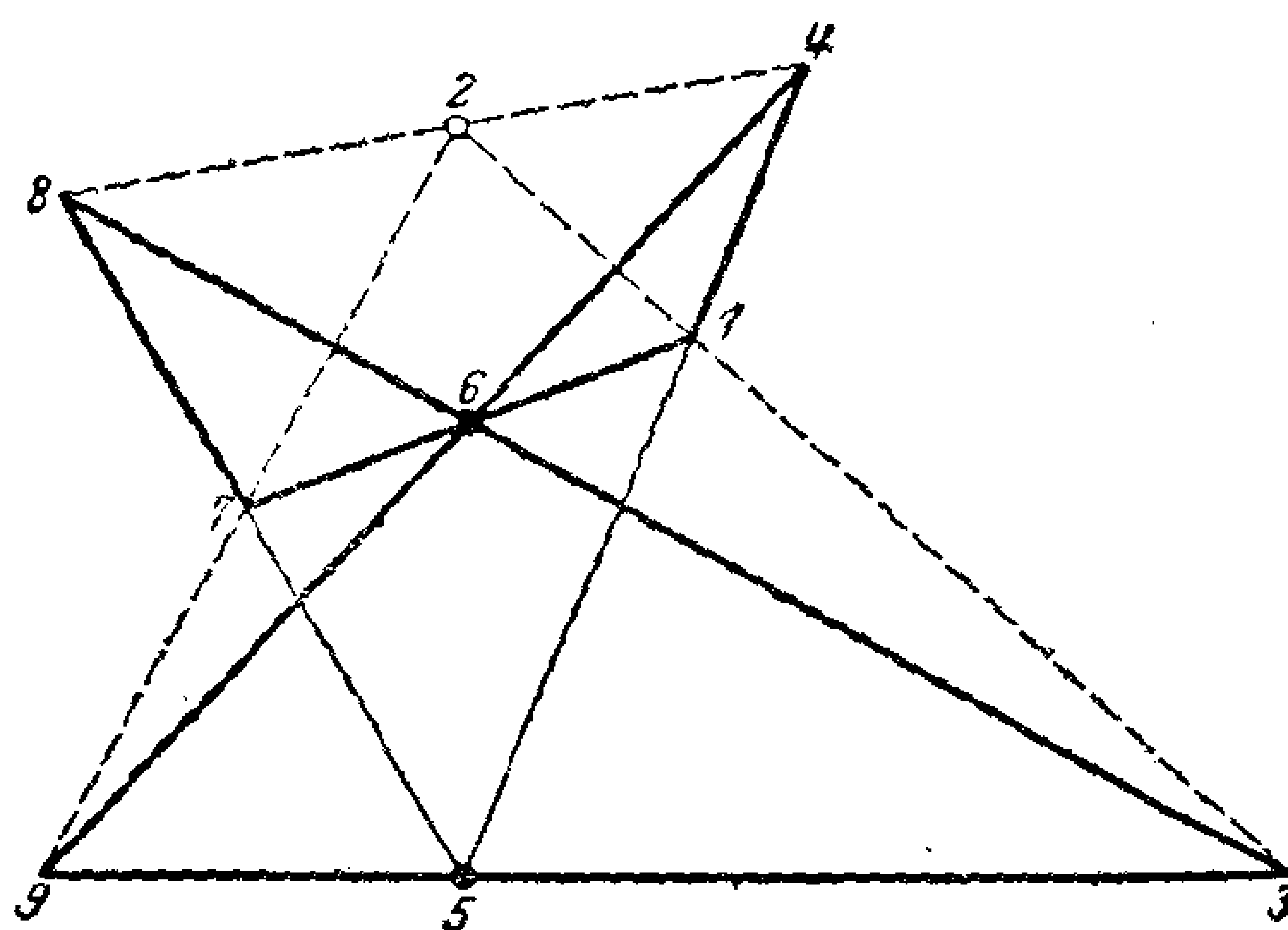


图 114

点系和多面体的研究情形，从构形在自身上的某种变换(即所謂自同构)，得到正则的概念。自同构的作用相当于点系和多面体中的迭合变换。如果我們可以如此交換点和直綫，使交換后的构形既沒有旧的結合性丟掉，也沒有新的結合性加进来，則該变換即是这个构形的一个自同构。不难証明，这些自同构作成一个群。我們說，一个构形称为正則的，如果这个群是"可迁的"，也就是說，构形包含足够的变換，使得构形中的任一点，能通过一个自同构轉換到构形中的另一点。

要研究构形的自同构，只要抽象地研究构形的表就够了。用这种办法，可以証明，构形(7_3)和(8_3)的表是正则的。同样，构形$(9_4 12_3)$（第103頁）的表也是正則的。

現在我們轉来看(9_3)的另外两种构形。这两种构形分别如图115和116所示。要知道(9_3)的三种构形的区别何在，可以这样去

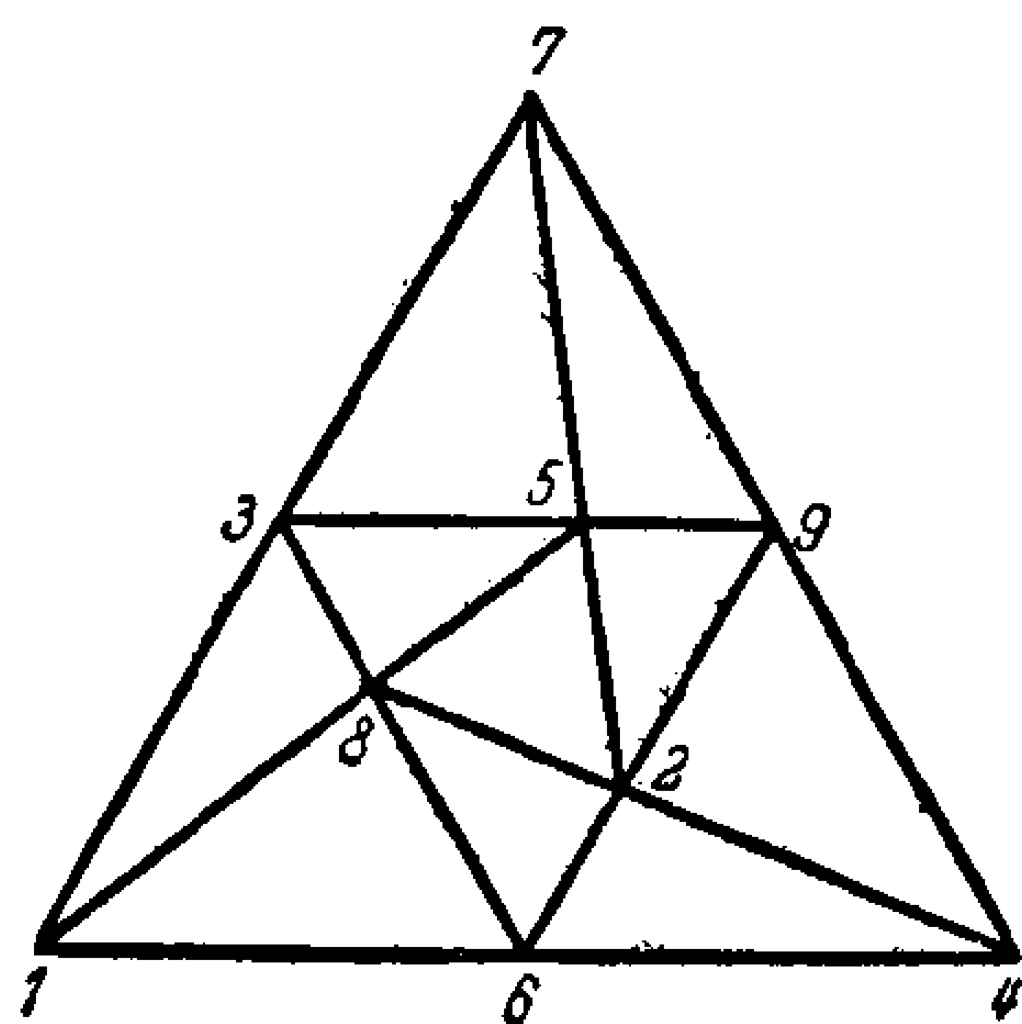


图 115

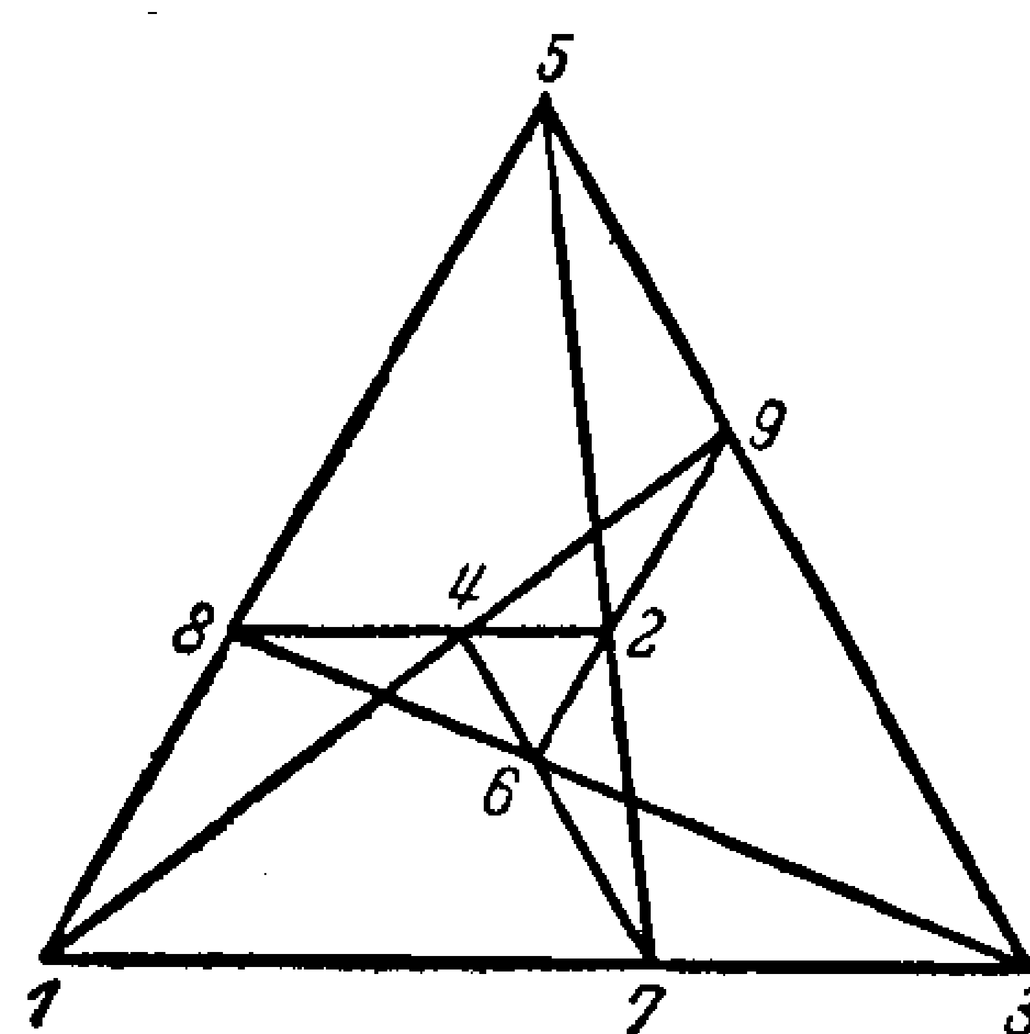


图 116

想：因为在构形(p_3)中的每一点恰好同其他六个点以构形的直綫相連，所以在$p=9$的情况下，对构形中的每一点应有另外的两个点同这个点不相連。例如，在$(9_3)_1$中，点8和9同1不相連。也沒有直綫連結8和9，所以189形成一个非連通点的三角形。同理，256和347也各形成一个非連通点的三角形（图117）。把同

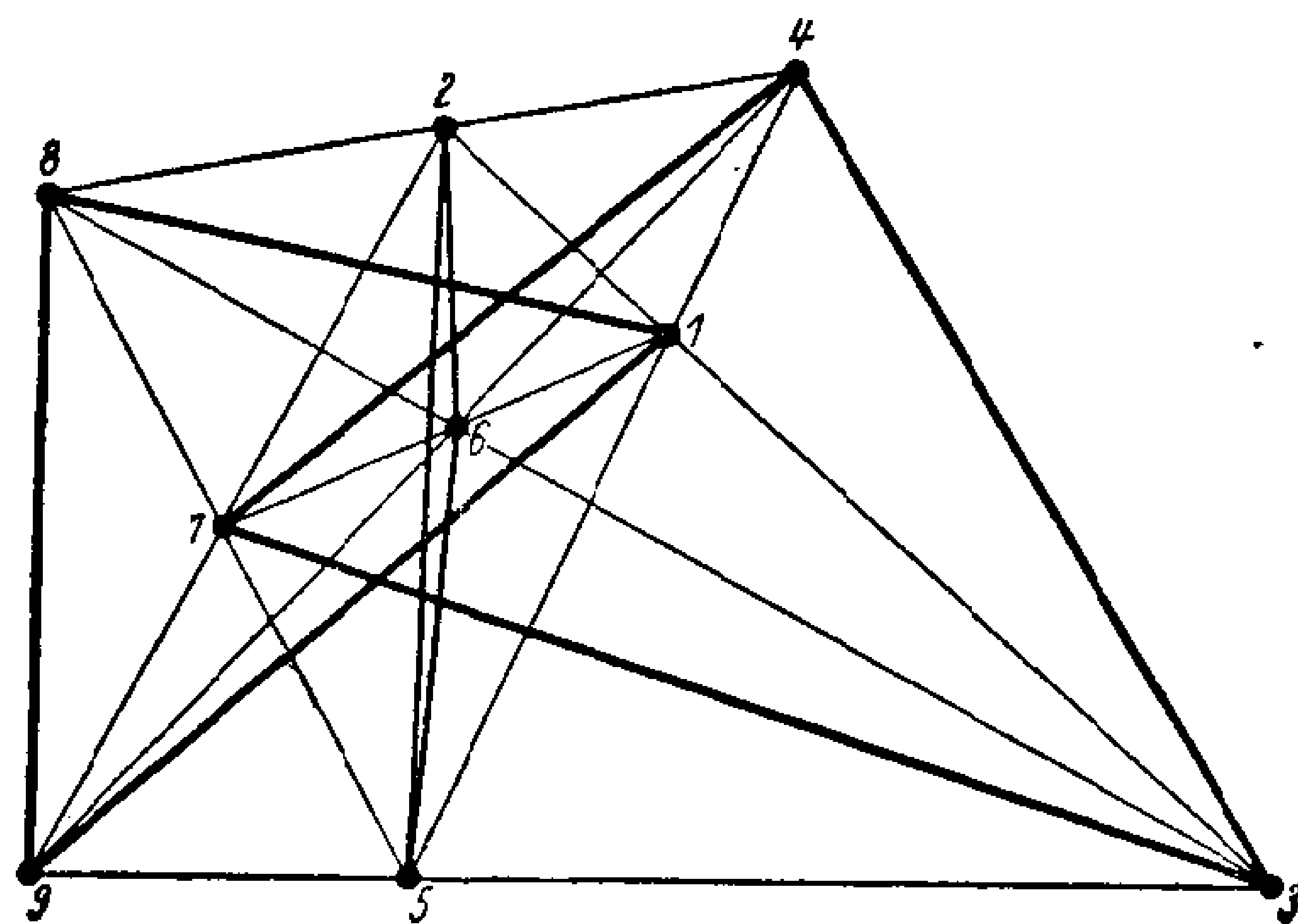
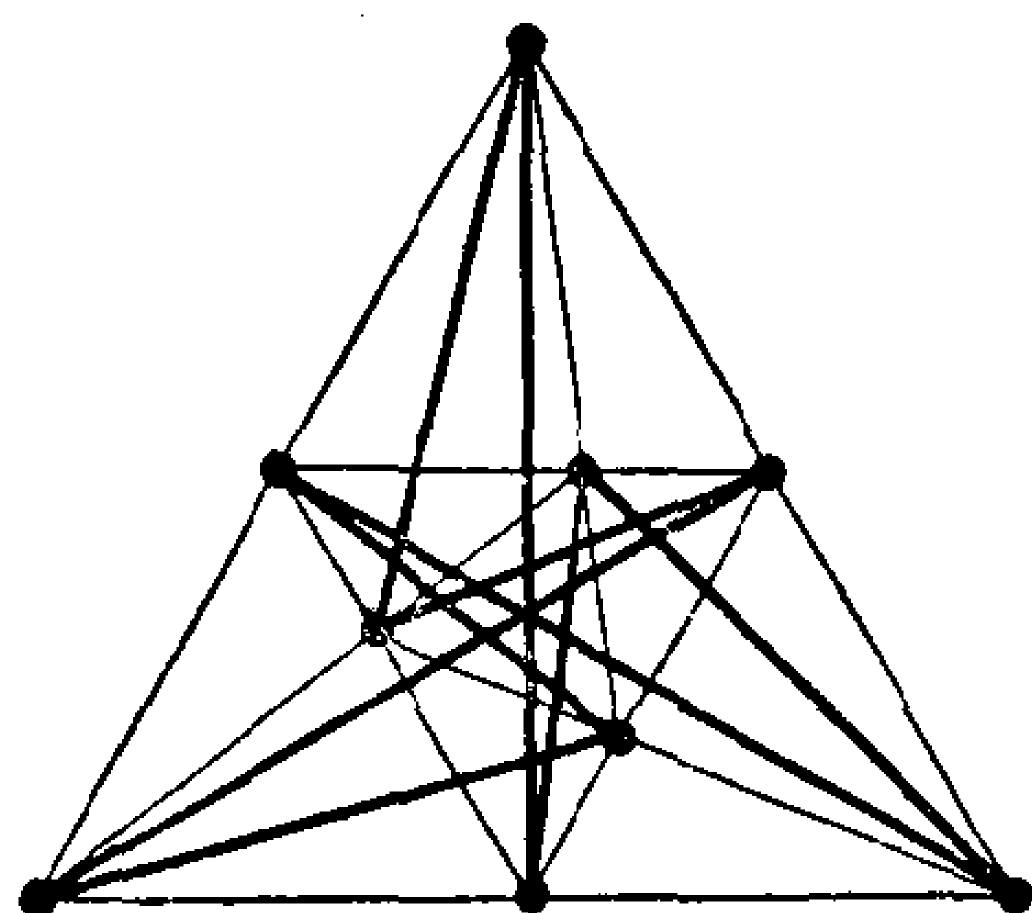
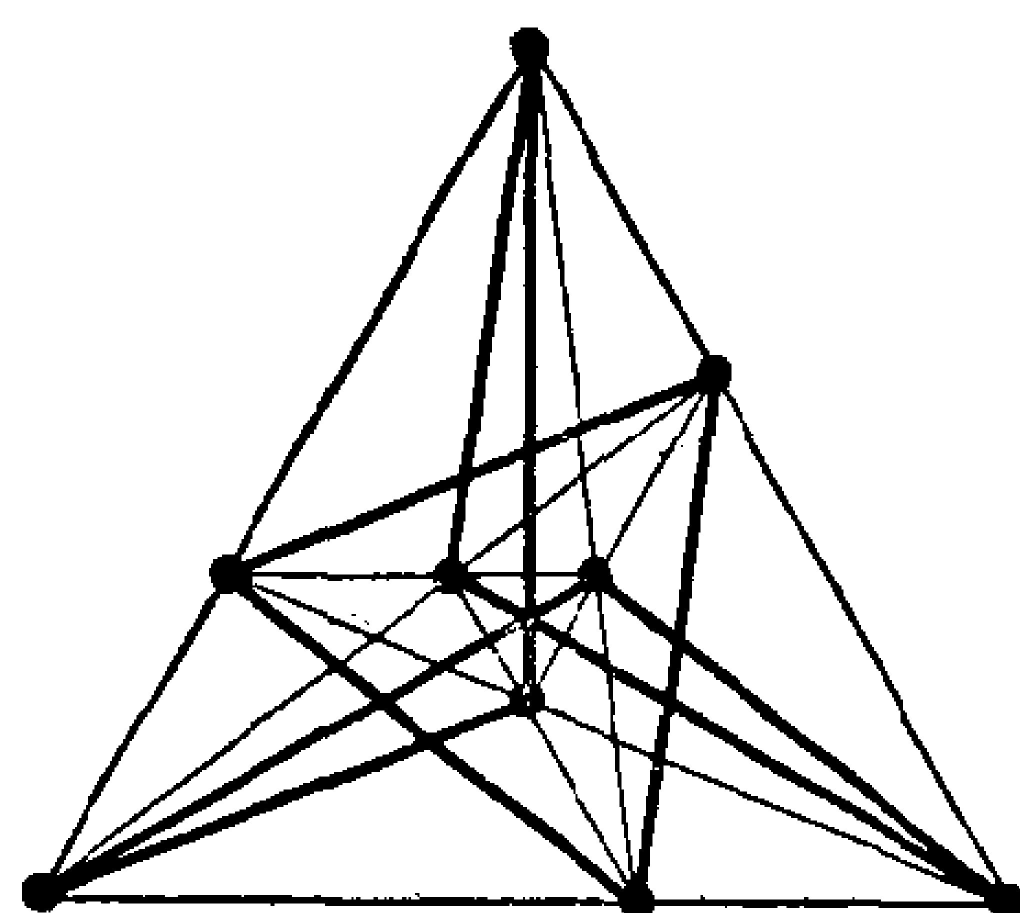


图 117

样的办法应用于$(9_3)_2$和$(9_3)_3$，即把非連通的諸点用綫段連接以作成多边形，则在$(9_3)_2$的情况下得一个九边形(图 118)，在$(9_3)_3$的情况下得一个六边形和一个三角形(图 119)。由此可知，第一，图 108, 115 和 116 三張图实質上是不同的构形，不仅是点的位置不同而已。第二，我們可以断定，$(9_3)_3$不是正则的。因为显然自同构只能变换六边形的各点到六边形的各点，而不能变换到三角形的各点。与此相反，$(9_3)_2$的非連通点的有規則的排列，使我們猜想此构形是正则的；进一步的研究，可以証实这句話是对的。


图 118


图 119

步步仿照作$(9_3)_1$的方法，可以作出(9_3)的另外两个构形。这时便会发现，在这两种情况下最后的結合条件不再是自然满足的，只有在前面的步驟中作好了特别的准备后方能满足。这就解釋了为什么$(9_3)_2$和$(9_3)_3$不如$(9_3)_1$那样有原则上的意义。前两种不能給出投影几何的一般定理。图 120 是表示不能作出$(9_3)_2$的最

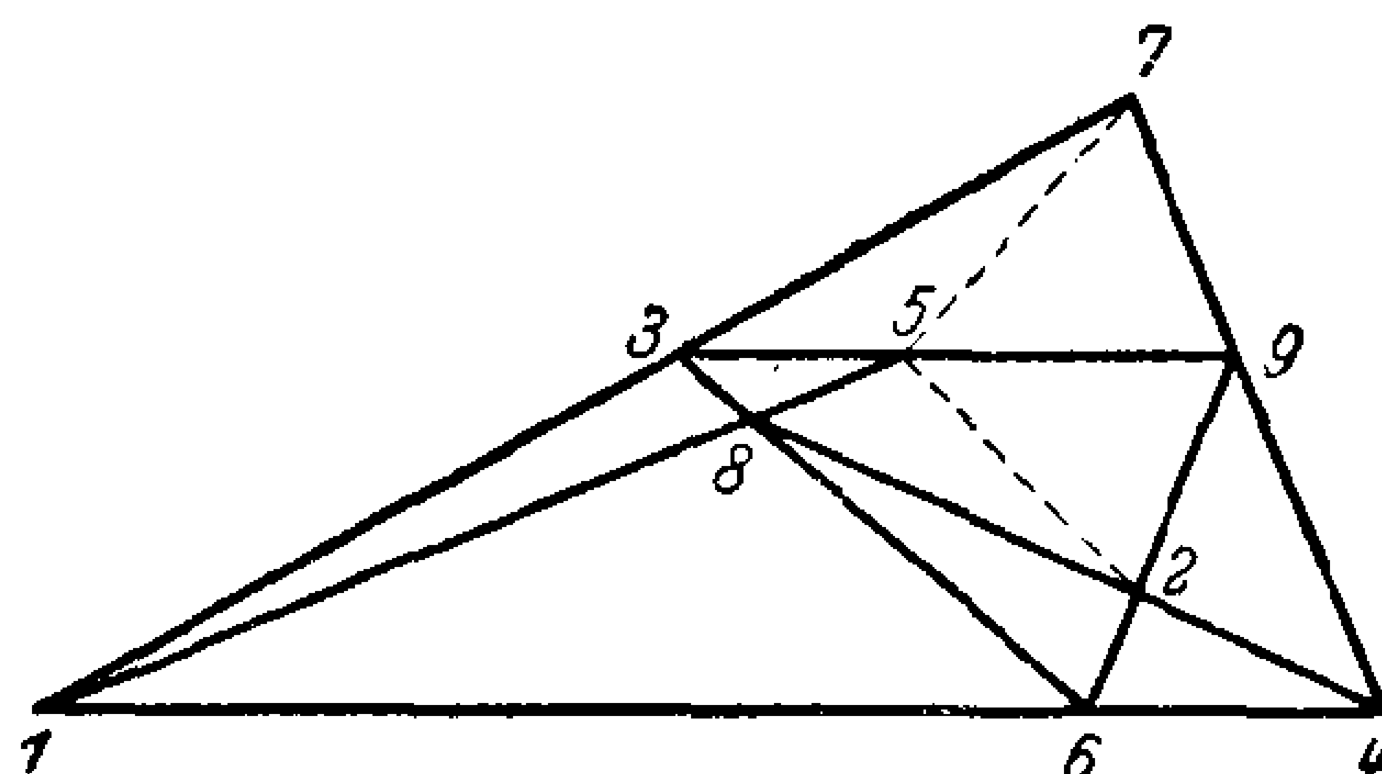


图 120

后一条直綫的例子。

不过，使$(9_3)_3$的作图成为可能的必需的輔助作图具有其特殊的性質：只須用一根直尺就可完成。这样，$(9_3)_1$和$(9_3)_3$都可只用一根直尺作出①。解析上，这表示构形的所有元素可以由陆續解一綫性方程組来定，其中每一方程的系数是前面几个方程所决定的构形的特征量的有理函数。当然直綫的方程总是綫性的。但是为了要得出一个构形的方程組，組中某些方程的系数就須从其他若干方程用消元法去計算，因为某些直綫是前面已經作出的一些直綫固定下来的。一般地，这种消元法常产生高次方程。在(8_3)的情形下就是如此，不然我們就不会得出复元素。与此相反，可証明构形(9_3)的所有的輔助方程都是綫性的。因此三种构形都可在实平面上作出，而且只需一根直尺卽可。

构形(9_3)中元素的排列可以用好多种方法去解释。例如每种构形都可以当作由三个三角形組成，第一个內接于第二个，第二个內接于第三个，第三个又內接于第一个②。

这样的三角形組例如图121中的157，239和468；图122中的258，369和147；图123中的147，258和369。同样，(8_3)可以解释作一对相互內外接的四边形(第103頁图107)。(9_3)的三个构形都可以解释作內外接于自己的九边形。这样的九边形如图124中的2361594872，图125中的1627384951和图126中的1473695281。在构形$(9_3)_1$中还可以运用适当的自同构求出許多

---

① 为了作出$(9_3)_2$，須要定出直綫和二阶曲綫的交点。这个作图不能仅用直尺实現——俄譯者注。

② 这里所説的"內接"是指广义的內接。例如在图121上，三角形468称为內接于三角形157，因为4在直綫15上，6在直綫17上，8在直綫75上，虽然4和8不在綫段15和75上而在其延长綫上。同样，"外接"也指广义的。三角形A叫做"外接"于三角形B，如果B"內接"于A。內外接三角形这一段注释也适用于下面就要談到的一般多边形——英譯者注。

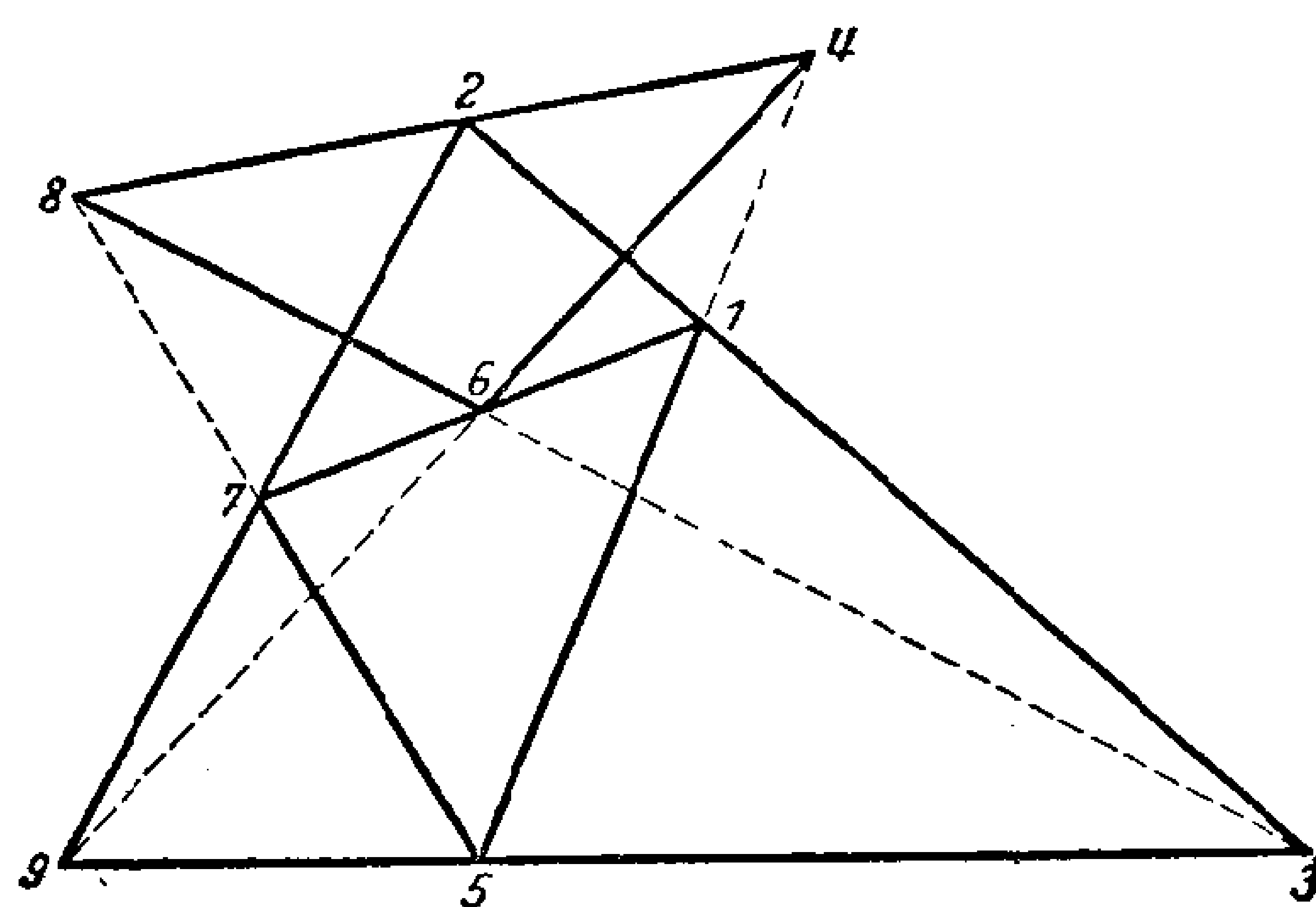


图 121

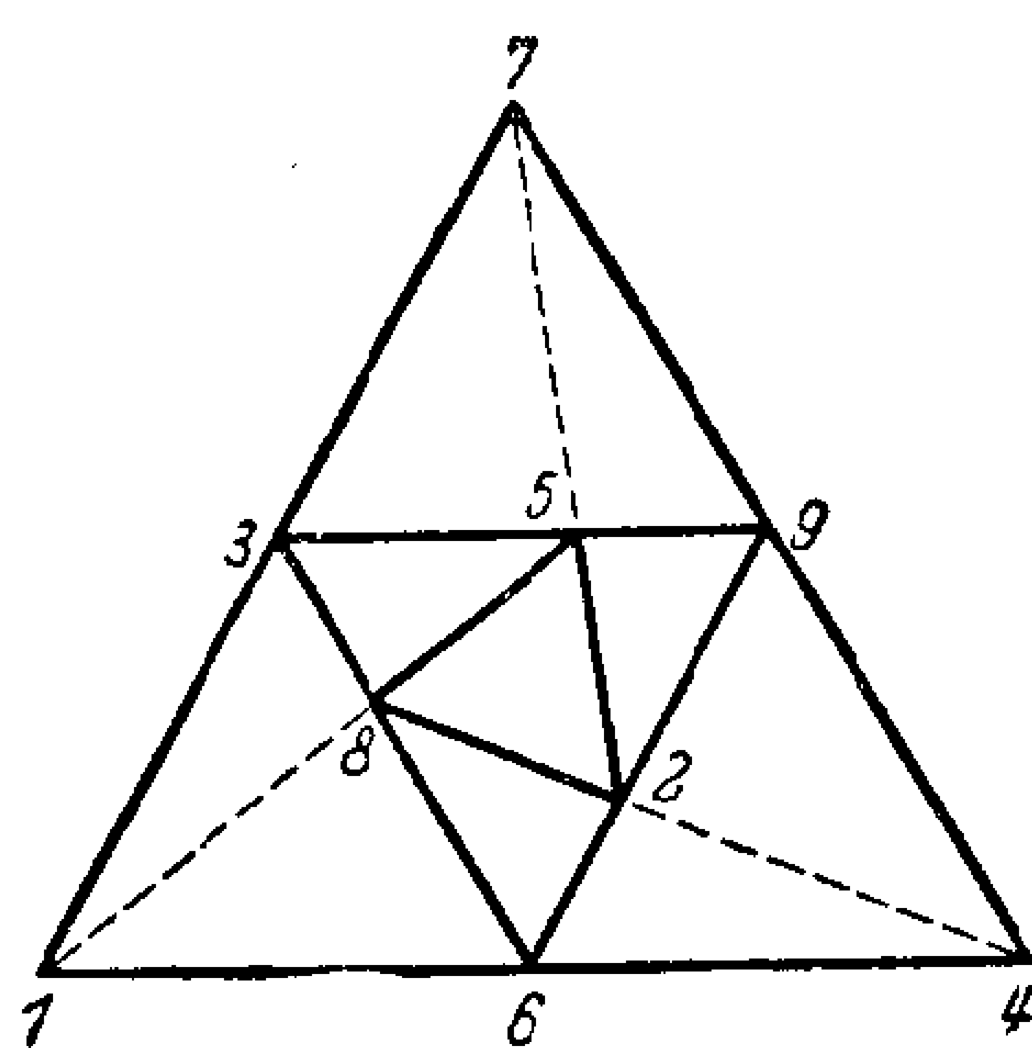


图 122

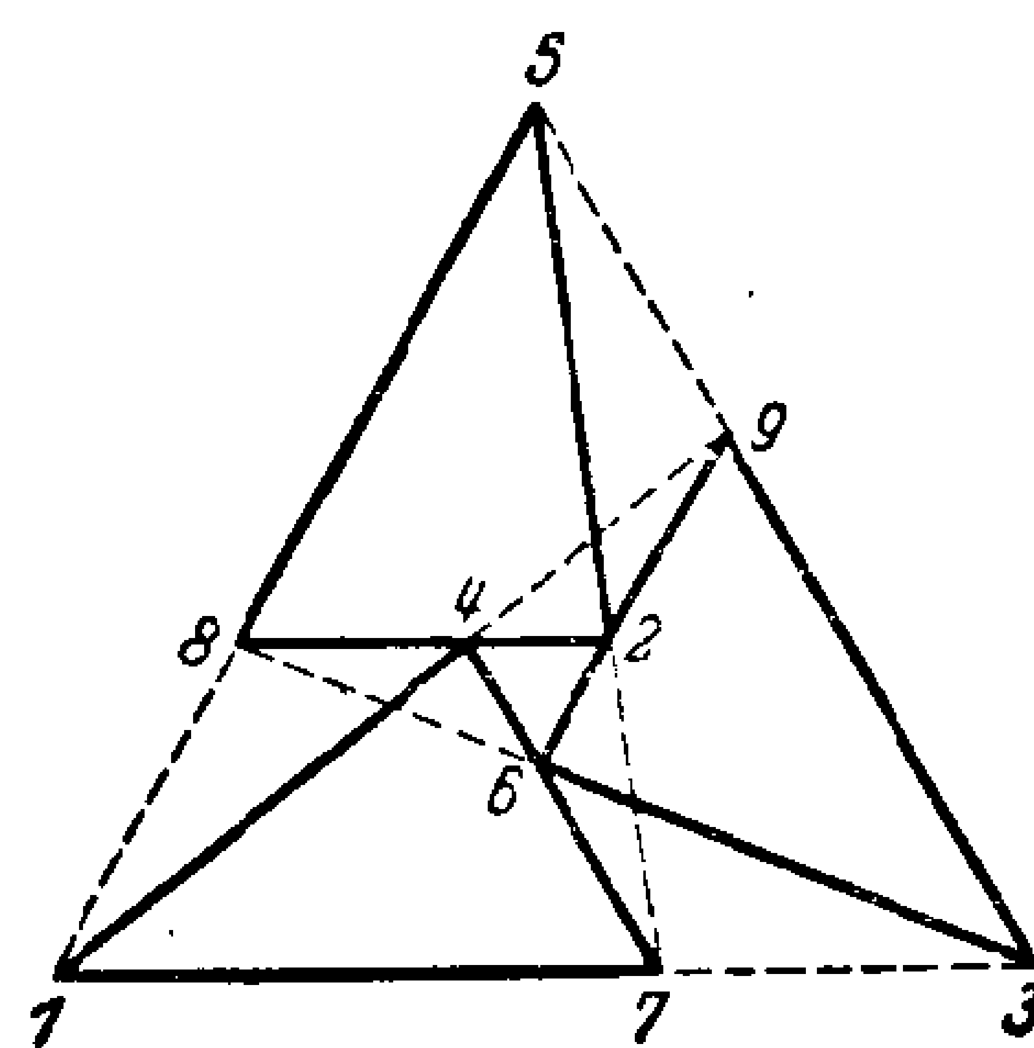


图 123

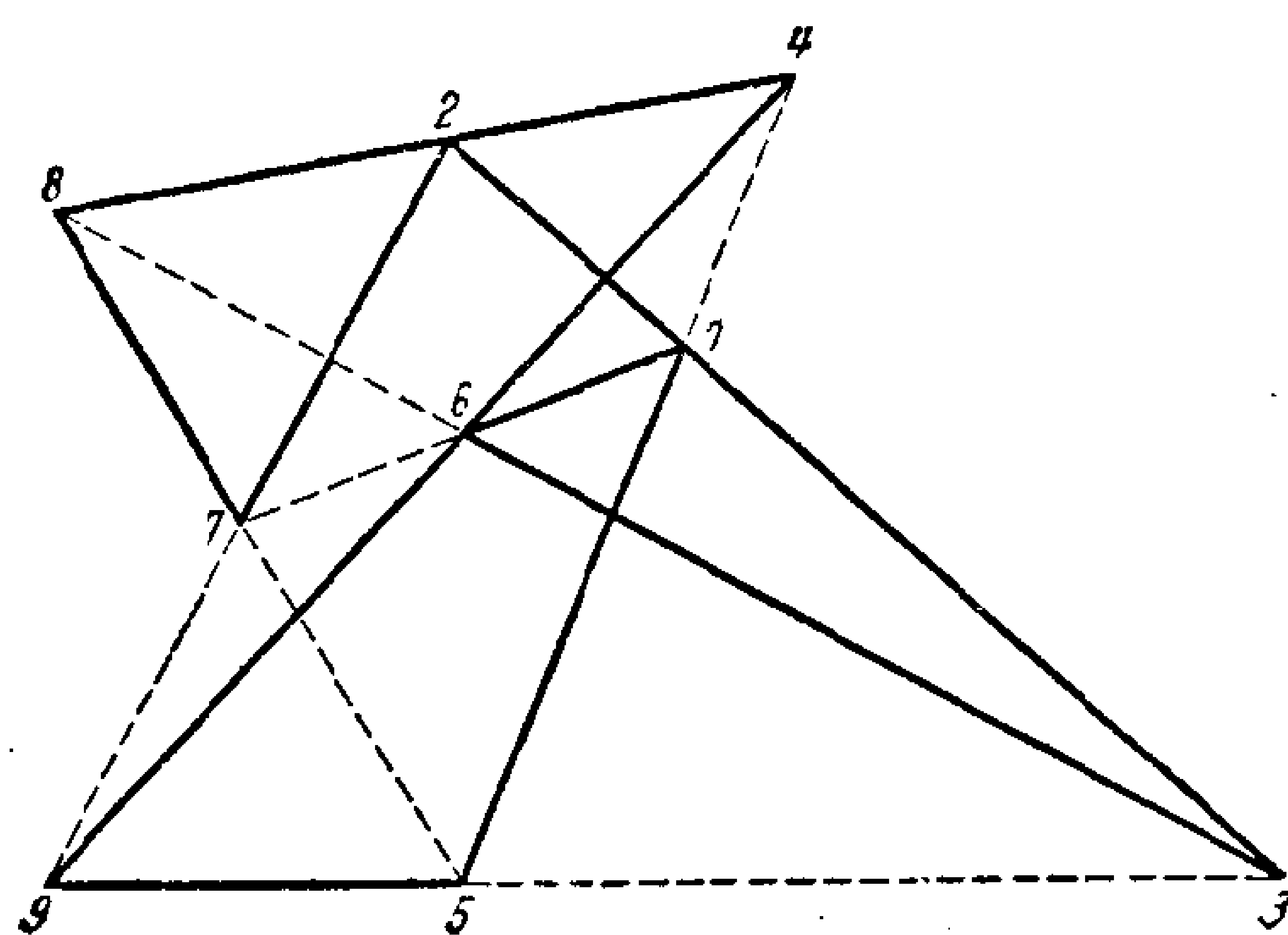


图 124

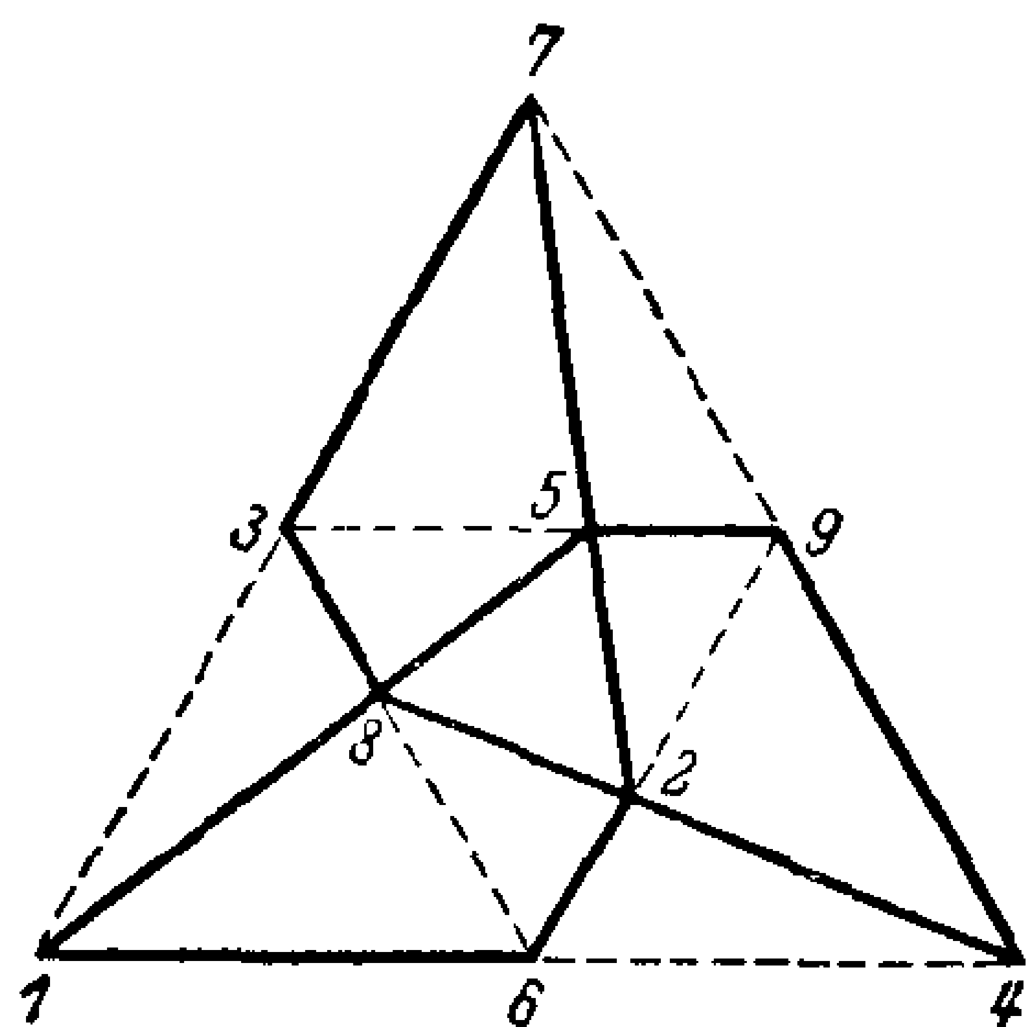


图 125

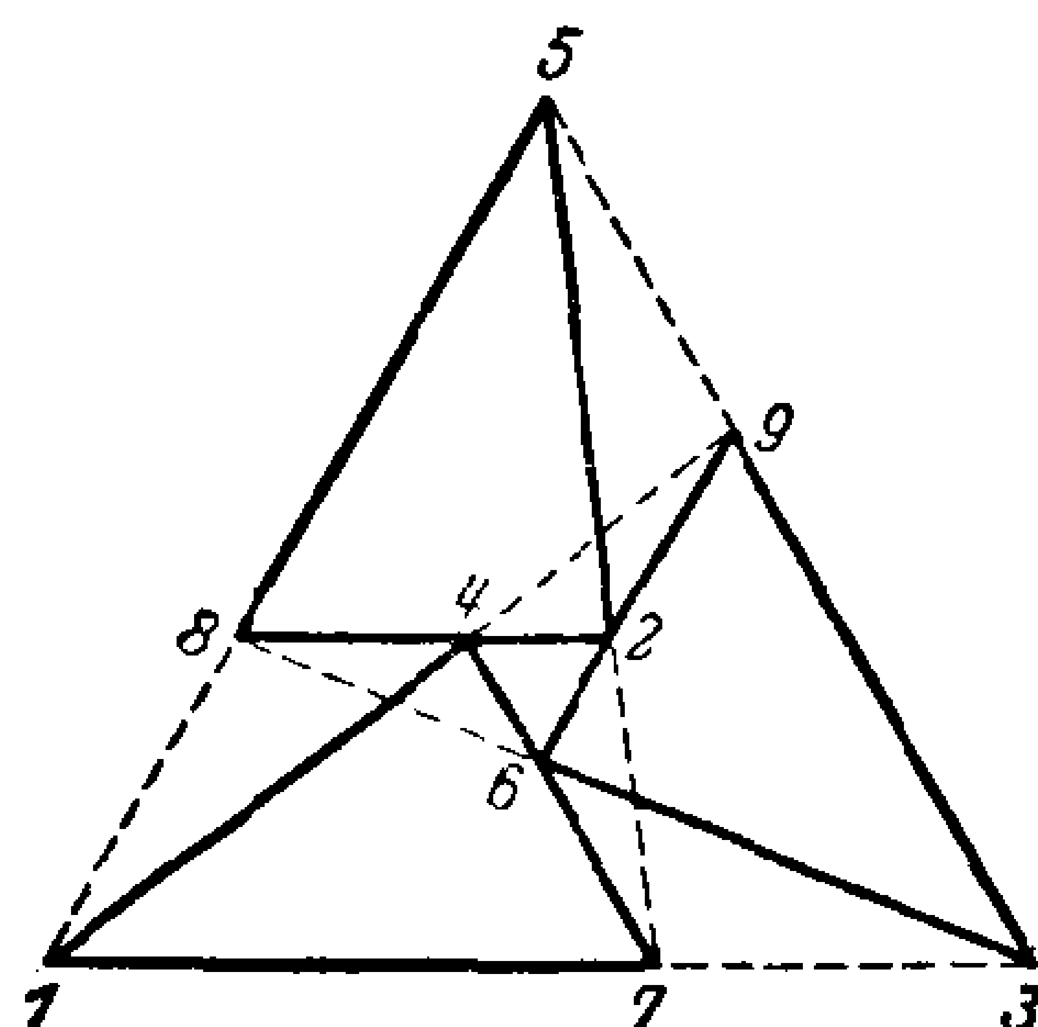


图 126

其他有同样性质的九边形。

內外接于自己的 p 边多边形的作图，必然导致构形 (p_3) 的作图。因为多边形的每一边除通过它所連接的两个頂点之外，还通过多边形的另外一个頂点，同样，每个頂点必在多边形的三边上。在这一句論断里唯一必需的假定是多边形的所有边和角处于平等的地位。倘若不作如此假定，多边形的一边将通过額外的两个或两个以上的頂点，那么多边形的某一个其他的边就不含有頂点。

(7_3) 和 (8_3) 也可以解释作这种类型的 p 边多边形。依构形表的記法，七边形 12457361 和八边形 126534871 都是內外接于自己的多边形。

要了解构形的另外的重要性質，必須研究对偶原理。正是这个原理，使投影几何具有特别的明晰性和对称性。对偶原理可以从推証布朗香定理的过程中所用的投影方法直观地推导出来。

§ 18. 透視画法，无穷远元素和平面上的对偶原理

如果我們把水平平面上的风景画在直立平板上（图 127），則在水平平面上的象有一条界直綫 h——水平綫。在水平平面上不与直立平板平行的两条平行綫，它們的象是交于水平綫上的两条直綫。在透視画法理論里这样的交点叫做平行綫的沒影点。

这样，我們知道，用中心投影得来的平行綫的象，一般不平行。还可以知道，这种映象法也不是一对一的。象板水平綫上的各点不代表原来平面上的任何点。反过来，在平面上也有一些沒有象的点，这些点便是在观察者 R 的正下方且与象板平行的直綫 f 上的各点（图 127）。

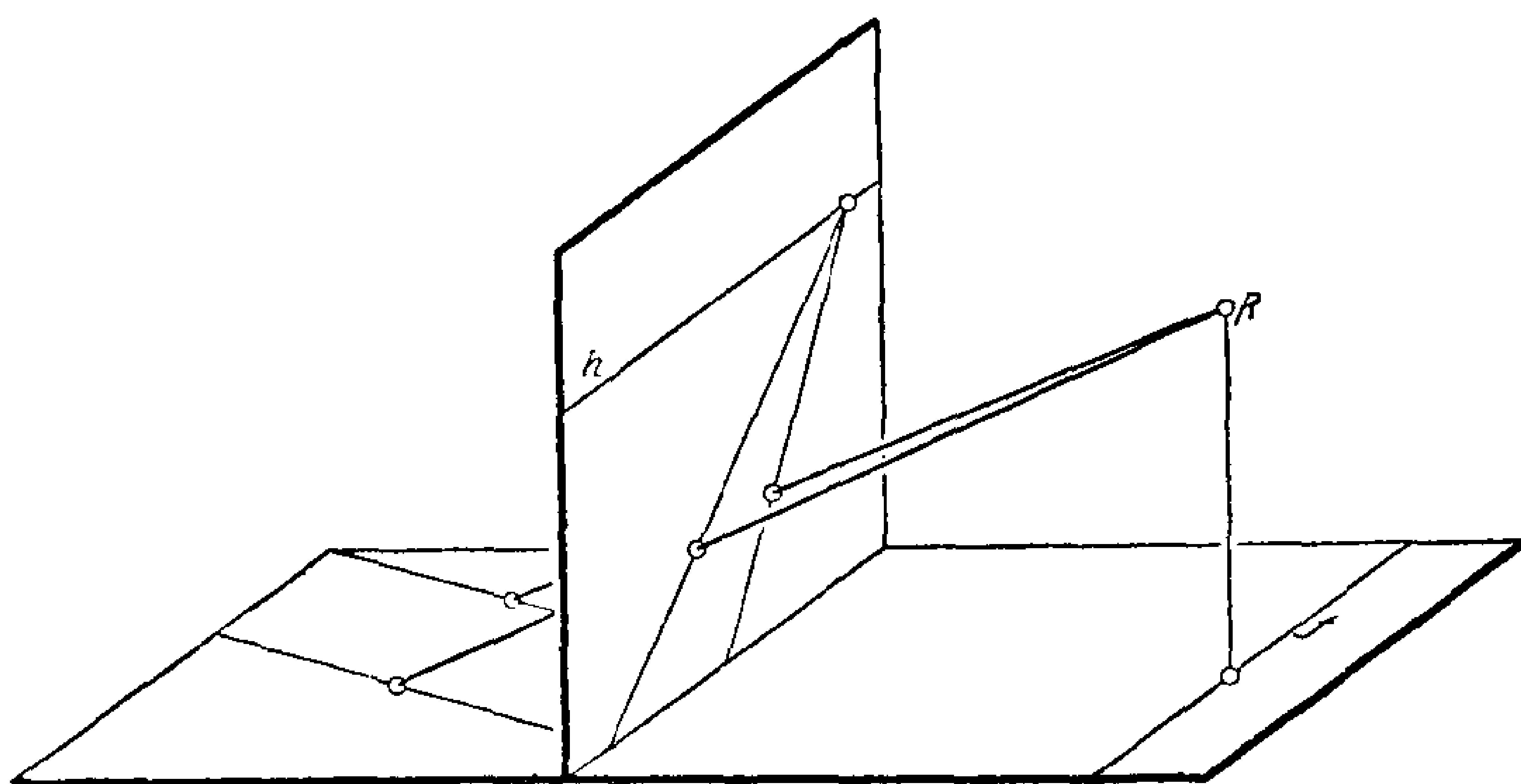


图 127

假若把平面上的每一点換成通过該点的直綫，就可以更簡单地描述上述現象。比方說，如果把平面 e 上的每一点 P（图 128）換成直綫 $AP=p$，其中 A 是观察者眼睛所在的地方，那么 P 在任意放置的平板 t 上的象是 t 与直綫 p 的交点 P'。这样一来，P 一經給出，映象就被确定了。假定 P 在 e 上描繪一曲綫，則 p 画出

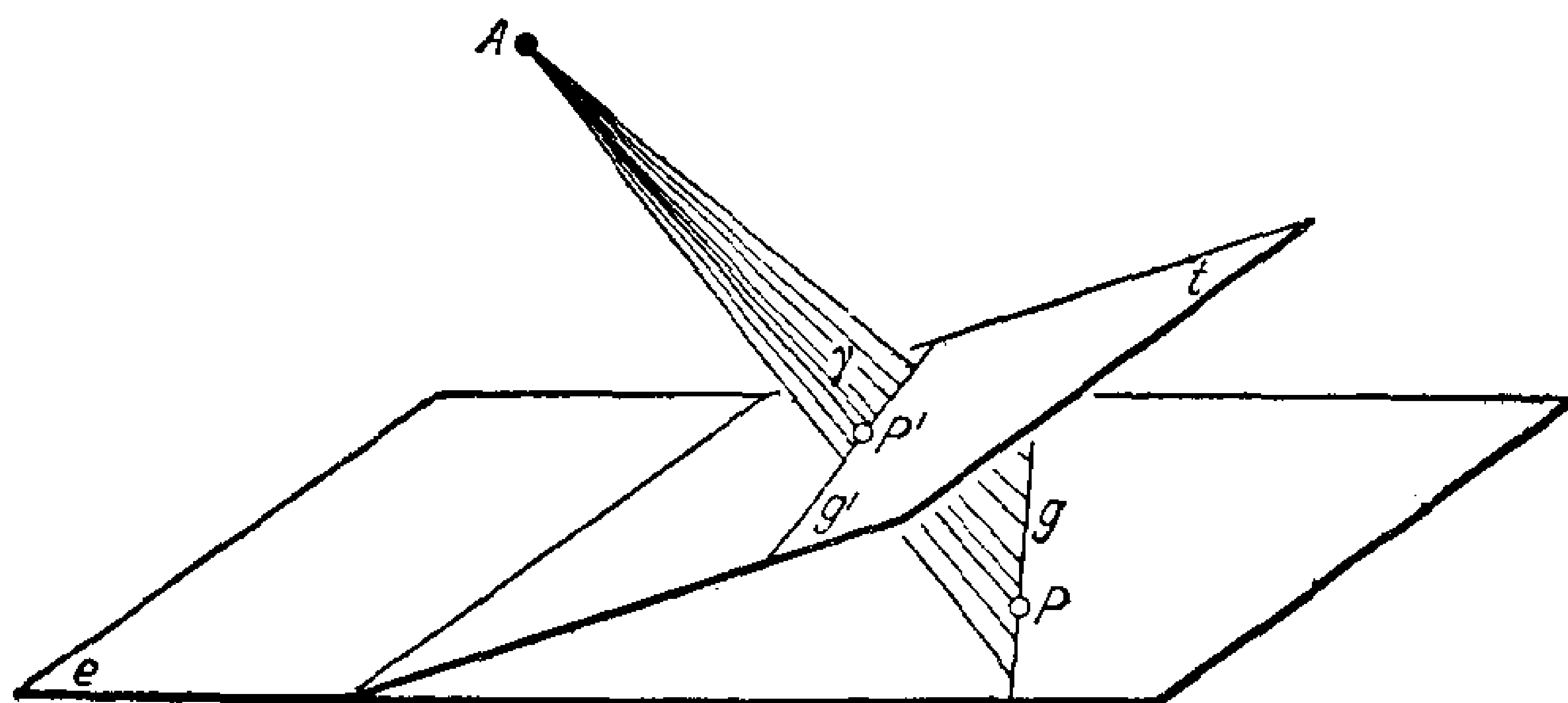


图 128

以 A 为頂点的錐面。曲綫在 t 上的象是錐面和 t 的交綫。特别地，若 P 在 e 上划过一直綫 g，則錐面就变成包含 A 和 g 的平面 γ。这样，在 e 上的点换作通过 A 的直綫，而 e 上的直綫将产生通过 A 的平面。直綫 g 在 t 上的象是 γ 和 t 的交綫，也就是另一直綫 g'。直綫永远变换成直綫是中心透視画法的最重要的性質。

上面我們是将透視映象表为互逆的两步变换的結果。第一步将平面上的点(P)和直綫(g)换成通过A的直綫(p)和平面(γ)，第二步将通过 A 的直綫和平面换成另一平面(t)上的点(P')和直綫(g')。因为这两步相互对称，所以只須考虑第一步即可。

变换 $e\to A$ 只有在給定的方向上是完全确定的，而在与此相反的方向 $A\to e$ 上，就不是如此。通过 A 而且平行于 e 的直綫，在映象中有特殊的地位，它不对应 e 上的任何一点。但通过 A 的其他任一直綫，总对应 e 上的一个确定的点，此即直綫与 e 的交点。通过 A 同 e 平行的諸平行綫 p_u 布滿了通过 A 而且平行于 e 的平面 γ_u(图 129)。γ_u 在通过 A 的一切平面中也是映象 $A\to e$ 的特殊情形。因为通过 A 的其他每一平面都对应 e 上的一个确定的直綫，即該平面同 e 的交綫；但沒有与 γ_u 对应的直綫，因为 γ_u 同 e 不相交。

这些例外情形最好能在概念上予以消除，办法是假想在平面 e 上加入一些額外的"无穷远"点 P_u。这些点約定为在映象 $A\to e$ 之下諸射綫 p_u 的象。这些点的集合，就認为是平面 γ_u 的象。为了使这一平面比起其他通过 A 的平面来沒有什么特殊，我們必須把 γ_u 的象叫做一直綫。于是我們就說平面 e 上的无穷远点构成所謂 e 上的"无穷远直綫" g_u①。平面 e 經过如此补充之后，很明显，从 e 上的点和直綫到通过 A 的直綫和平面的映象便完全确定而

① "无穷远"一詞由这样的事实得来：从人的眼睛到 e 上一点引視綫，当此点在一定的方向上无限远离时，此視綫趋近于直綫 p_u 中的某一条。

且是一对一的。

用中心透視法将 e 投射到另一平面上，馬上可以看出上述定义便利之处。对于平面 t，也象平面 e 一样，补充以該平面上无穷远直綫上的无穷远点。不过，除非 e 同 t 平行，在映象 $A\to t$ 之下和 t 上的无穷远直綫 l_u 对应的平面不是 γ_u，而是另一平面 λ。λ 同 e 交于一直綫 l。这样看来，在透視映象 $e\to t$ 之下，第二个平面上的无穷远直綫上的点和第一个平面上的普通点相当。只有引入无穷远点，才能在中心透視投射之下，使一平面上的点和直綫与另一平面上的点和直綫成为一对一的映象。在这种映象里，无穷远点同普通点处于平等地位。

現在来看看究竟如何扩充点和直綫的結合概念以适应新加入的无穷远元素。和前面一样，仍旧从映象 $e\to A$ 开始。我們知道，e 上的一个普通点 P 和普通直綫 g 称为結合的，当且仅当跟它們对应的 p 和 γ 是結合的。把这个推广到 e 上的任意点和任意直綫上去，就成为，一个无穷远点 P_u 和一条直綫 g 称为結合的，如果射綫 p_u 同 γ 結合。这个定义当 γ 同 γ_u 重合时，也就是說，当 g 是 e 上的无穷远直綫时，沒有告訴我們什么新的东西；但当 g 是一条普通的直綫，則 γ 与 γ_u 交于一条定直綫 p_u。由此可見，每一通常的直綫恰有一个无穷远点，即該直綫同 g_u 的交点。如果 g' 同 g 平行，那么这就是說，包含 g' 的平面 γ' 通过 p_u（图 129）。因此我們可以說，当且仅当二直綫有相同的无穷远点，二直綫才是平行的。这也就是寻常所說的“平行綫相交于无穷远点”的意思，这句話如不加解释本是沒有意义的。从这里我們还明白了在本章开始所提

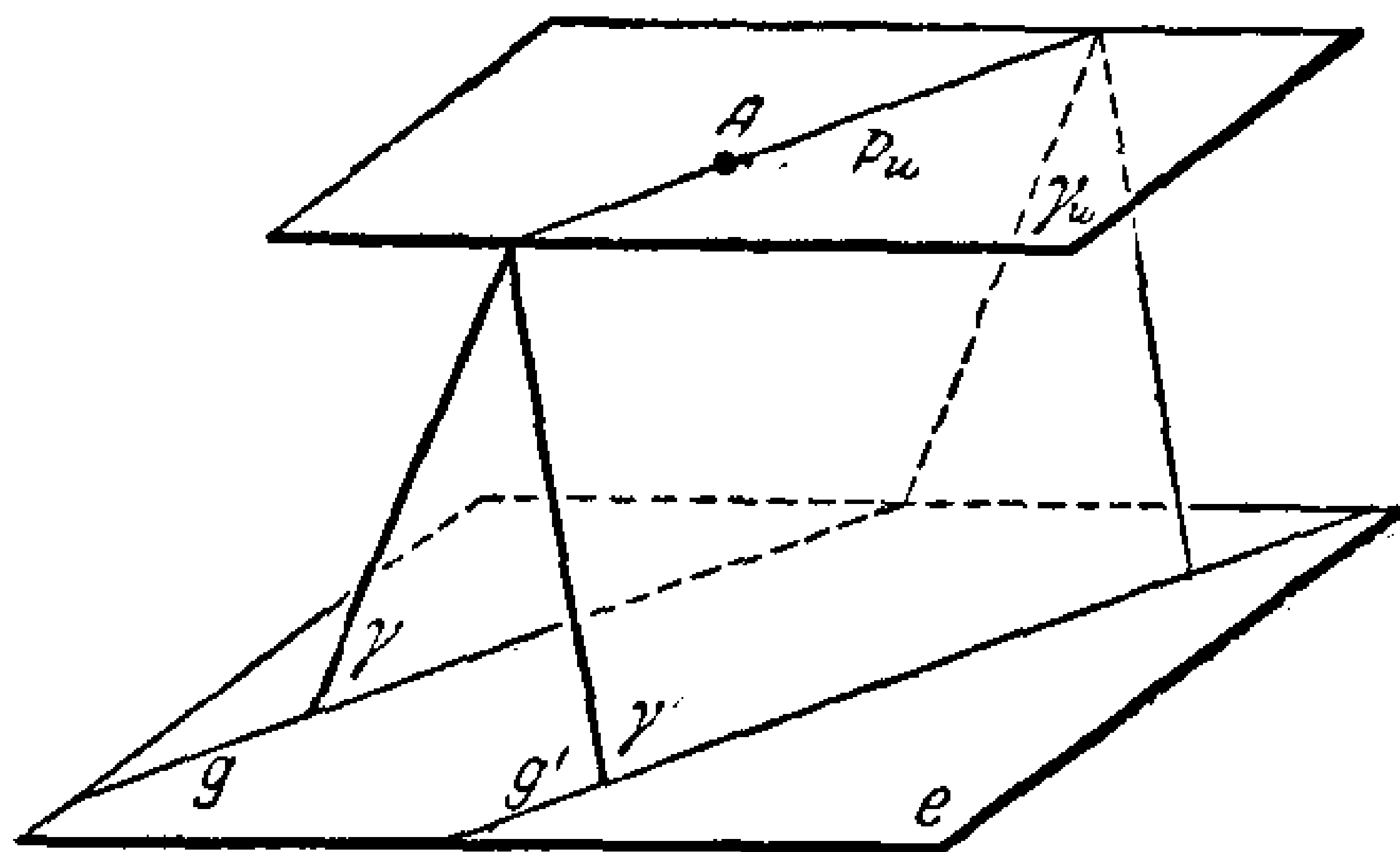


图 129

到的二平行綫在水平綫上出現交点的理由。

下面我們举圓錐曲綫为例，来說明引入无穷远元素后几何概念如何簡化了。我們在第一章中証明过，圓錐曲綫可以作为平面与圓錐面的交綫，所以它們都可以看作圓的透視象。按照沒有投射綫或有一条射綫或两条射綫平行于象平面，便分别得出橢圓或抛物綫或双曲綫。这句話也可以这样說：圓錐曲綫是一橢圓或是一抛物綫或是一双曲綫，按該曲綫与无穷远直綫不相交或是交于一点或两点而定。作中心投影于另一平面上，則圓錐曲綫变为另一圓錐曲綫，它或者与水平綫不相交，或者相切，或者交于两点，三者必居其一。究竟象是哪一种的圓錐曲綫，須看象平面的位置如何。

在其他例子中，中心投影也是从特殊图形得到一般图形的重要工具。例如，完全四边形(第 98 頁)可以从图 130 上的簡单图形得到。

可是无穷远元素的重要性主要还在于：引用了无穷远元素就

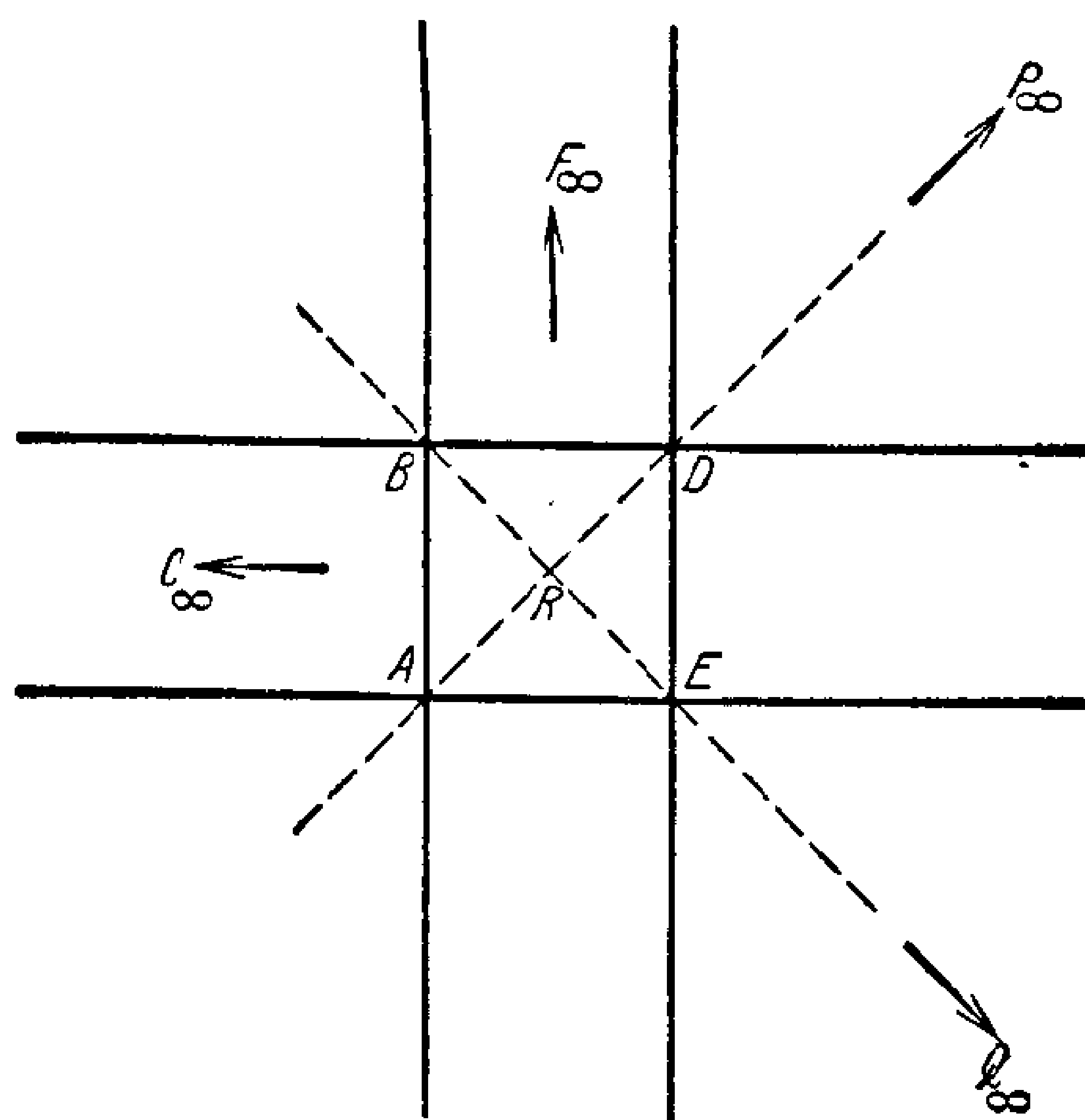


图 130

能改变并大大簡化平面几何的公理基础。如果只限于平面上的有限点，点和直綫的結合关系适合下面两个公理：

1. 二不同点决定一条直綫，此二点与此直綫結合。

2. 二不同点只决定一条直綫，此二点与此直綫結合。

从第二个公理可知，在一平面上的二直綫或者有一交点或者沒有交点。因为，假定它們有两个或两个以上的交点，则二直綫将合而为一。

二直綫沒有交点的情形由欧几里得平行公理保証并解释之：

假設在一平面上有任一直綫 a 和不与 a 結合的任一点 A，则在該平面上通过 A 有一且只有一直綫 b 不与 a 相交。直綫 b 叫做通过 A 的 a 的平行綫。

如果現在在普通点之外再加入无穷远直綫，使平面扩充为"投影平面"，则上面的三个公理可用下面的两个来代替：

1. 二不同点决定一条且只一条直綫。

2. 二不同直綫决定一个且只一个点。

这两个公理确立点和直綫的結合关系。无穷远点和无穷远直綫在这里跟其他的点和直綫并无区别。如果我們希望以具体的結构来表示投影平面，使点和直綫的平等地位得以直观地看出来的話，我們可以回头去看通过一定点的直綫把和平面把，同时把直綫当作"点"看，平面当作"直綫"看。在这个模型里，上述二公理的眞实性容易証实。

在这一对公理中如将"直綫"和"点"二詞对調，公理的形式仍旧不变。进一步研究，可知平面投影几何的其余公理，在二詞互換之后，公理系統的內容也不变。因此这二詞在从这些公理推出来的一切定理中必然都可交換位置。点和直綫的这种可交換性称为投影平面的对偶原理。依照这个原理，每一定理应有其对偶对应的另外一个定理，每一图形应有其对偶对应的另外一个图形。在对

偶关系之下，曲綫上各点对应这样的直綫的集合，它們一般地是包絡另外一个曲綫的切綫。更进一步研究，可知跟一圓錐曲綫上各点成对偶对应的直綫族，永远包絡某一圓錐曲綫。

根据对偶原理，可以从布朗香定理推导出一系列的其他定理，这些定理因为是巴斯加发現的，所以叫做巴斯加定理。为了清楚地显示出这两組定理的对偶关系，現以对照方式写出。

布朗香定理	巴斯加定理
1, 2, 3。設有由切于一圓錐曲綫的六条直綫作成的六边形(六边形外接于一圓錐曲綫)。則三組对頂点的連綫共点。	1, 2, 3。設有由在一圓錐曲綫上的六个点作成的六边形(六边形內接于一圓錐曲綫)。則三組对边的交点共綫。
4. 設已知六条直綫中，三条与点 A 結合，另三条与点 B 結合。取六个交点，使它們和适当的連綫作成一六边形，而六边形的边交替通过 A 和 B。則对頂点的連綫共点（六边形的布朗香点）。	4. 設已知六个点中，三个与直綫 a 結合，另三个与直綫 b 結合。取六条連綫，使它們和适当的交点作成一六边形，而六边形的頂点交替在 a 和 b 上。則对边的交点共綫（六边形的巴斯加綫）。

显然与最末一个巴斯加定理对应的图形一定是构形 $(9_3)_1$ 的对偶图形。一般地，构形 $(p_\gamma g_\pi)$ 的对偶图形是另一构形，其类型为 $(g_\pi p_\gamma)$。我們曾用符号 (p_γ) 表示过的那些特殊构形，而且只有这样的构形才有同类型的对偶构形。可能有人想到，巴斯加定理的构形[也就是 $(9_3)_1$ 的对偶构形]可能是 (9_3) 的其他二构形之一。但是，可以証明，巴斯加定理也是用符号 $(9_3)_1$ 代表的（图 131）。这就是为什么我們从前把这一构形叫做布朗香-巴斯加构形的原故。这样說来，$(9_3)_1$ 是"对偶不变的"（自对偶）。正象布朗香点可以随意选擇一样，我們也可以随意选擇构形的任何直綫作为巴斯

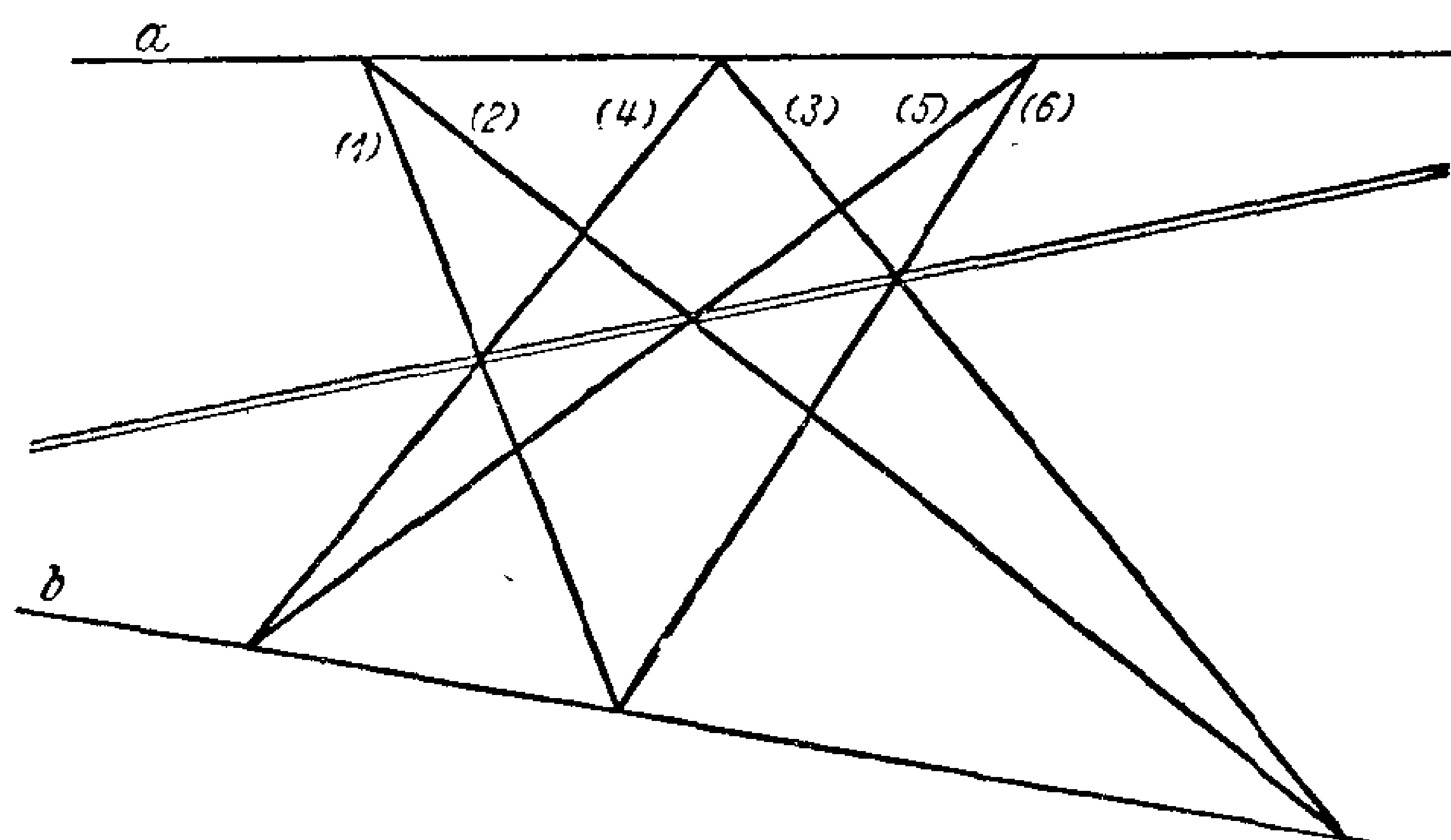


图 131

加綫。

应用无穷远元素我們可以导出上述巴斯加定理的一种特别情形，这种特别情形如不借助于新概念，似乎与原定理毫不相干。这是說，将巴斯加綫移到无穷远，就得到下面的定理(图 132)：如果六边形的頂点相間地在二直綫上，而且如果有两对对边分别平行，則第三对对边也必平行。

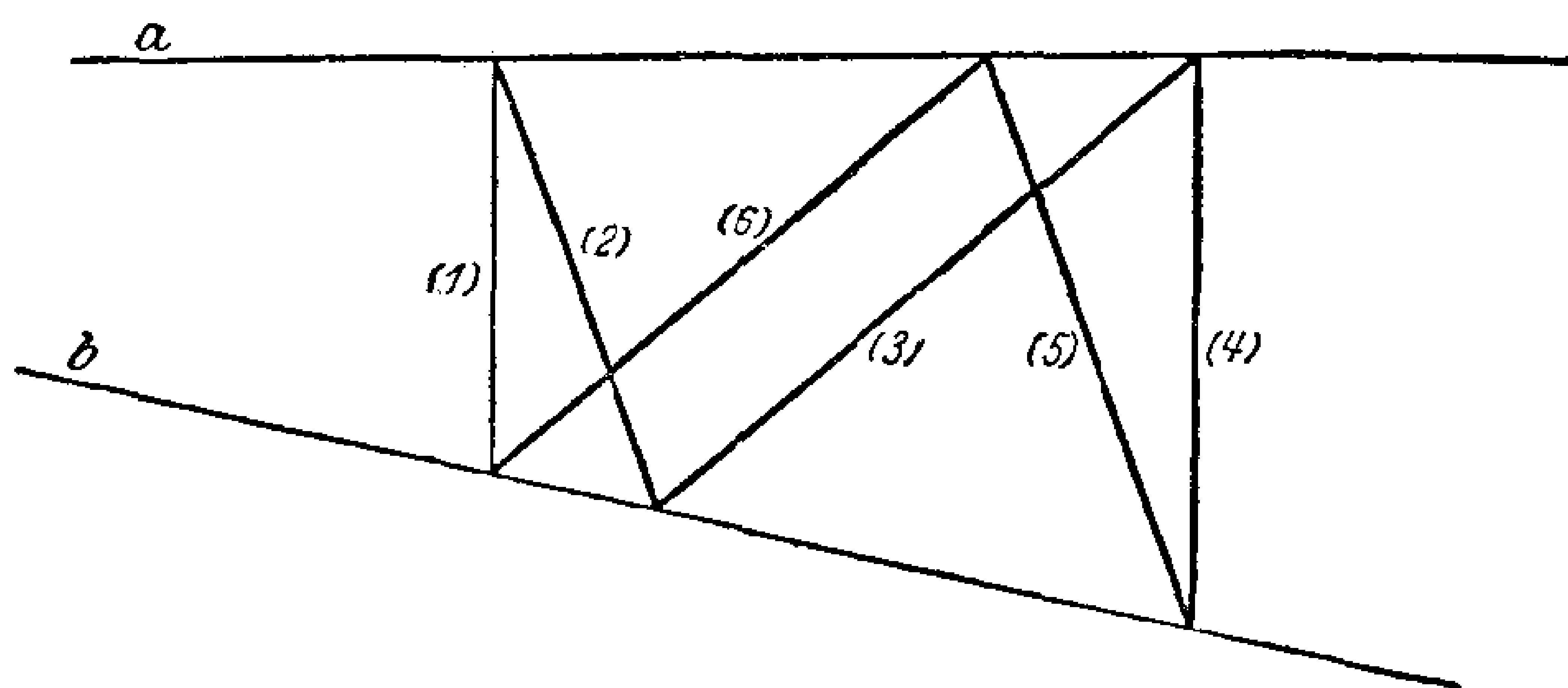


图 132

这个巴斯加定理的特别情形叫做巴巴斯(Pappus)定理。

既然知道了$(9_3)_1$是对偶不变的，就容易知道$(9_3)_2$和$(9_3)_3$也是对偶不变的。因为，如果不然，則应用对偶原理于构形$(9_3)_2$，它的唯一可能的对偶构形就是$(9_3)_3$。但是因为$(9_3)_2$是正則的，而

$(9_3)_3$ 不是，由此可見此二构形不能互为对偶。

現在我們来談构形 (10_3)。要想了解这类构形中最重要的一个，即德沙格 (Desargues) 构形，必須将引进的平面无穷远元素和对偶原理推广到空間里去。

§ 19. 无穷远元素和空間的对偶原理。德沙格定理和德沙格构形 (10_3)

上一节我們講了由空間的投影得到投影平面的概念。投影几何在空間中添加无穷远元素，将空間变为"投影空間"。投影空間在許多方面显得更簡单些。但是現在我們所用的办法不是直观的，而是完全抽象的。首先，我們根据以前講过的原理，在普通空間的所有平面上引进无穷远元素。于是自然就会想到，假定一切无穷远点和无穷远直綫都在一平面上，即所謂空間的无穷远平面上。无穷远平面具有与普通空間的平面相同的性質，这是說：任何普通平面与无穷远平面交于一直綫，即普通平面上的无穷远直綫；任何普通直綫与无穷远平面只有一公共无穷远点，好象一普通直綫与不含此直綫的普通平面只有一公共点一样。此外，二平面当且仅当有相同的无穷远直綫时才平行①。

有了这个观点，空間几何中的許多現象皆可化簡。比如，平行投影可以看作中心投影的特殊情形，此时投影中心是一无穷远点。再比如，单叶双曲面和双曲抛物面的区别可以这样描写：单叶双曲面与无穷远平面交于一非退化的圓錐曲綫，双曲抛物面则与无穷远平面交于曲面的一对母綫。这种区别与在第 15 頁上所說的是一回事，在那里是說，三条敧斜直綫在双曲抛物面上而不在单叶双曲面上，当且仅当它們平行于一个定平面的时候。事实上，这

① 因为二平面平行的性質和它們有公共的无穷远直綫的性質，都等价于对一平面上的每一直綫可在另一平面上作一平行綫的性質。

就是說，三条直綫和同一条无穷远直綫相交，因此这无穷远直綫必在該曲面上，因为曲面与这无穷远直綫已有三个交点。

在投影空間里，显然应該把所有的平面都看成投影平面，唯有这样，平面的对偶原理才能对所有平面都成立。虽然如此，作为一整体的空間也有与平面不同的对偶原理。

为了获得空間的对偶原理，我們也要象在平面上的情形那样，列出一組公理表，以决定投影空間中点、直綫和平面的結合关系，同时不区別普通元素与无穷远元素。这些公理可以写成：

1. 二平面决定一条且只一条直綫；不过同一直綫的三平面决定一个且只一个点。

2. 二相交直綫决定一个且只一个点，决定一个且只一个平面。

3. 二点决定一条且只一条直綫；不在一直綫上的三点决定一个且只一个平面。

若将点和平面二名詞对調，这組公理仍旧不变(这时第一个公理同第三个公理对調，第二个不变)。空間投影几何中的其余公理通过这样的对調也仍旧不变。这样，点和平面互成对偶，直綫自成对偶。曲面上所有点与另一曲面上的所有切平面互成对偶。空間的二阶曲面自成对偶，这种情形正好与平面的圓錐曲綫的情形类似。

最簡单的同时也是最重要的空間投影几何定理乃是所謂德沙格定理。德沙格定理这样說(图 133)：

設給定了空間两三角形 ABC 和 $A'B'C'$，这两三角形如此配置，使它們相当的頂点的連綫通过一点 O。則三对相当边交于三点 R, S, T，而且这三个交点在一直綫上。

定理的第一部分不难証明：根据空間第二公理，二相交直綫 AA' 和 BB' 决定一平面。直綫 AB 和 $A'B'$ 当然在这个平面上，所

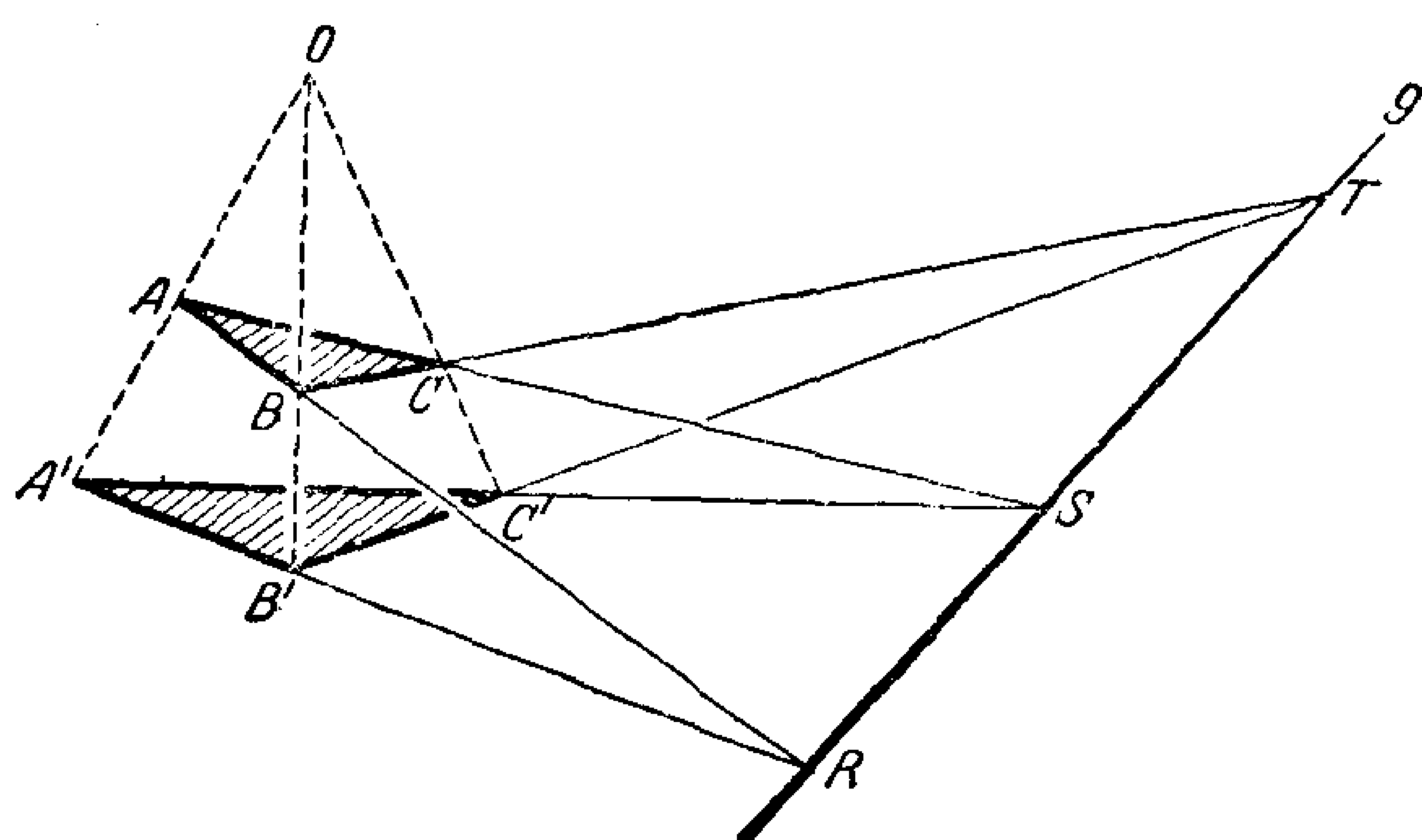


图 133

以根据平面的結合公理，这二直綫有一交点 R (R 可以是普通点，也可以是无穷远点)。另外二交点 S 和 T 的存在，証明相仿。

定理的第二部分在两三角形不共面的情形下也极易証明。此时两三角形所在的二平面决定一直綫——普通的或无穷远的——(根据空間第一公理)。两三角形的每对相当边中之一在一平面上，另一边在另一平面上。因为我們已經知道每对相当边交于一点，所以这一点一定在这二平面的交綫上。这就証明了德沙格定理的一般情形。

非常重要的倒是两三角形共面的特殊情形。对这种情形的証明可以应用如同証明布朗香定理一样的方法，即把空間图形投影到平面上。我們只須証明，每一平面德沙格图形是一空間德沙格图形的投影就行了。为了这个目的，将平面德沙格图形的所有点和直綫与图形平面外一点 S 联結起来(图 134)。經过直綫 AC 作一平面交 BS 于不同于 S 的一点 B_0，引直綫 OB_0。直綫 OB_0 和 $B'S$ 在一平面上，因而有一交点 B'_0。現在，三角形 AB_0C 和 $A'B'_0C'$ 作成一空間德沙格图形，因为連結相当頂点的直綫通过 O。把这两三角形的二平面的交綫由 S 投射到原来的平面上，便得到原来三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 三对相当边的交点所在的直綫。德沙格定理証明完毕。

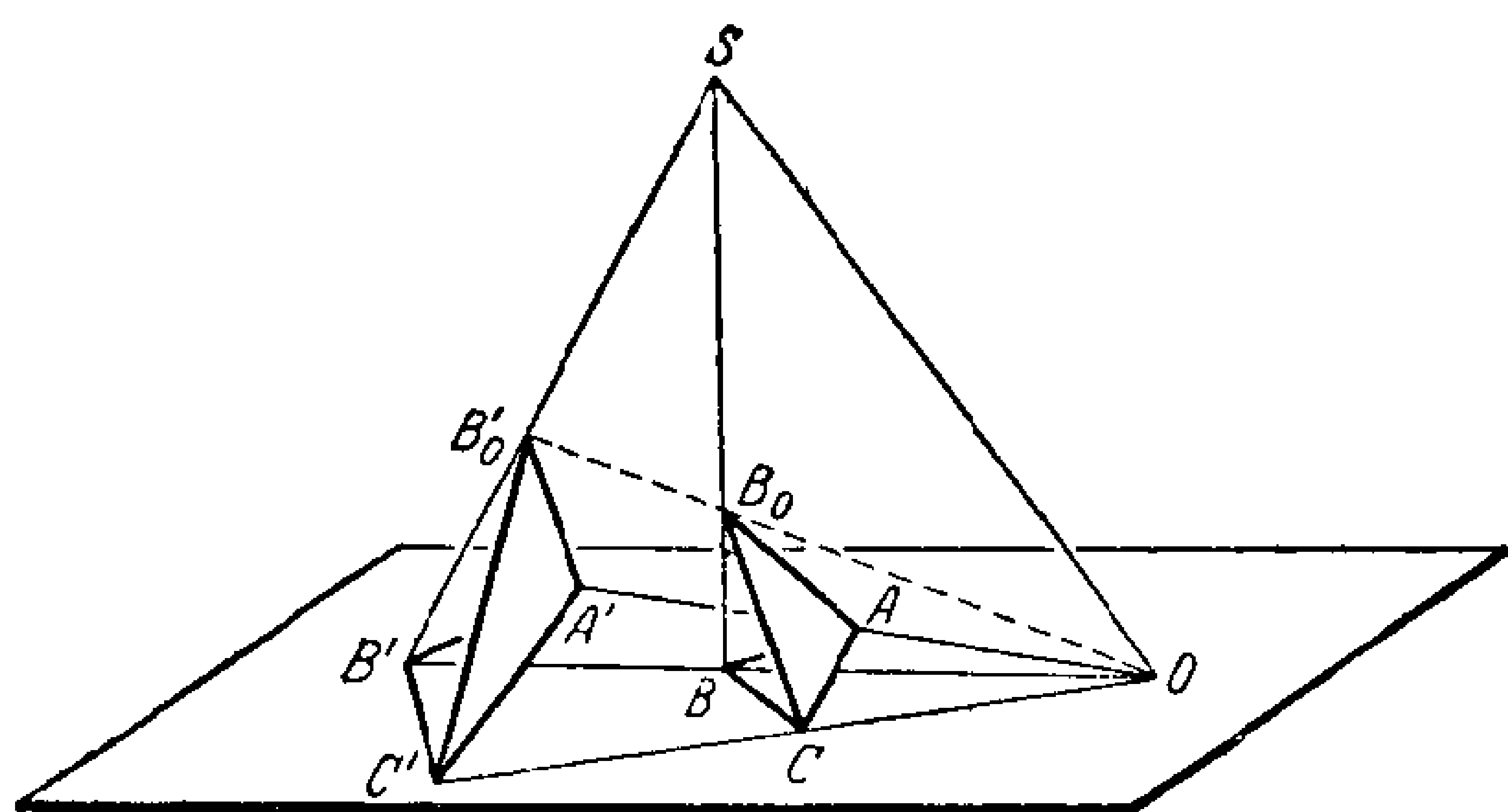


图 134

由平面对偶原理和空間对偶原理都可以导出德沙格定理有趣的推論。首先容易知道，德沙格定理的逆命題也对，即从德沙格直綫(包含两三角形三对相当边的交点)的存在可推出德沙格点(三对相当頂点的連綫都通过它)的存在。在两三角形共面的情况下，德沙格定理逆命題其实也就是应用平面对偶原理于德沙格定理所得的結果。为了說明这一点，今将二定理对照写出如下:

設給定了三对点 AA', BB', CC'，而且三对点的連綫共点，則三对直綫 AB 和 $A'B'$, BC 和 $B'C'$, CA 和 $C'A'$ 的交点共綫。	設給定了三对直綫 aa', bb', cc'，而且三对直綫的交点共綫，則三对点 (ab) 和 $(a'b')$, (bc) 和 $(b'c')$, (ca) 和 $(c'a')$ 的連綫共点。

現在我們来考察由两个共面的德沙格三角形的頂点和边，連同三对相当頂点的連綫，三对相当边的交点，德沙格点 O 和德沙格綫 g 所組成的图形(图 135)。数一数，就知道这个图形是(10_3)型的构形，它叫做德沙格构形。它与巴斯加构形有相同的性質，就是当图形順序作出时最后的結合关系自然滿足。其次，德沙格构形也象巴斯加构形一样，是自对偶的。这因为构形既代表德沙格定理又代表它的逆定理，而后者恰是前者的对偶。

下面我們来看看，应用空間对偶原理于空間德沙格定理的情

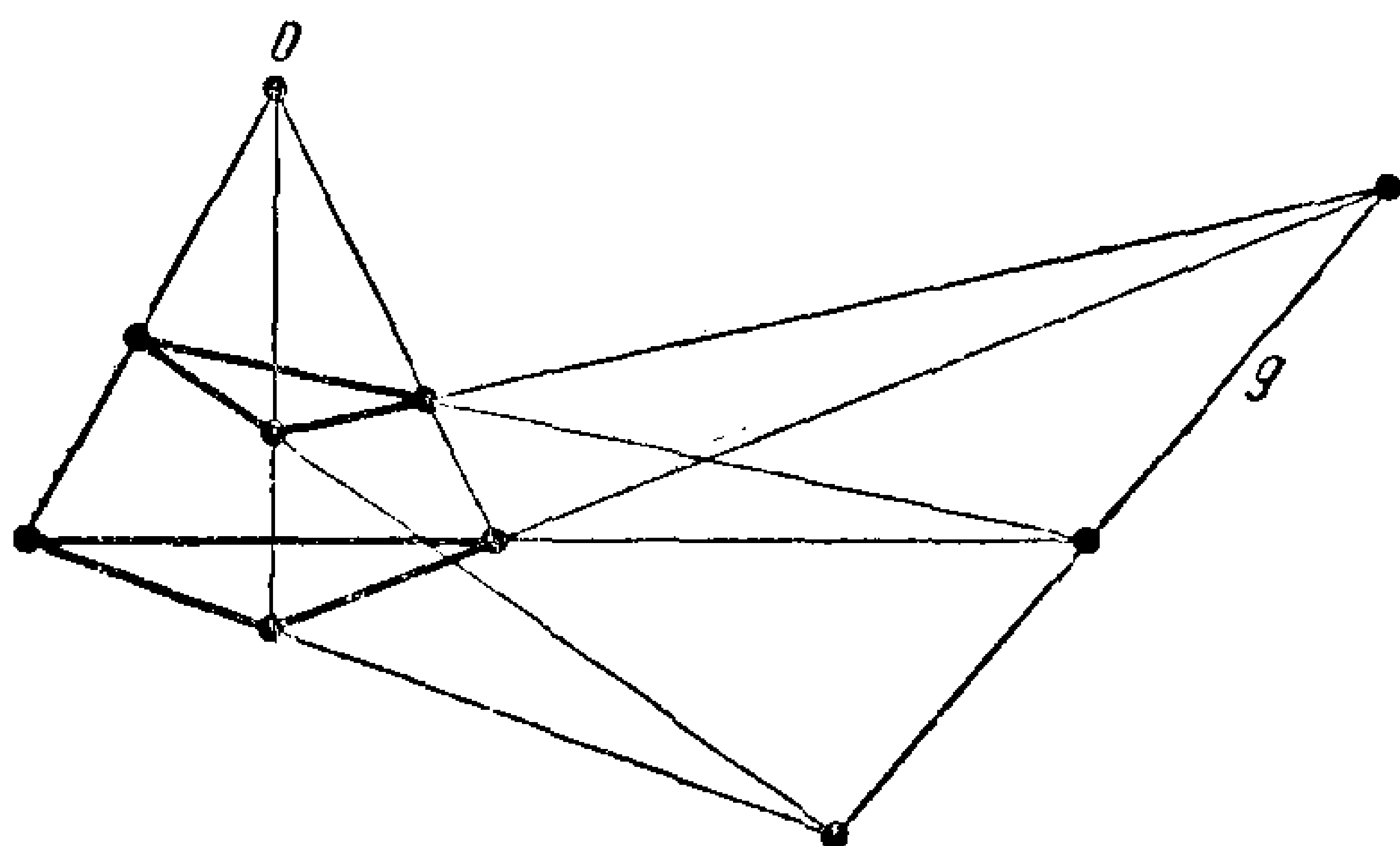


图 135

形。有下列对照的条文：

設給定了三对点AA',BB',CC'，而且三对点的連綫共点。則三对直綫AB和$A'B'$,BC和$B'C'$,CA和$C'A'$決定的三交点共綫。

設給定了三对平面$\alpha\alpha'$,$\beta\beta'$,$\gamma\gamma'$，而且三对平面的交綫共面。則三对直綫$(\alpha\beta)$和$(\alpha'\beta')$,$(\beta\gamma)$和$(\beta'\gamma')$,$(\gamma\alpha)$和$(\gamma'\alpha')$決定的三平面共綫。

图 136 說明右面的定理。在这个定理中两三角形代以由平面α, β, γ和α', β', γ'作成的两三面角。与平面的情形相当，我們現在考虑由二德沙格三面形，連同由三对对应棱決定的平面，三对对应面的交綫，"德沙格平面"(图 136 中的$\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$)和"德沙格綫"(图中的VW)組成的图形。这个空間的图形与任一不包含V, W, X, Y, Z各点的平面的交綫是平面德沙格构形，因为德沙格三面形与平面交于德沙格三角形。空間图形的平面和直綫对应于平面

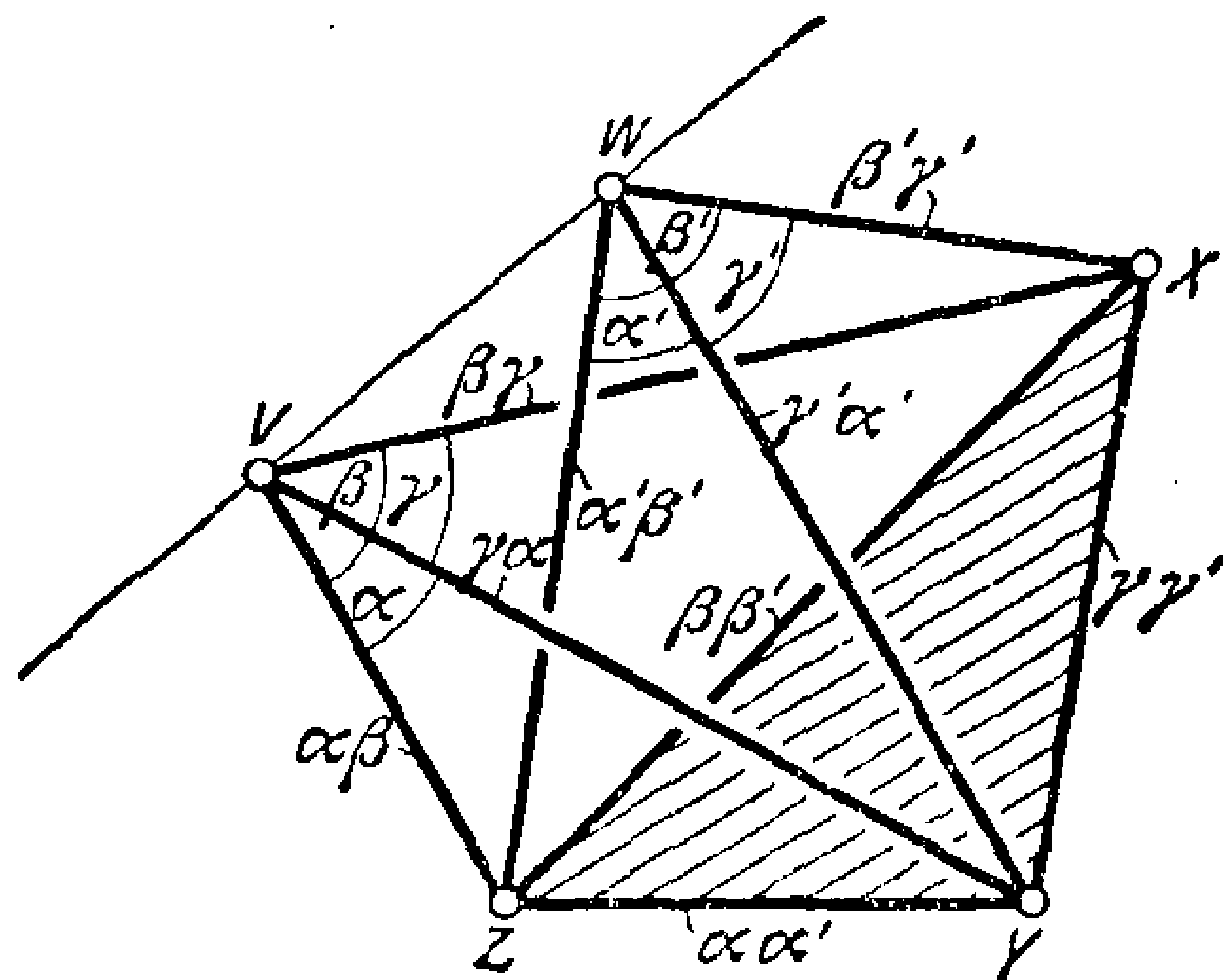


图 136

构形的直綫和点。但是,空間图形有一个內在的对称性,未在平面图形中得到反映:空間图形是由五点 V, W, X, Y, Z 所决定的所有的連綫及平面作成的,并且五点所处的地位完全平等。反过来,每一空間完全五点形都可以变为空間德沙格图形,只要任意选择其中的两点作为德沙格三面形的頂点①。由于空間图形所有直綫和所有平面的地位平等,所以平面德沙格构形的点和直綫也是如此。这就証明了德沙格构形是正則的,因而在构形中德沙格点或德沙格直綫可以任意选擇②。

現在我們把德沙格构形表为互作內外接的两个五边形。为了这个目的,第一步要看在构形中是否可找出一个五边形,使五边形的頂点和边是构形的元素,而且沒有三个相継的頂点在一直綫上。这个問題如果回到空間的五点形上去,就可簡化許多。平面多边形的頂点对应空間五点形的棱。由于平面多边形每两个相継的頂点必在构形的一直綫上,所以对应的棱必在一平面上,因此一定相交。要使三个相継的頂点不在一直綫上,只須避免对应的棱在一平面上;而这种情形当且仅当三个相継的棱作成一个三角形的时候发生。若按任何次序走过空間五点形的頂点 V, W, X, Y, Z,比方說,就按方才写的次序,則得到我們所要求的閉棱折綫,它給出我們所要求的平面构形的一个五边形。但是空間五点形的棱还有沒有用过的,它們作成另一个同类的空間多边形。因为,空間五

① 这里,只要求五点是一般位置的情形,也就是其中沒有四个点共面的,因此也就沒有三个点是共綫的。

② 空間的完全 n 点形,指連接空間处于一般位置的 n 个点的直綫和平面所組成的图形。也象 $n=5$ 那样,对于任意的 n,完全 n 点形由不通过此形任何頂点的平面截出来的图形是一构形。这样的构形是正則的。它們的类型为 $p=\frac{n(n-1)}{2}$, $\gamma=n-2$, $g=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, $\pi=3$。由此可知,当 $p=g$ 时只得出一种特殊类型的构形,即 $n=5$ 的情形。其他正則的构形可以在高維空間里用处在一般位置的 n 个点得到。这些构形都叫做"多面的"。

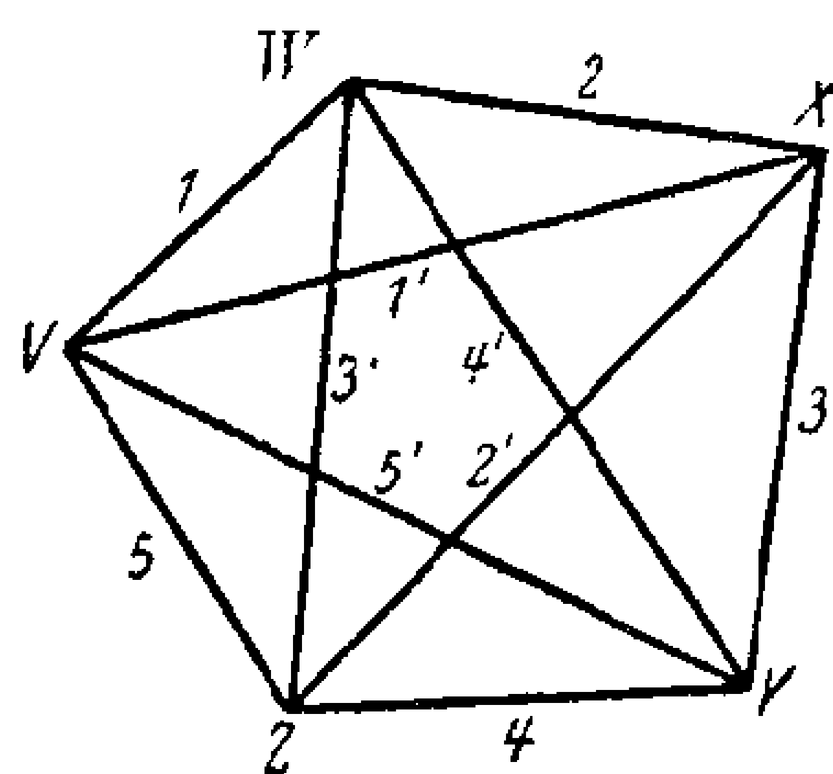


图 137a

边形每一頂点一共与四个棱相結合，其中的两个已在第一次的路綫中用过，所以通过空間五边形的每一頂点有两个未用过的棱。第二个棱折綫对应构形的第二个五边形。稍加思索，可知第二个五边形必内接于第一个五边形。由于对称关系，第一个也内接于第二个。在图 137 a, b 上表示空間体系和两个平面五边形的关系。

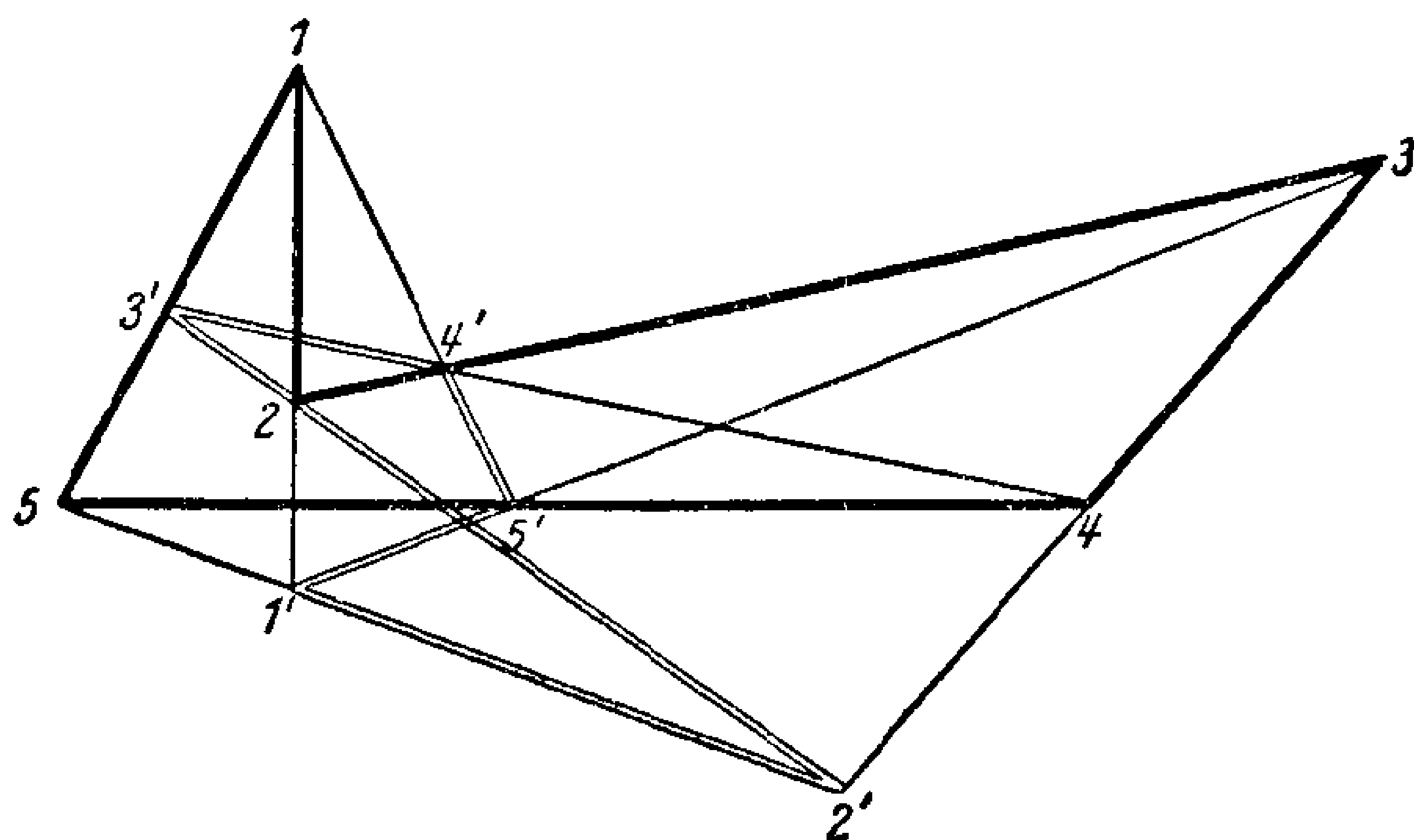


图 137b

我們也可以在空間五点形中找出和平面构形中的五边形对应的其他类型的五棱体系。图 138 是一例。但是可以驗証，不能把其他五个棱作輪換排列，使任意两个連續的棱有一公共点，而且沒有三个連續的棱作成一三角形。因此起初給出的作图已經竭尽了一切可能的情形。因为頂点的每种排列对应于图形的一个自同构，又因为空間五点形之分为两个閉棱折綫完全由第一次路綫的頂点次序决定，所以我們知道，若不計自同构，德沙格构形只能分成

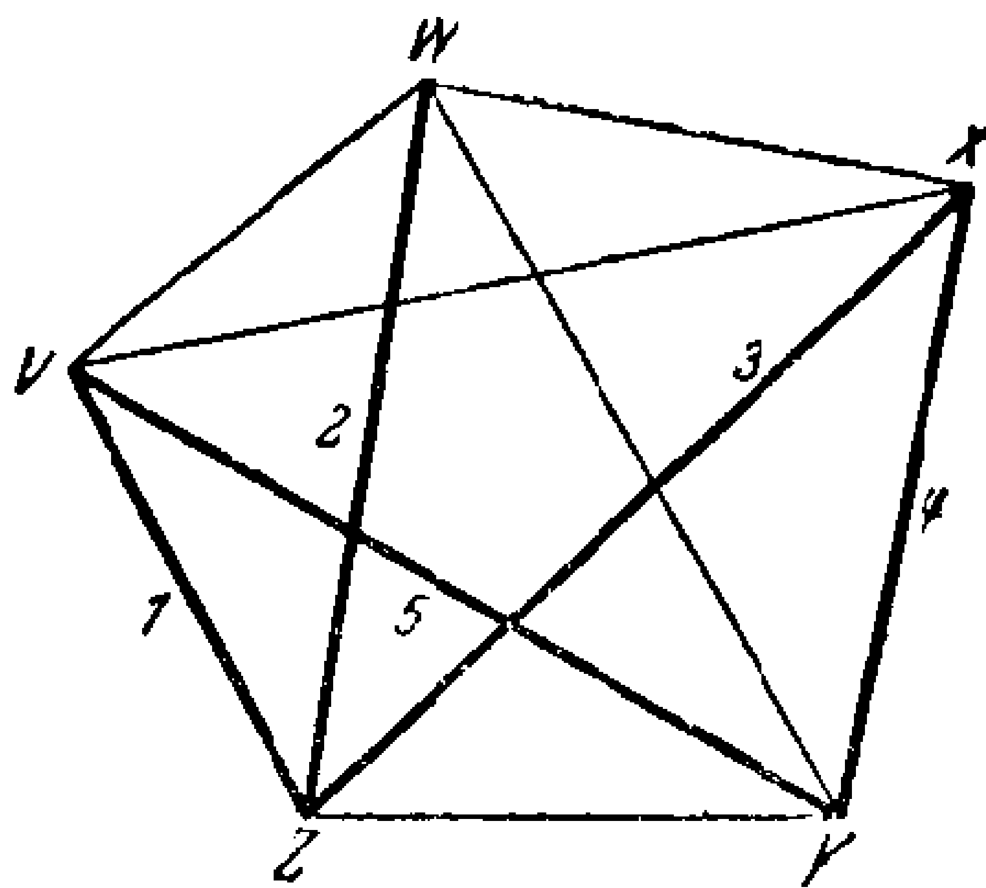


图 138

一种相互内接的两个五边形。

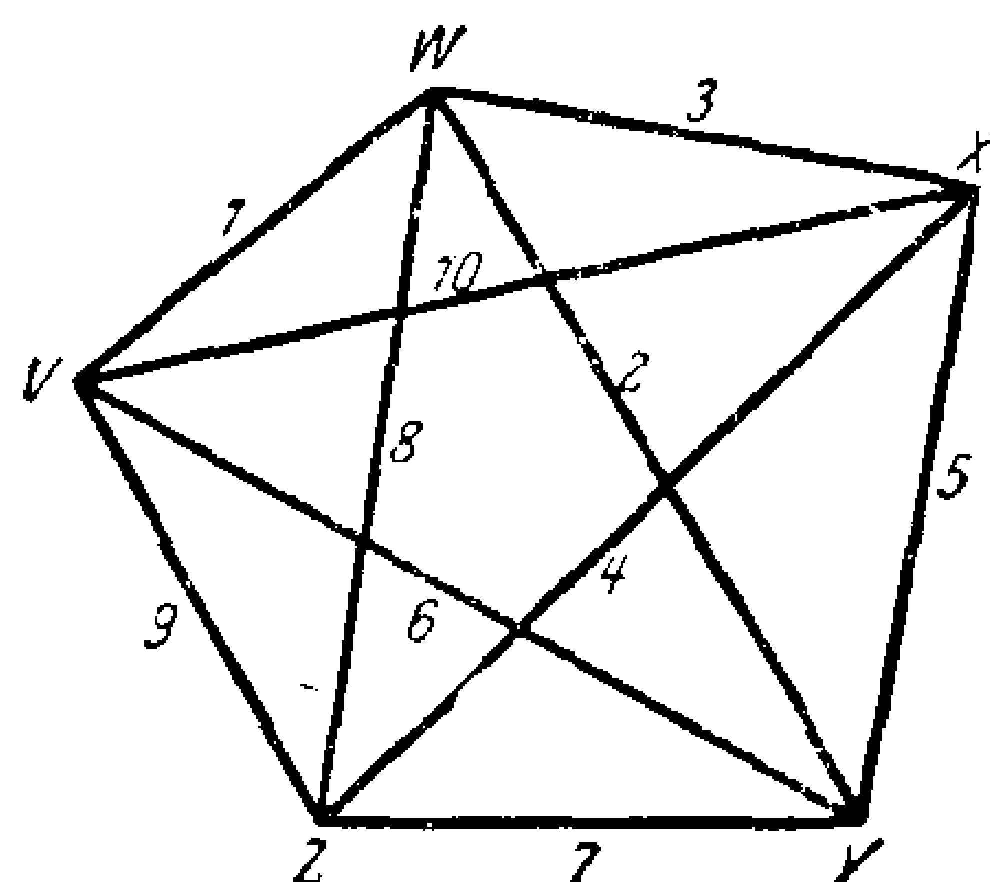


图 139

是否德沙格构形可以看作内外接于自己的十边形呢，而且有多少种这样的十边形呢？这个問題也可以用相同的方法解决。不难証实，对应这样十边形的空間棱折綫的排列一定有如图 139 的形状。因此，必有一种方法将德沙格构形解釋为内外接于自己的十边形；而且除自同构不計外，只有一种方法(图 140)。从图 140 可以发現一种規律：如果我們沿着十边形的各边依次从点 1 走到点 2，从点 2 走到点 3 等等，那么每边上要漏掉一个頂点，而所漏掉的頂点的号碼作成一个序列，序列中相邻二号碼交錯地相差 1 和 3(例如在边 23 上漏掉 5，34 边上漏掉 8，45 边上漏掉 7，56 边上漏掉 10，等等)。在这空間体系中还可以发現这种十边形的另一种性质，就是十边形的各边交錯属于两个相互内接五边形的边。

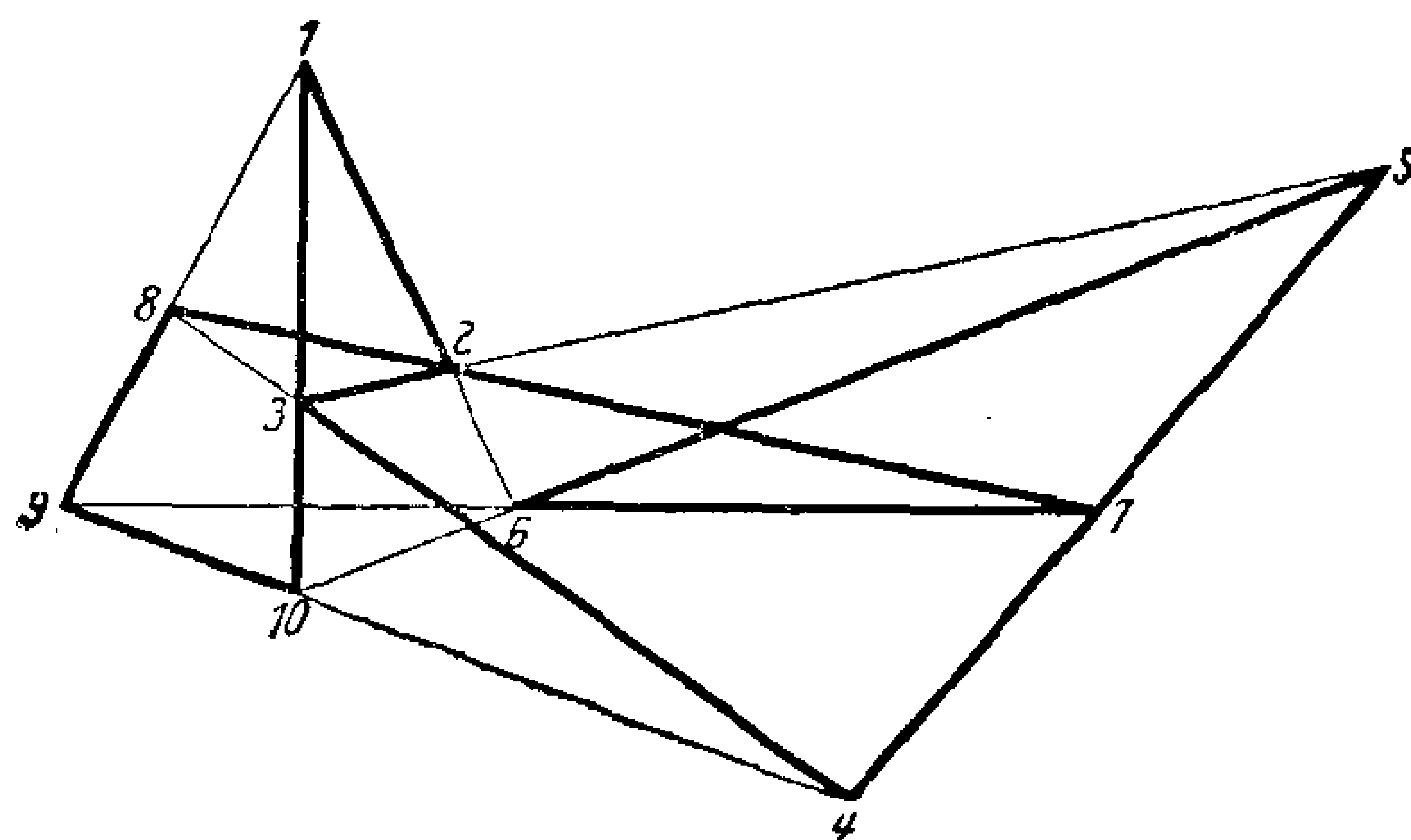


图 140

德沙格构形不是构形(10_3)中的唯一构形，此外还有其他九种可能的表，其中有一个既不能在实平面上实現，也不能在复数平面上实現，因为构形的方程組不相容，这一点跟(7_3)的表的性质相

同。与此相反，(10_3) 的其余八个构形却与构形 (9_3) 相仿，卽都可以用直尺作出。但是跟德沙格构形又有不同，它們最后的結合条件不是自然满足的。由此可知这八个构形不能表示一个几何定理，因而不象德沙格构形那样重要。图 141 表示八个构形之一。如各点顺次如图所示，則这一构形也可以表为相互内外接于自己的十边形，不过这里两个相邻的漏掉的頂点的号碼的差总是 1。在这样安排时，所有的頂点都处于平等地位，同时边可以和頂点互換。由此可見，这个构形是正則的，同时也是自对偶的。

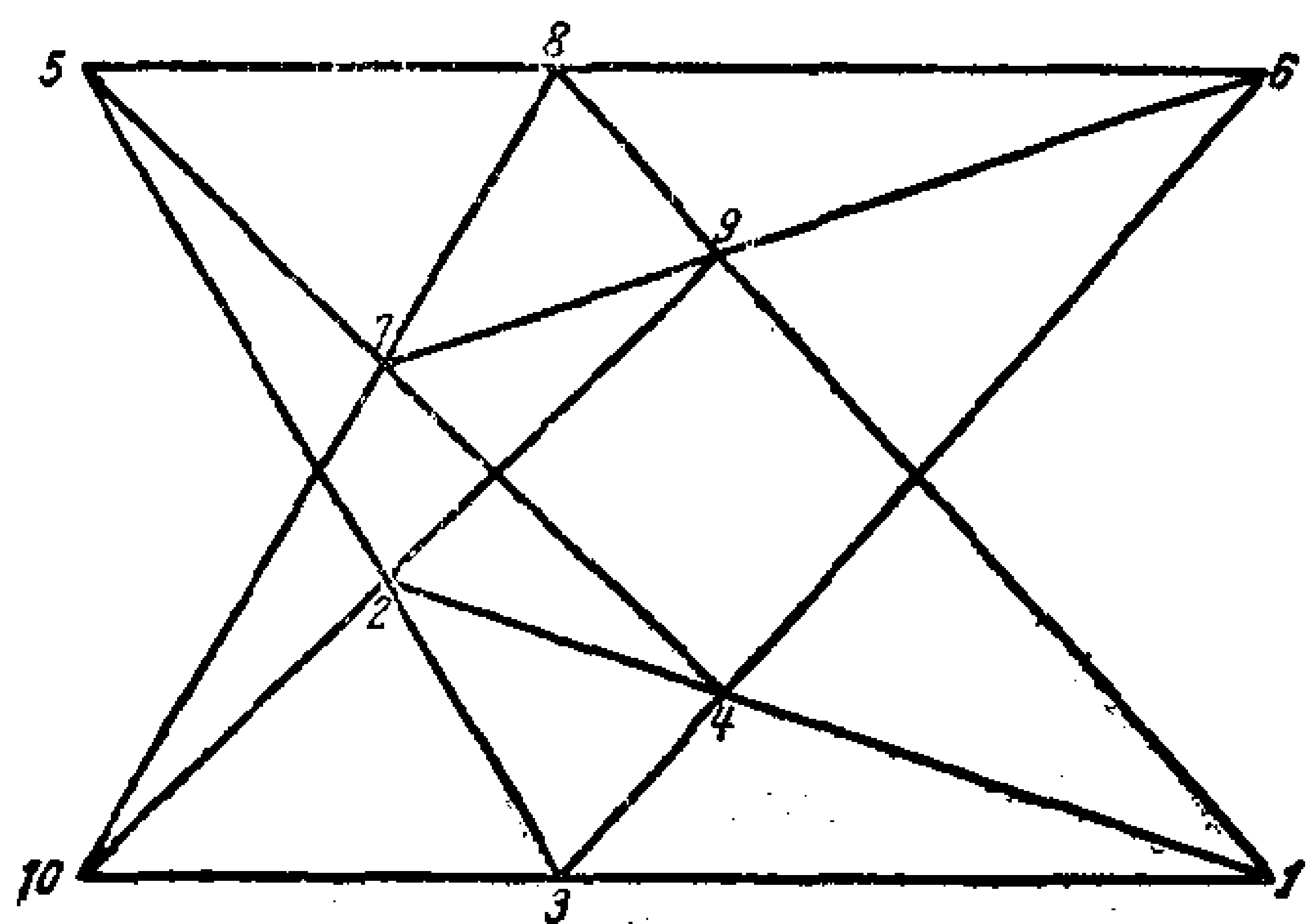


图 141

§20. 巴斯加定理和德沙格定理的比較

前面我們看到了最后一个巴斯加定理和德沙格定理有許多相似的地方。这两个定理都是借用空間图形的投影来証明的。这两个定理都产生构形，而且是十分相象的构形：它們都是正則的，自对偶的，都能只用直尺作出，最后的結合条件是自然满足的，都可以表为内外接于自己的多边形。

虽然如此，这两个定理也还有原則上的区别。我們用以証明德沙格定理的空間图形，只要根据空間的結合公理而不須假定其他另外的公理卽可作出。然而布朗香-巴斯加构形却是另一回事，它是由考察二阶曲面得来的。驟然看来，似乎証明的核心不过是考虑空間六边形的点、直綫和平面之間的結合关系，但經仔細研究，就可知道这样的空間六边形的作图实質上等于作一个二阶直紋曲面，这种作图的可能性不能单靠結合公理証明。

在第一章里，我們曾以度量为依据引进二阶曲綫和二阶曲面。或許有人因此便揣測巴斯加定理不依靠长度和角的比較便不能証明。但是二阶曲綫和二阶直紋曲面也可以不用度量方法而只用投影方法产生。这种方法，可使已知直綫上的点如此映射成其他任一直綫上的点：在第一直綫上的任意已知三点可搬到第二直綫上的任意已知三点，而且第一直綫上的調和点变为第二直綫上的調和点。这样我們就說，第一直綫投影映射到第二直綫上。这种映象的作图只需要平面和空間的結合公理就够了。但是要想根据二已知条件——調和点变为調和点而且某三点的映象可以任意給定——来証明对于直綫上的所有的点，映象是唯一决定的，这些公理就不够了。为了这个目的，我們須用一个下面就要表述的連續公理。不过投影的唯一性在上述意义下一經証明，則最一般的二阶直紋曲面就可規定为一条动直綫扫过的曲面，而此直綫是連結形成投影关系的两条固定的攲斜直綫上的相当点。从投影映象的唯一性可知还有第二族直綫也在如此規定的曲面上。如果成投影关系的二直綫不是攲斜的而是相交的，則連結相当点的直綫在一平面上移动并包絡一个二阶曲綫。投影几何学上一切重要的二阶曲綫的性質都可以根据这个定义推导出来。

要完全了解連續观念，須要用两个性質不同的公理。但为了証明投影映象的唯一性，只要用其中一个公理，即**阿基米德公理**就够了。阿基米德公理的算术說法是这样：設 a 和 A 是任意二正数，不管 a 有多小，A 有多大，把 a 跟自己相加，加到充分多次，則在有限次步驟以后，总可以使其和大于 A：

$$a+a+a+\cdots+a>A。$$

这个公理是拿一个长度去度量另一个长度所必需的条件，因此这样形式的公理組成度量几何基础的重要部分。我們也可以不用度量概念，而把公理表述为：設給定二平行直綫(图 142)，又設 O 和

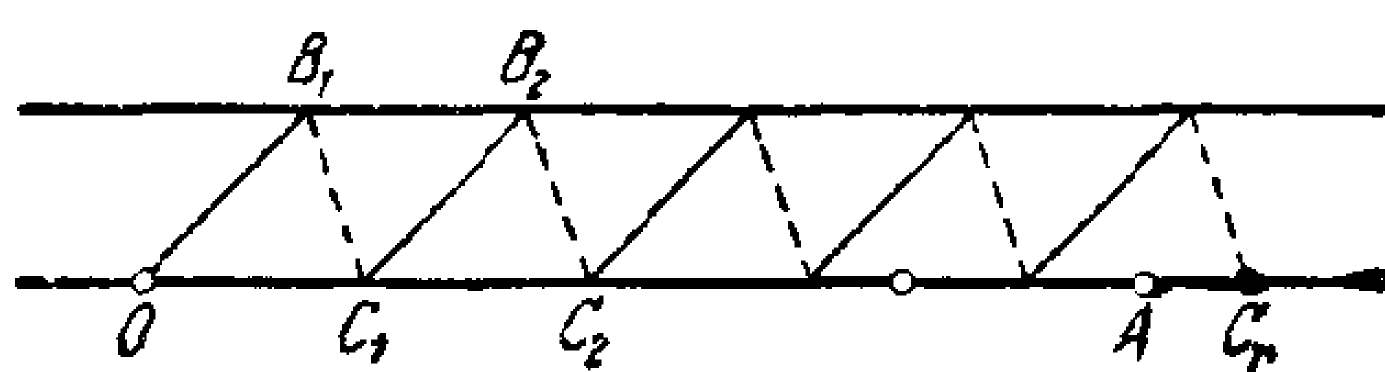


图 142

A 是其中一直綫上的二点。在另一直綫上任取一点 B_1，連 O，B_1 成一直綫。通过 B_1 与第一直綫上的 O 和 A 之間的一点 C_1 引直綫。通过 C_1 作 OB_1 的平行綫，設与第二直綫交于 B_2。过 B_2 作直綫 B_1C_1 的平行綫，設与第一直綫交于 C_2。如此継續作 OB_1 和 B_1C_1 的平行綫。阿基米德公理說，經过有限次步驟以后，在直綫 OA 上总可达到不在 O 和 A 之間的一点 C_r。在阿基米德公理的这种表达方式中，已經用到在一直綫上一点介于其他二点之間的概念。要想把这一类的叙述講得更精确些，还需要另一組公理，即次序公理。这一組公理我們不講了。与此相反，平行概念只是用来使公理的叙述簡明和易于了解。但对投影几何的目的来說，那只要能够作出象图 143 那样的图形就够了。这張图是由图 142 用中

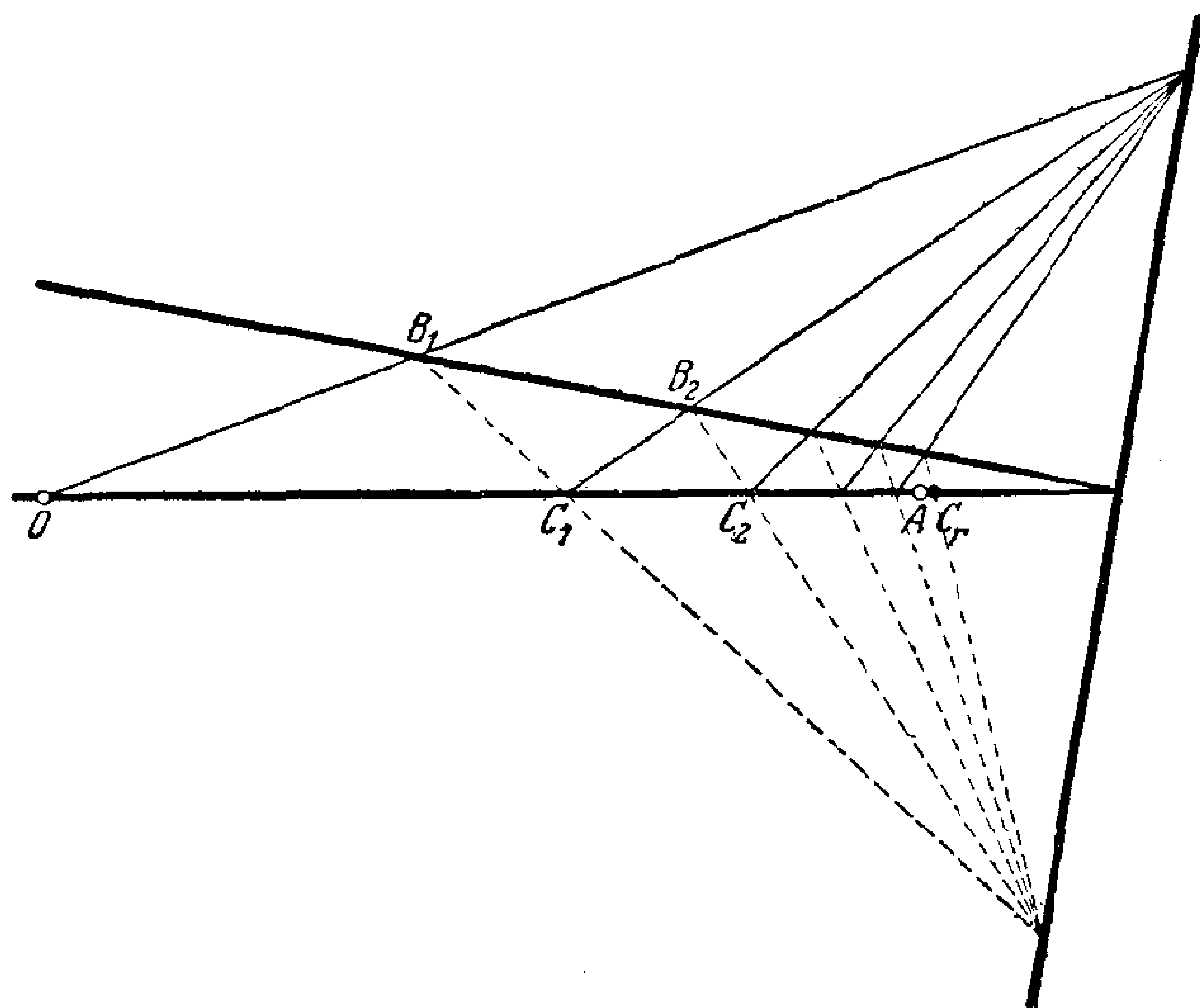


图 143

心投影法投到另一平面上而来的。

平面和空間的結合公理，与次序公理和阿基米德公理一起就足够証明給定三对对应点时投影映象的唯一性。但証明冗长而煩瑣。从平面投影映象的唯一性可以証明最后一个巴斯加和布朗香定理(証明不借用任何的空間作图)。

在空間內德沙格定理可以只用結合公理証明。但是如不借用空間作图而証明平面的定理，即使在結合公理之外再加上阿基米德公理和次序公理，也还不够。不过，如不用阿基米德公理而用平面結合公理、次序公理和合同公理，也可以証明。

如果去掉空間結合公理，則对于最后一个巴斯加定理的影响同德沙格定理一样。因此在証明时只須用平面的結合公理、次序公理和合同公理。但是只根据平面公理而不用空間公理，也可以看出这两个定理有很大的区别。巴斯加定理不能应用平面結合公理和平面德沙格定理証明，但是德沙格定理却可以根据平面結合公理和巴斯加定理証明。我們以下試就德沙格綫是平面上的无穷远綫这一特别情形加以証明。也跟阿基米德公理的叙述一样，加上这个假設不过是使証明簡短些和容易了解罢了。因此我們作下列的假定：

設有三直綫 AA', BB', CC' 通过点 O。又設 $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$。应用最后一个巴斯加定理証明 $BC \parallel B'C'$。

为了証明，通过 A 作 OB 的平行綫，設与 $A'C'$ 交于 L，与 OC 交于 M。再設直綫 LB' 与直綫 AB 交于 N。应用巴斯加定理于此图形三次，每次都用其特殊形式，即在第 121 頁上所說的巴巴斯定理。首先我們看，$ONALA'B'$ 是一巴斯加六边形，因为六个点交錯在二直綫上。由假設，$NA \parallel A'B'$，由作图 $AL \parallel B'O$。所以根据巴巴斯定理，六边形的第三对对边也必平行，即 $ON \parallel AC$。其次我們再看巴斯加六边形 $ONMACB$。在这里有 $ON \parallel AC$，这

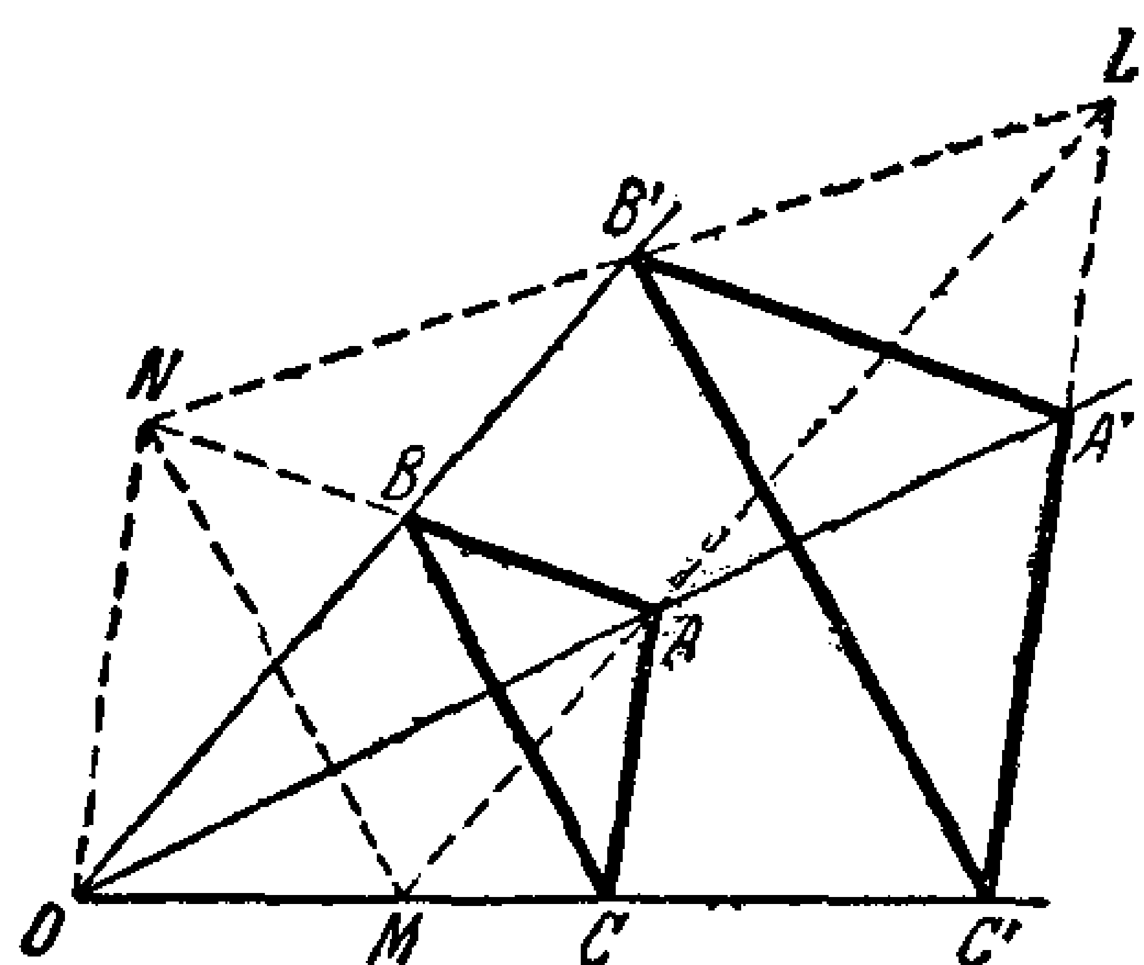


图 144

是上面証明过的，又由假設，$MA \parallel BO$。因此根据巴巴斯定理，$NM \parallel CB$。最后我們看巴斯加六边形 $ONMLC'B'$。在这里有 $ON \parallel LC'$, $ML \parallel B'O$, 一如上述，可知 $NM \parallel C'B'$。因为我們在前面的步驟中曾經証明过 $NM \parallel CB$, 从此得知断言 $BC \parallel B'C'$ 正确。

任何只涉及平面上交点的定理都可以从德沙格定理和巴斯加定理导出。因为方才我們証明过，德沙格定理是巴斯加定理的一个推論，所以可以这样說，巴斯加定理是平面上最重要的交点定理，从而构形 $(9_3)_1$ 代表平面几何中最重要的图形。

§21. 空間构形导言

构形的概念可以从平面推广到空間。一个空間构形，是指一組点和平面，其中的每一点与同数的平面相結合，每一平面与同数的点相結合。合乎这种规定的一个最簡单的构形由空間德沙格定理給出。在这里我們仍旧沿用相当的平面构形的十个点作为空間构形的点，至于构形的平面我們用两个三角形的平面与包含德沙格点和两个三角形相当边的三个平面。这样說来，每一点上有三个平面通过，每一平面上有六个点。与平面构形的理由相同，空間构形四特征値适合方程 $5 \times 6 = 10 \times 3$。

除由点和平面組成的空間构形外，我們也可以考虑由点和直綫組成的构形，如同平面构形那样，构形中的每一点与同数的直綫相結合，每一直綫与同数的点相結合。这两种不同的观点常可应用于同一图形。比如，剛才說过的空間德沙格图形即产生由点和直綫組成的空間构形，而这一空間构形实质上是与平面德沙格构

形等同的。同样，許多比較更复杂的点和平面的构形也常产生点和直綫的构形，但直綫是平面的某些交綫，点是原构形的点。反之，点和直綫的构形也常可变为点和平面的构形，只要补充以由原构形的直綫决定的几个平面即可。

也象平面的情形那样，註我們先談点数和平面数相等的构形，也就是先談由 p 个点和 p 个平面組成的构形。假如每个点与 n 个平面相結合，則跟平面上的理由相同，每个平面也应与 n 个点相結合。我們用 (p_n) 代表这类的构形。

如果不打算討論无关紧要的情形，n 至少必須是 4。当 $p\leqslant 7$ 时，构形 (p_4) 不存在。当 $p=8$ 时，可以作出五种不同的表，这五种表都能用几何方法实现。(8_4) 中的一个构形，所謂默必斯构形，在几何上甚为重要；因为最后的結合条件自然满足，所以这个构形表示一个几何定理。这个构形是由相互作內外接的两个四面体构成的。

构形越复杂，可能性的数目也越大，因之也就不易掌握全貌。例如，已經知道在 (9_4) 中至少有 26 种可用几何方法实現的构形。因此，我們只預备討論特别重要的而且在其他数学領域里占着一定地位的两种空間构形。其一是雷耶 (Reye) 构形，其二是施累弗利 (Schläfli) 双六构形。

§ 22. 雷耶构形

雷耶构形由十二个点和十二个平面組成。这个构形代表投影几何的一个定理，因此最后的結合条件是自然满足的，而不論点和平面的配置如何。但为了便于直观想象，我們姑且把这个构形中的各点排成一种特殊的对称形式。

取一立方体，以立方体的这十二个点作为构形中的点：八个頂点，立方体的中心点，三个各由四条平行棱相交所成的无穷远点。

这样的无穷远点共有三个(图 145)。以立方体的这十二个平面作为构形中的平面:立方体的六个面,通过每对对棱的六个对角面。这样产生的图形,在每一平面上有六个点,这六个点是:立方体每一面上的四个頂点和該面上的两个无穷远点;每一对角面上的四个頂点和該平面上的一个无穷远点和立方体的一个中心点。另一方面,每一点有六个平面通过:通过立方体中心点有六个对角面;通过每一頂点有三个面和三个对角面,通过每一无穷远点有四个面和两个对角面。因此,的确作出了一个由点和平面組成的构形,它的符号应該是(12_6)。

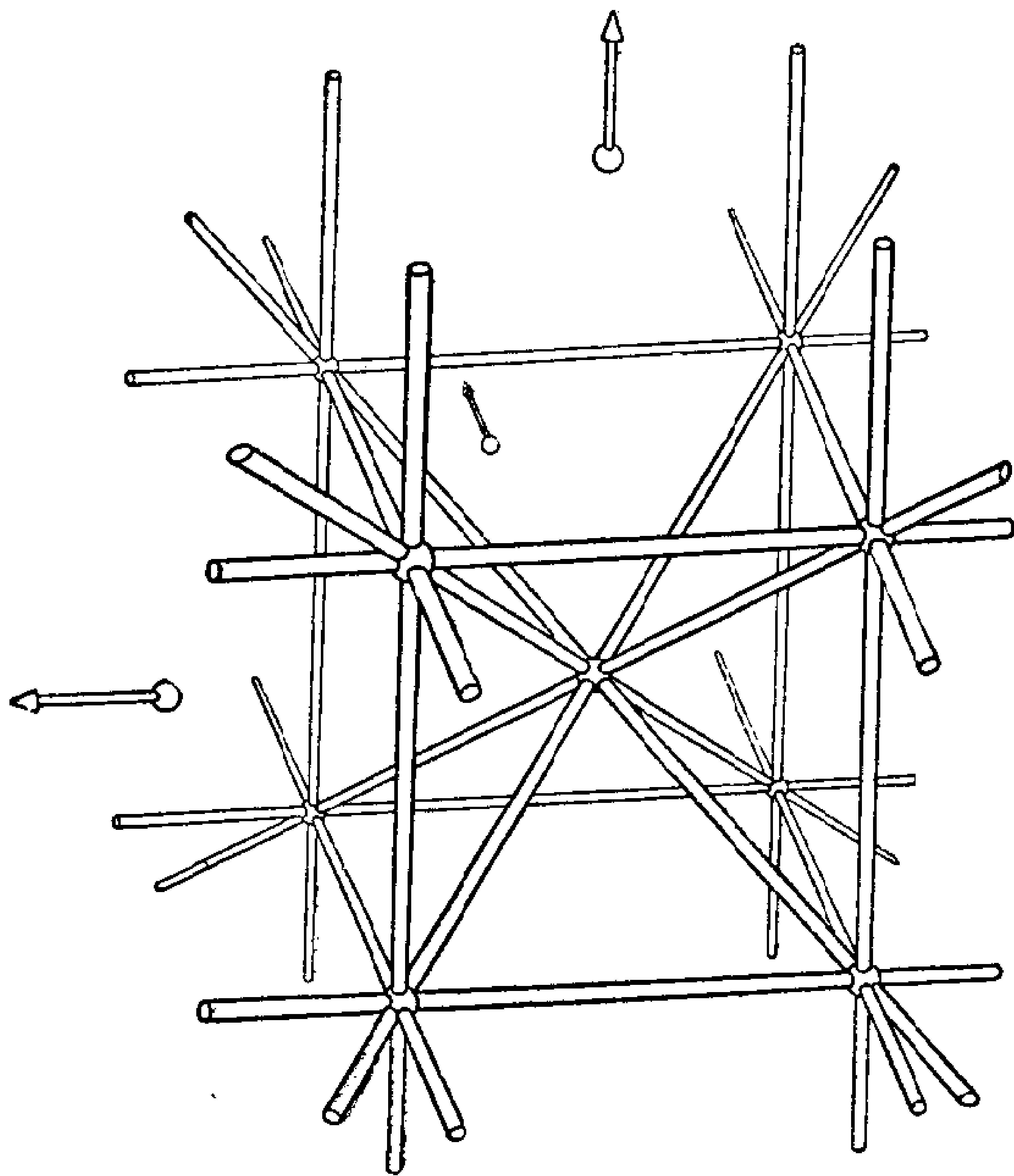


图 145

上面的图形也可以解释为点和直綫的构形。为此,我們选出平面的几条交綫,即立方体的十二个棱和四个对角綫。每一直綫上有三个点,即每一棱上有两个頂点和一个无穷远点;每一对角綫

上有两个頂点和立方体的中心。其次，通过每一点有四条直綫，卽通过每一頂点的有三个棱和一个对角綫；通过立方体中心的有四个对角綫；通过每一无穷远点的有四个棱。由此可見，雷耶构形中的点和直綫作成一个$(12_4 16_3)$型的构形。

再有，只要数一数，卽可知道，通过每一直綫有三个平面，每一平面上有四条直綫，每一平面上的四条直綫和六个点作成一个完全四边形。

雷耶构形常見于許多与几何发生关系的体系中，例如下面就要討論的四球的相似中心体系。

大家知道，二圓或二球的相似中心是指二点，这二点內外分二圓或二球連心綫段之比等于二半徑之比；分点在連心綫段上的叫相似內心，在延长綫上的叫相似外心。如果所說的是二圓的情形，而且每圓在另外一圓之外，則相似內心是二圓內公切綫的交点，相似外心是二圓外公切綫的交点(图 146)。以連心綫为軸将图形回轉，得到二球的相似中心和切綫的类似性质（不过也有不同的地方：二球还有許多公切綫不通过相似中心）。我們分别用(ik)和$(ik)'$代表二圓或二球i和k的相似外心和內心。

現在設想有三个圓或三个球 1, 2, 3。它們各有三个相似內心

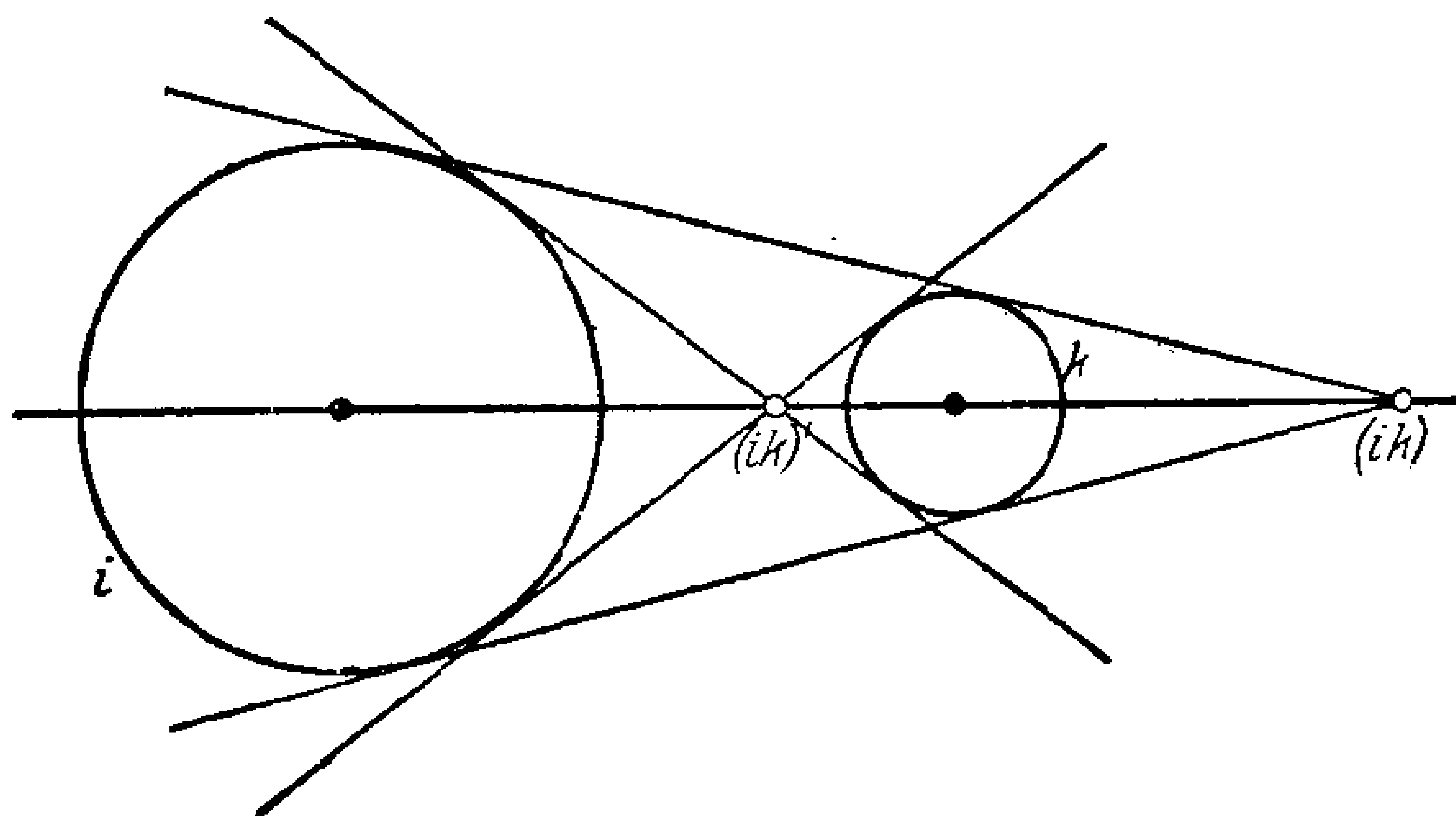


图 146

和三个相似外心，所以一共有六个相似中心。假定三圓或三球的中心不共綫而作成一个三角形，那末就沒有两个相似中心能重合，而且六个相似中心也不能共綫。根据蒙日(Monge)定理，三个相似外心(12)，(23)，(31)必共綫，而且每二圓(球)的相似外心同另外两对圓(球)的两个相似內心共綫，例如(31)，(12)′和(23)′①(图147)。由此可知，所有的相似中心在四条直綫上，这四条直綫叫做1, 2, 3的相似軸。蒙日定理可以概括叙述如下：六个相似中心和四条相似軸組成完全四边形的六个点和四条直綫，其中的圓(球)心1, 2, 3是对边三角形的頂点。今后我們将用(123)表示包含三个相似外心的相似軸綫，(1′23)表示通过(23)，(12)′和(13)′的相似軸，等等。

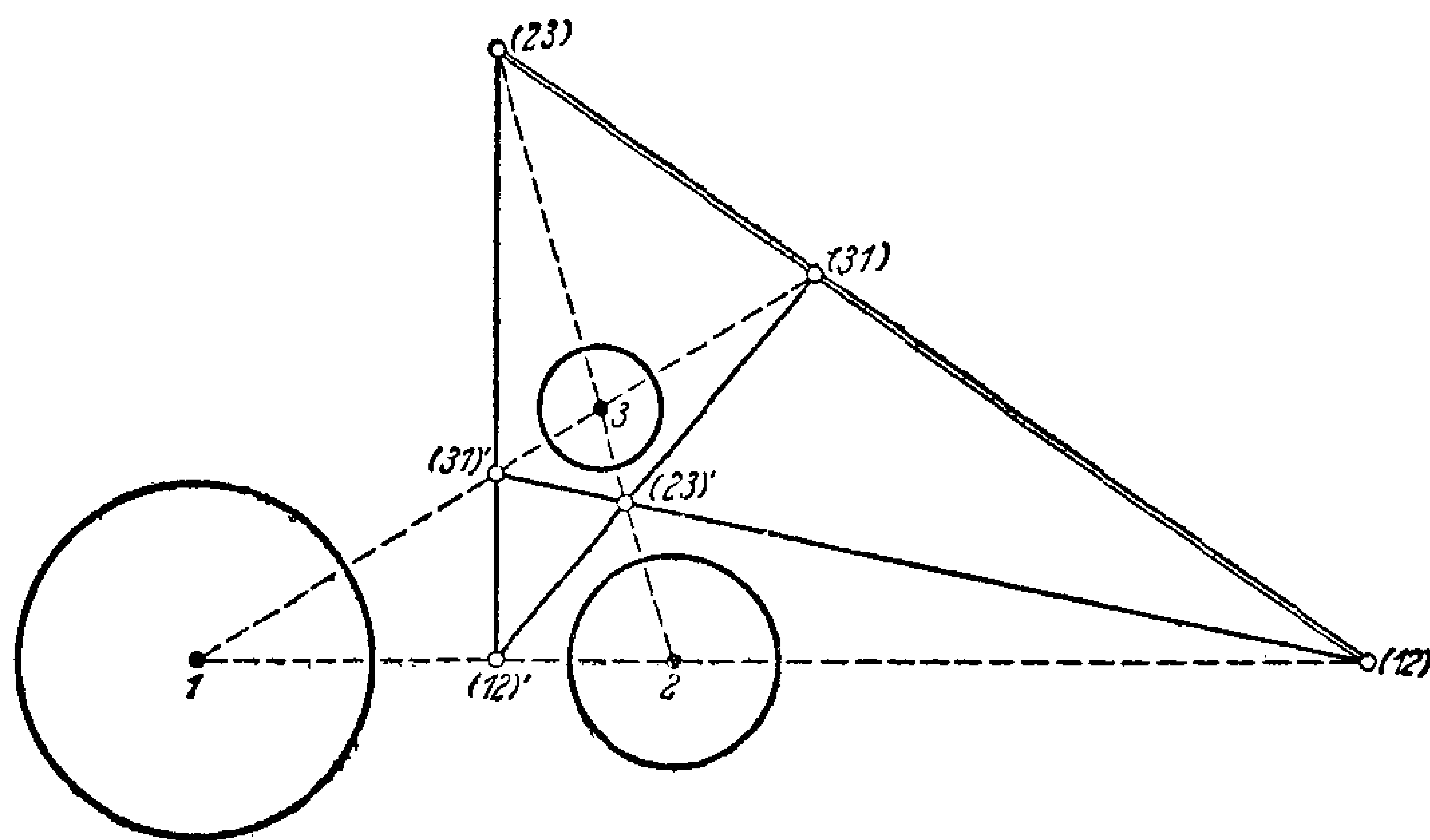


图 147

有了以上的准备，我們进入四个球的討論。今假定四球1, 2,

① 証明　設圓1, 2, 3的半徑分别为r_1, r_2, r_3。則三个相似外心将三圓心作成的三角形的边分成比$-\frac{r_1}{r_2}$; $-\frac{r_2}{r_3}$; $-\frac{r_3}{r_1}$。三个比之积是-1。因此按梅奈劳斯(Menelaus)定理，三外心在一直綫上。假如把两个相似外心換作相当的相似內心，則有二比变了符号。因此，三比之积还是等于-1，这就是說，我們又得到了三个共綫点。

3, 4 的球心不完全在一平面上,因之,沒有三个球心是在一直綫上的(参看图 148)。我們断言: 四球的所有相似中心 和 相似軸組成雷耶构形的点和直綫。 因为从四个球 1, 2, 3, 4 中每次取一对,有六种不同的取法,又因为每一对有一个相似外心和一个 相似 内心,所以一共有十二个相似中心。其次, 相似軸的确数是 16。因为从四个球中每次取三个,共有四种取法,而每三个球有四个不同的相似軸,例如(123), (1′23), (12′3), (123′)。还有,每个軸与三个点相結合, 例如(123)与(12), (23), (13) 相結合。每个点与四个軸相結合,例如(12)与(123), (123′), (124), (124′)相結合,(12)′与(1′23), (12′3), (1′24), (12′4)相結合。

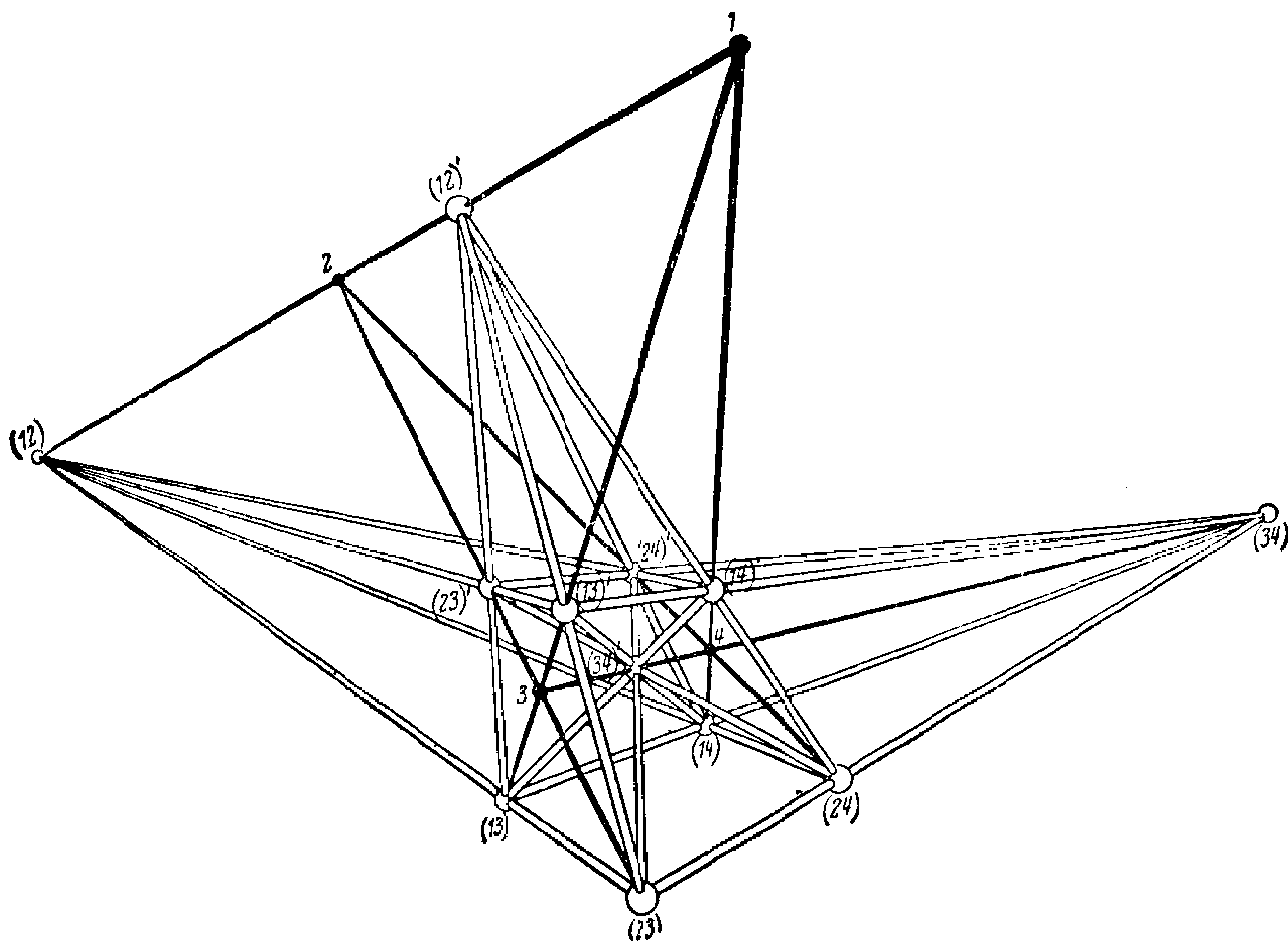


图 148

这样說来,相似中心和相似軸事实上作成一构形$(12_4 16_3)$。要証明这个构形与雷耶构形等同,还必須找出十二个适当的平面来。

首先取四个平面，每一平面包括三个球心。在任一如此的平面上，点和軸作成一完全四边形，正如雷耶构形的情形。要找出其余八个这样的平面，只要取交于构形中的一点的二相似軸所决定的其他平面就成。但这样的两个軸必須属于不同的三数組，因为任意同一三数組的二軸，例如(123)和(1'23)，乃是包含三个球心的平面[在本例中是(123)]，因此沒有得到新的平面。让我們从只包含两个相似外心的軸，例如从(123)和(124)开始。它們决定一平面，此平面包含(12)。除此之外，这一平面还包含两个軸上的其他四点，即(13)，(23)，(14)和(24)。但点(23)和(24)也在(234)上，而此軸还包含另外一个相似外心(34)。因此所有的六个相似外心都在我們上面所說的那个平面上。这个平面还包含其他的"外"軸(134)和(234)，因此，这个平面实际上与六个点和四条直綫相結合。現在我們来看不同的三数組的两个相交的軸，一个是"外"軸，一个是"内"軸的情形。因为这两个軸的交点必然是外心，而且所有的数字作用相等，我們可以取二軸(123)和(124')作代表。这二軸除了交点(12)外，还包含(13)，(23)，(14)'和(24)'諸点。跟上面的道理相同，可知軸(134')和(234')和点(34)'也在平面(123)和(124')上。因此，由球4和其他三球决定的三个相似内心与由球1，2，3决定的三个相似外心在一平面上。这样的平面应該有四个。剩下还有两个相交的相似内軸的情形未考虑。固然上面所說的平面包含三个两两相交的内軸，但是交点常是相似内心，对于交点是相似外心的情形还未解决。現在我們就講例如交于一个相似外心(12)的二内軸(123')和(124')。除了交点以外，这两个軸所决定的平面也包含(13)'，(23)'，(14)'和(24)'四点。因此此平面还包含二軸(1'34)，(2'34)和点(34)。这样說来，在此平面上有四个相似内軸，并且与四面体1234的一对对棱1，2和3，4交于相似外心，与其余的棱交于相似内心。这样的平面有三个，因为一个四面体

有三对对棱。合起来，我們一共得到了 1+4+3=8 个平面。

为清楚起見，我們列出两張表，分别表明点和平面的結合关系与点和直綫的結合关系。四面体的四个面用 I, II, III, IV 标明，其中 I 是对着点 1 的面。把包含六个相似外心的平面記作 e_a，包含三相似外心和三相似内心的四平面分别記作 e_1, e_2, e_3, e_4。最后，把包含四面体一对对棱的其他三个平面記作 (12, 34)，(13, 24)，(14, 23)。为簡便起見，点和直綫的括号一律省略了。

	平面											
	I	II	III	IV	e_a	e_1	e_2	e_3	e_4	(12,34)	(13,34)	(14,23)
点	23	13	12	12	12	23	13	12	12	12	13	14
	24	14	14	13	13	24	14	14	13	34	24	23
	34	34	24	23	14	34	34	24	23	13′	12′	12′
	23′	13′	12′	12′	23	12′	12′	13′	14′	14′	14′	13′
	24′	14′	14′	13′	24	13′	23′	23′	24′	23′	23′	24′
	34′	34′	24′	23′	34	14′	24′	34′	34′	24′	34′	34′
直綫	234	134	124	123	123	234	134	124	123	123′	12′3	1′23
	2′34	1′34	1′24	1′23	124	1′23	12′3	123′	124′	124′	1′24	12′4
	23′4	13′4	12′4	12′3	134	1′24	12′4	13′4	134′	1′34	134′	13′4
	234′	134′	124′	123′	234	1′34	2′34	23′4	234′	2′34	23′4	234′

构形画在图 148 上①。这个构形与图 145 的等同，这个事实如果把(12)，(12)′ 和(34)在三个相互垂直的方向上移向无穷远，就可看得清楚。这时三点变为图 145 上构形的无穷远点。八个点 (13)，(14)，(23)，(24)，(13)′，(14)′，(23)′，(24)′ 变为立方体的頂点，(34)′ 变为立方体的中心。但点 1 和 2 也变成了无穷远点。要想找出图 145 中的四个球，必須加入极限情形以推广相似中心的定义。首先，二等圓(球)的相似中心应該定义为連心綫上的无

① 假如把图 148 看做平面图形，它表示由共面四圓的相似中心和相似軸組成的构形 $(12_4 16_3)$。圓心仍为 1, 2, 3, 4，半徑大小可以选得同空間的情形一样。

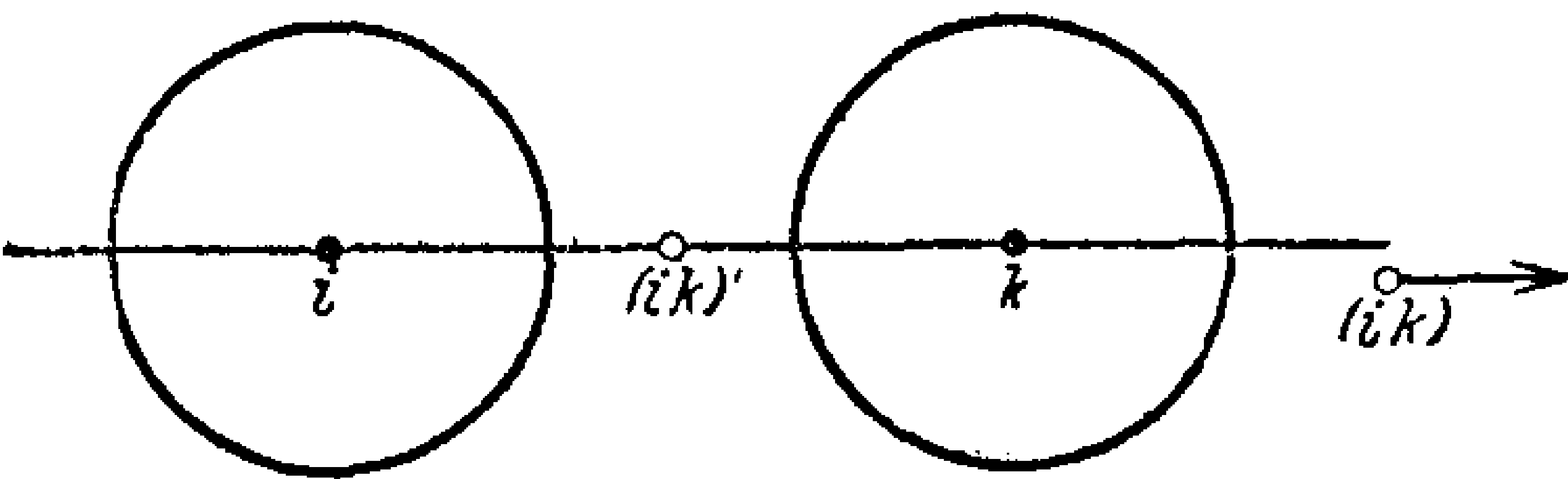


图 149

穷远点(图 149)。其次,一球 k 和一平面 e 的二相似中心(图 150)应該定义为球 k 中垂直于 e 的直徑上的二端点 (ke) 和 $(ke)'$。因为,如果把 e 代以切 e 于 P 的一組圓 K, 而 P 是直徑延綫与 e 的交点,那么可以看出,当 K 的半徑增加到无穷大的时候, k 和 K 的相似中心趋于 (ke) 和 $(ke)'$。最后,我們考虑二平面 e 和 f 交于一直綫 g 的情形(图 151)。在这种情况下二相似中心必須規定为在垂直于 g 的方向上且在 e 和 f 作成的二角的平分綫上的无穷远点。这个定义同样可用极限过程来驗証:把 g 代以二合同球的交圓,但此二球在 g 上一定点分别切于 e 和 f, 然后再让球的半徑增大到无穷大。

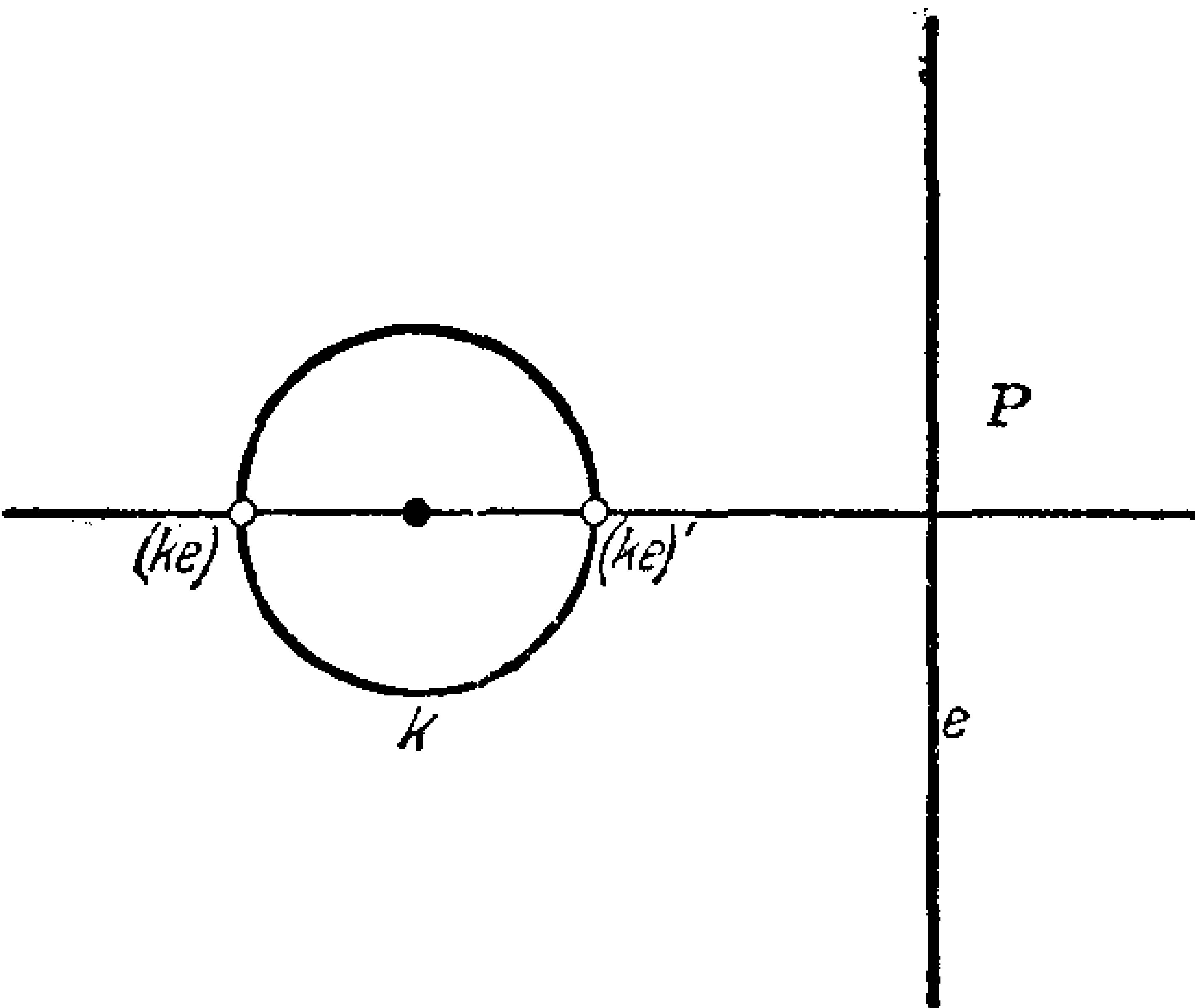


图 150

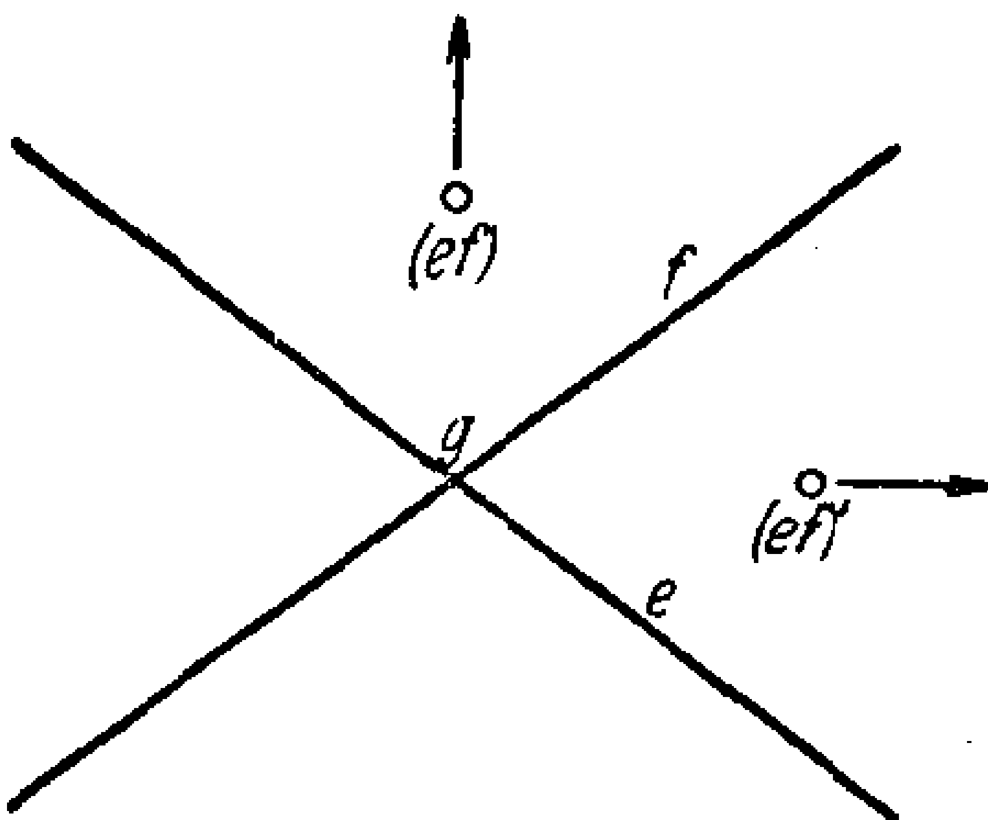


图 151

有了以上的几个定义,就可以把原来的雷耶构形当作一个相似中心体系来解释。假定球 3 和球 4 的中心分别是图 145 上立方

体的前面的面和后面的面的中心。假定二球半徑相等，而且如此选擇半徑，使每个球通过所属面的四个頂点。假定 1 和 2 是分别垂直于上述二面的二对角綫的任二平面。則构形中的諸点是 1, 2, 3, 4 的相似中心，其排列的情形如图 148。

除了这个极限情形之外，我們可以考虑以四等球——球心为正四面体的頂点——为基础的构形。在这里相似外心必为四面体六条棱上的无穷远点，因此无穷远平面必属于此构形，应用以前的記号，这个平面应該写作 e_0 。相似內心是各棱的中点，它們作成正八面体的六个頂点(图 152)。八面体的所有平面属于此构形，也就是四面体的四个面 I, II, III, IV 以及按以前的記号用 e_1, e_2, e_3, e_4 表示的平面。至于构形的其他三个平面則是八面体的三个对称平面。构形的直綫是四面体的面上的四条无穷远直綫(相似外軸)和八面体的十二个棱(相似內軸)。

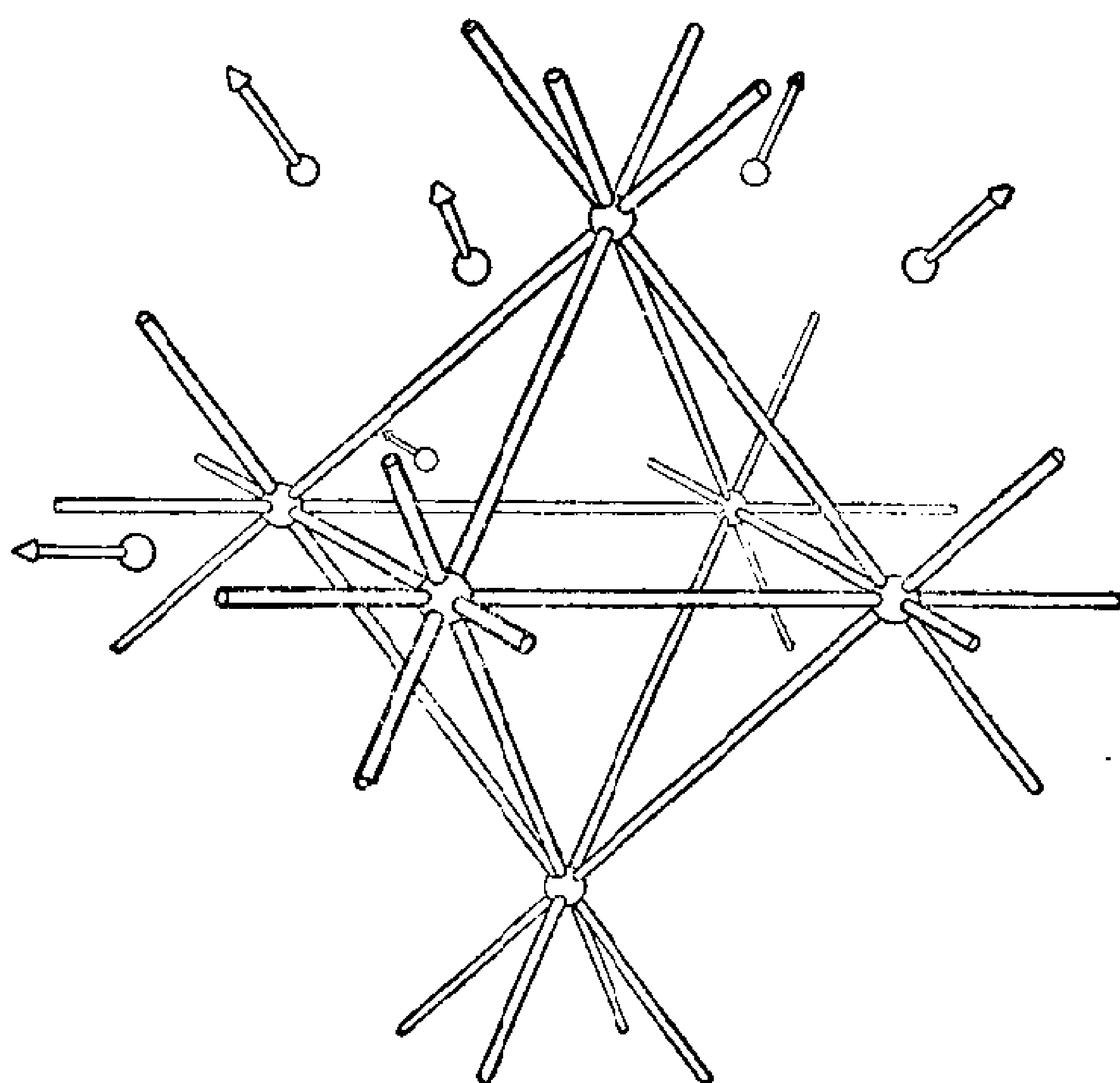


图 152

在第二章中我們曾經指出立方体和八面体的相互关系。依照 § 19 所講的，我們可以說立方体和八面体成对偶对应。同样还可

以更一般地証明，图 152 的点和平面与图 145 的平面和点成对偶对应；立方体的頂点和面分别对应八面体的面和頂点，立方体的中心和通过中心的六个平面分别对应图 152 的无穷远平面和无穷远平面上的六个点，立方体的三个无穷远点对应八面体的三个对称平面[1]。由此可見，点和面的雷耶构形是自对偶的。自然，从立方体和八面体得出的两个互成对偶的雷耶构形从外表来看似乎不相同，但对于投影几何的目的来説，所有的雷耶构形都应該視为等同的[2]。

我們指出，雷耶构形也象一些平面构形一样，有另一个重要的对称性質，这是説，我們将証明这个构形是正則的。从上面的討論看不出这一点，因为各平面对于相似中心体系来説属于四种不同的类型，而且在作出构形时，无論是借助于立方体或借助于八面体，各点和各平面都起不同的作用。在下一节里，我們将用一种能显示所有元素都起着相同作用的方法来作雷耶构形。要想达到这个目的，需要进一步研究三維和四維空間的多面体。因为正如三維空間图形可以投影到平面一样，四維空間图形也可以投影到三維空間，其中的一个图形經过适当的投影之后，便可得出雷耶构形。

§23. 三維和四維空間的正多面体及其投影

在第二章里我們列举了三維空間的五种正多面体。在这些多面体里，正四面体的情形与其他正多面体不同。因为正四面体是自对偶，而其余的四种正多面体則是两两相互对偶：八面体与立方体对偶，十二面体与二十面体对偶。正四面体的这种特点可能

---

① 这种对应是从对于内接于立方体的球作配极变换得到的。

② 如果从空間的任一投影坐标系出发，则可得出一种八面体的投影推广。六个坐标轴上的单位点和这六个軸与单位平面的六个交点总是雷耶构形中的点。

和它跟其余的正多面体相区别的第二种現象有关。这是說，那四种正多面体可以称为"中心对称"多面体，因为它們的頂点、棱、面都成对地对于中心对称。例如，連接立方体的一頂点和中心的直綫必过另一頂点。但在另一方面，正四面体对于其中心并不对称，因为連接正四面体的一頂点和中心的直綫，和此正四面体交于其底面的中心。

仿照第二章末的相应的論述，可証明在四維空間里也存在有限个正則的形体，其数为 6①。这样的形体除了包含点、棱和面以外，自然还包含三維空間的片段作为边界。正象在三維空間中要求正多面体的面是正多边形一样，在四維空間中要求形体的三維边界是正多面体。这样的形体叫做"胞腔"，如果它被 n 个多面体包圍，叫做 n-胞腔。現将四維空間正則形体的重要数据列成下表：

四維空間

	边界多面体的个数和类型	頂点个数	对偶性
1. 5-胞腔……	5 个四面体	5	自对偶
2. 8-胞腔……	8 个立方体	16	互为对偶
3. 16-胞腔……	16 个四面体	8	互为对偶
4. 24-胞腔……	24 个八面体	24	自对偶
5. 120-胞腔……	120 个十二面体	600	互为对偶
6. 600-胞腔……	600 个四面体	120	互为对偶

最后的对偶性一栏不难从表中推出来。因为在四維空間中，

① 讀者可以參考 H. de Vries 的 "Die Vierte Dimension，萊比錫和柏林，1926 版——著者注。

也可以參考 H. S. M. Coxeter 的 Regular Polytopes (1947) 和 H. P. Manning 的 Geometry of Four Dimensions, 1914——英譯者注。

还可以參考 В. И. Стрингхем 的 Правильные Фигуры в n-мерном Пространстве, Успехи математических наук, вып. X, 1944——俄譯本編者注。

点与三維空間对偶,直綫与平面对偶。

从上表可知,5-胞腔与四面体相似,而8-胞腔,16-胞腔,120-胞腔,600-胞腔分别与立方体、八面体、十二面体、二十面体相似。24-胞腔居于特殊的地位;它不但是自对偶的,而且是中心对称的。但另一个自对偶的5-胞腔,与三維正四面体有相同之点:它不是中心对称的。

对于高維空間类似的研究已經有了結果。这里的情形却是非常簡单而且很有規律,因为高維空間只有三种正則形体。現将重要的数据列成下表:

n 維空間 $n\geq5$

	$n-1$ 維边界胞腔的个数和类型	頂点个数	对偶性
1. $(n+1)$-胞腔……	$n+1$ 个 n-胞腔	$n+1$	自对偶
2. $2n$-胞腔…………	$2n$ 个 $(2n-2)$-胞腔	2^n	互为对偶
3. 2^n-胞腔…………	2^n 个 n-胞腔	$2n$	

在三維空間里与上列三种类型的形体相当的是四面体、立方体和八面体($n+1=4$, $2n=6$, $2^n=8$)。在四維空間里,則是5-胞腔,8-胞腔,16-胞腔。这样看来,三維空間里的十二面体和二十面体,四維空間里的24-胞腔,120-胞腔,600-胞腔,在高維空間中都沒有对应的类型。

現在我們来考虑正則的形体在比它的維数少一的空間里的投影。从正多面体到平面上的投影开始。因投影中心的选擇不同,投影也有所不同。在第92頁上图95到图99用的是平行投影,也就是說,投影中心在无穷远点。这种投影法的优点在于把平行綫变为平行綫。但也有缺点,就是往往使部分的面与面重合起来。这样的缺点可以克服,只須移动投影中心使它和一个面十分靠近。为

了保持对称起見，我們把投影中心移到这个面在中心处的垂綫上(与垂足非常靠近)，并选定这一个面作为象平面。这样就可得出图 153 到图 157 的五种正多面体的投影。当我們揭开一个面，并从开出的洞口向多面体內部窺視的时候，就可看到这样的图象。

投影中心如果放在多面体的边界上，則通过这个中心的各面就好象是直綫，因而投影成为极不对称的形状。

把投影中心移到多面体的內部，所成的象将产生巨大的变化。此时的象不論象平面如何放置都要伸展到无穷远。这是因为通过投影中心的每一平面都与多面体相交，特别地，对于通过投影中心

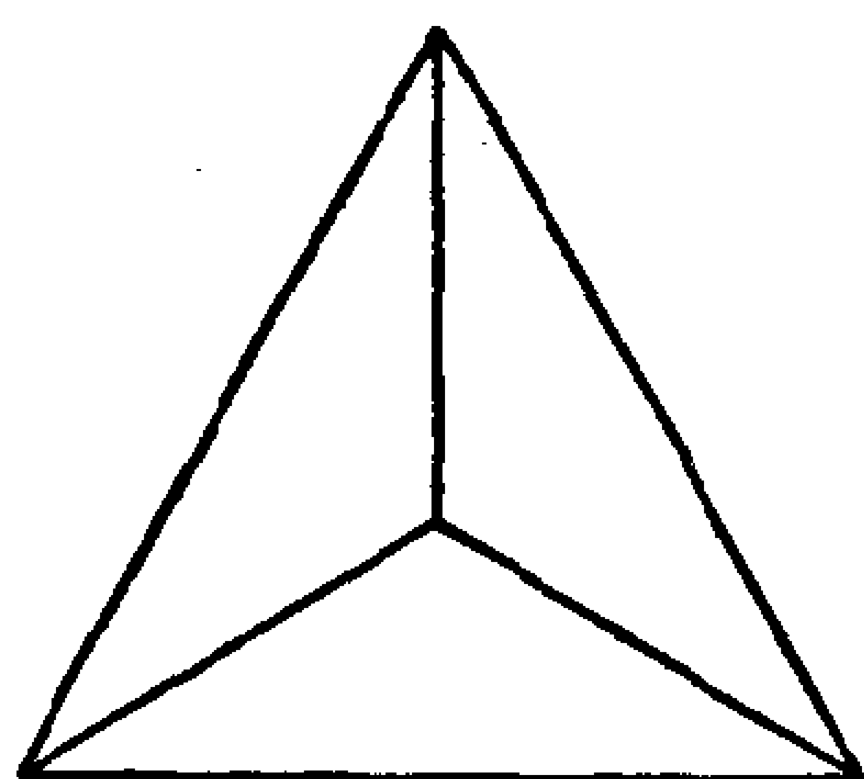


图 153　四面体

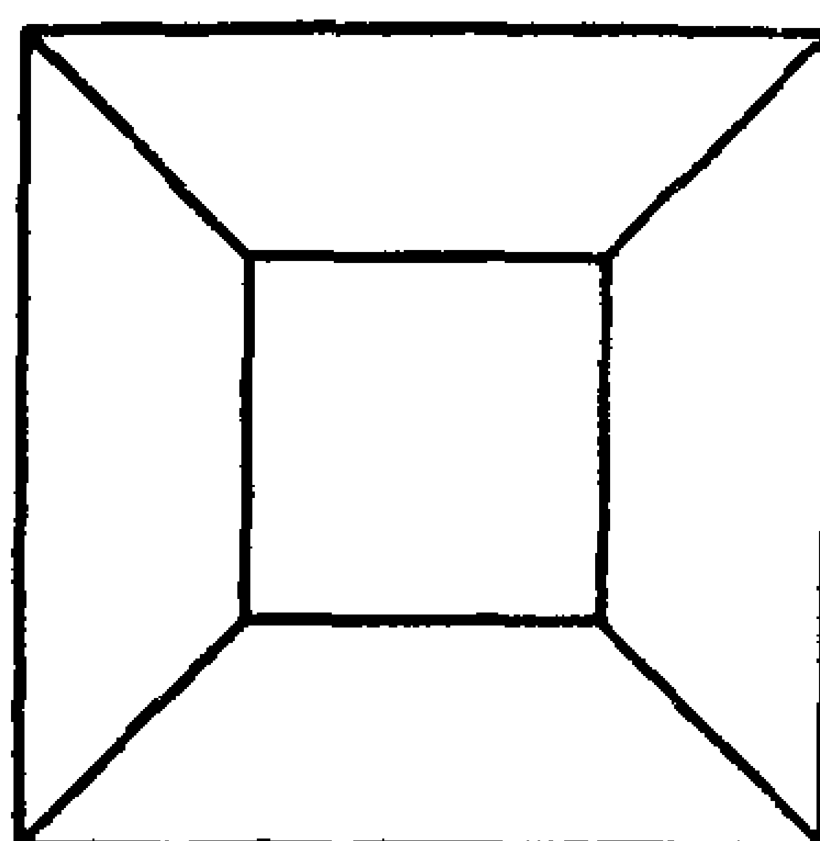


图 154　立方体

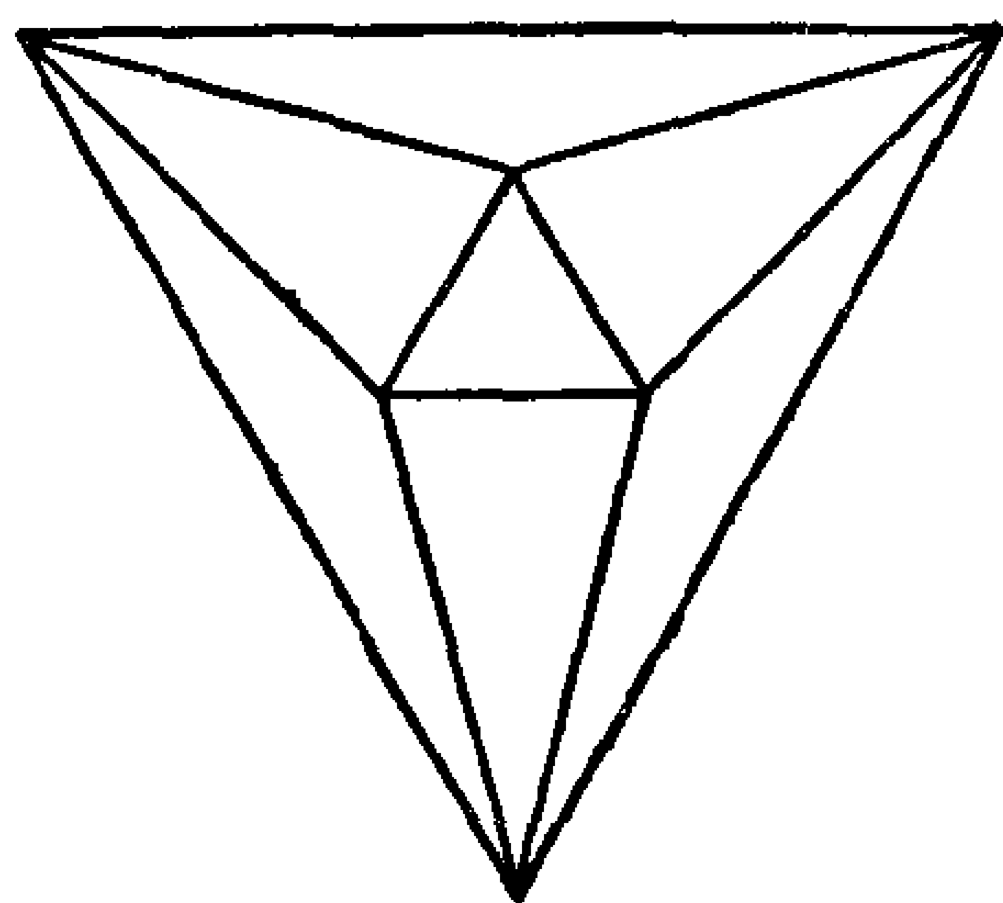


图 155　八面体

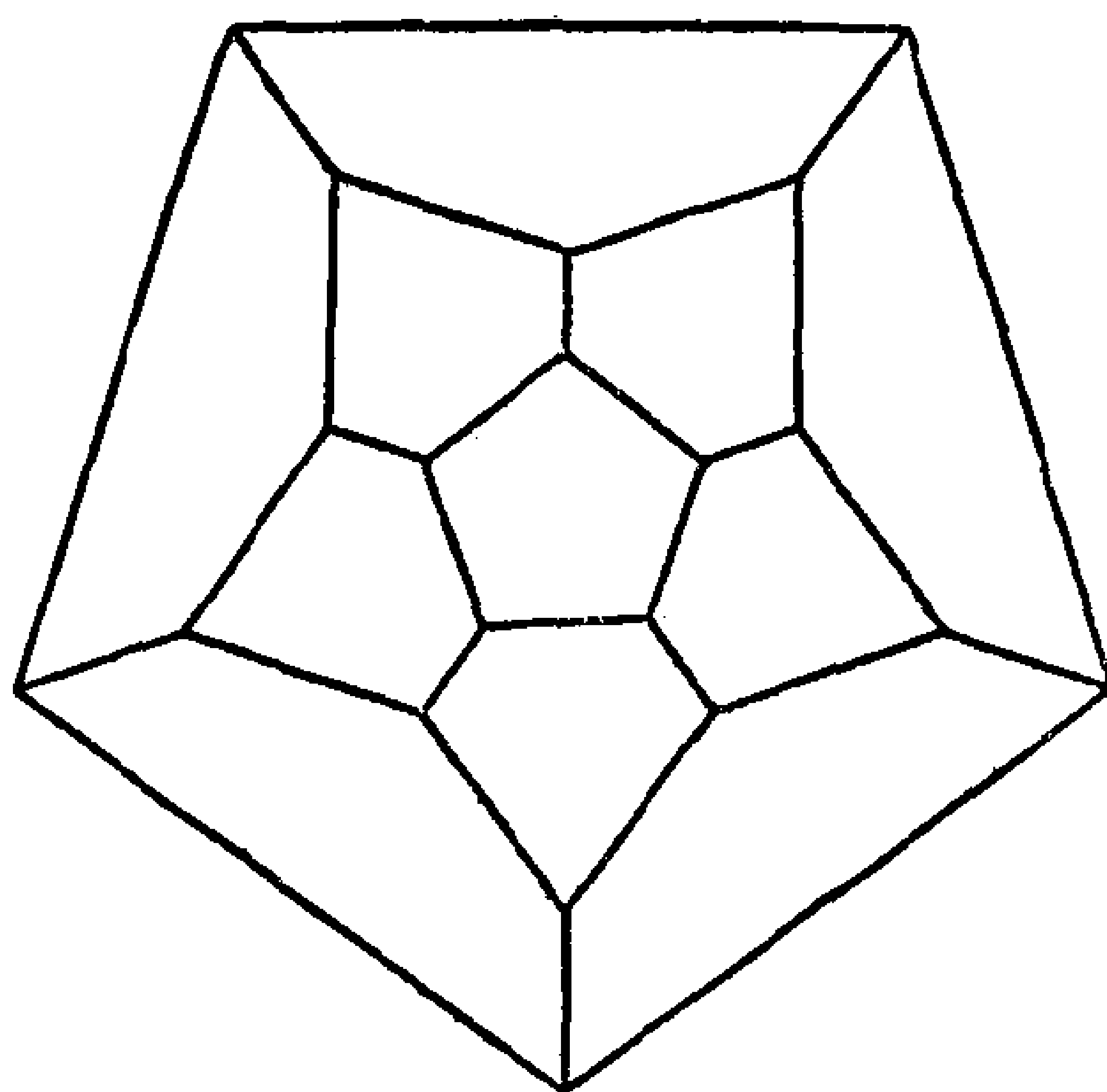


图 156　十二面体

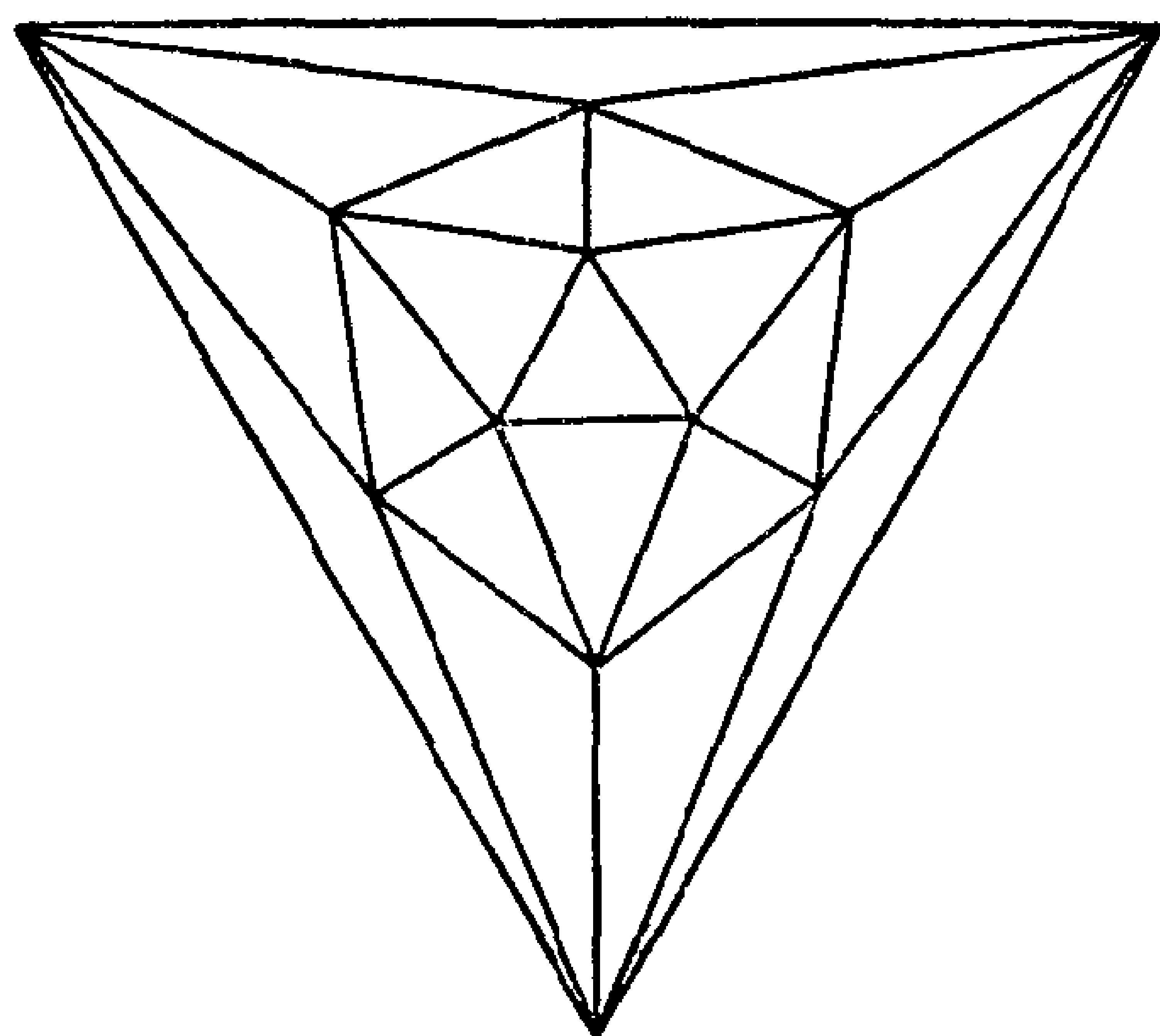


图 157 二十面体

而且与象平面平行的平面也应該如此，因此在象平面上产生无穷远点投影(参看第 116 頁)。然而，在投影中心是多面体中心的特别情况下出現一种在几何上有意义的現象。因为，在这种情况下，而且只有在这种情况下，通过中心的射綫把是中心对称的。在第 119 頁上我們講过綫把可以看作投影平面的一种模型，在这个模型里把中的直綫要看作"点"，平面要看作"直綫"。这样一来，我們从正多面体推出投影平面的正則剖分。但是只有在中心对称的多面体的情况下这种剖分才簡单地复盖投影平面；就四面体来說，对应于每条通过中心的直綫与多面体的面的两个交点的，是两个不同的象点，所以投影平面被复盖两次。但对于其他正多面体来說，每一对对徑元素在投影平面上只产生一个剖分元素。假如我們考慮綫把与平面的交点，也就是說，考慮本来意义的投影，那就不能保持完全的对称。不过，若如此选擇象平面，使它通过多面体的一个頂点并且在此頂点处垂直于連接頂点到中心的直綫(对于八面体的情形，参看图 158)，可得出十分簡单的象。图 159 到图 163 表示用这种方法作出来的五个投影。在各图上扩展到无穷远的一

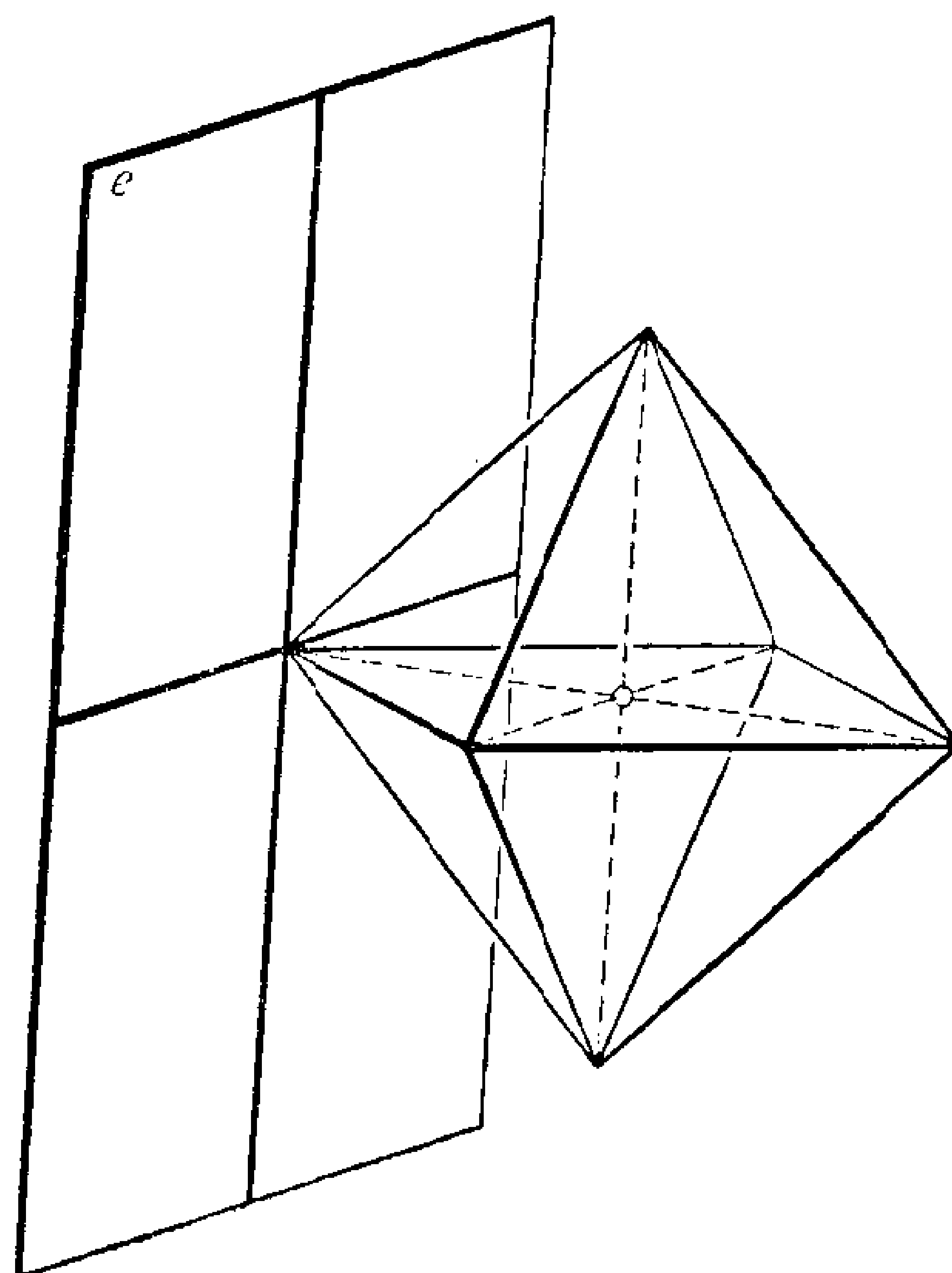


图 158

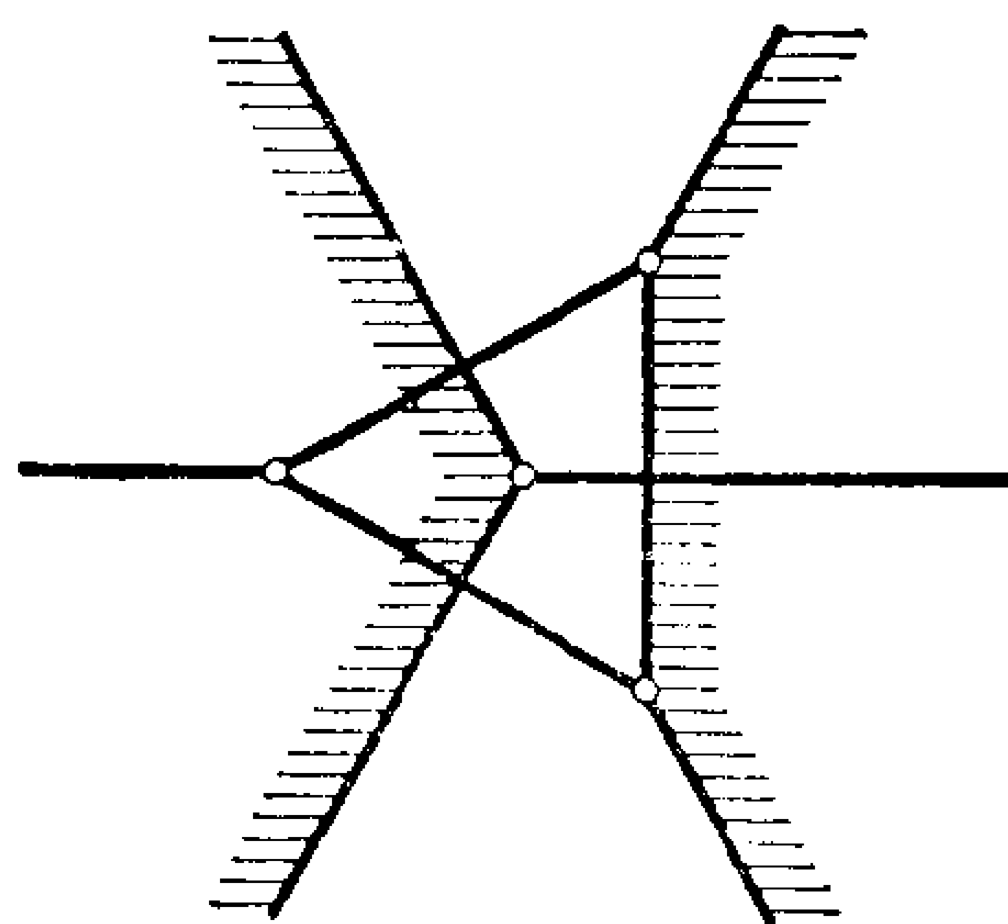


图 159　四面体

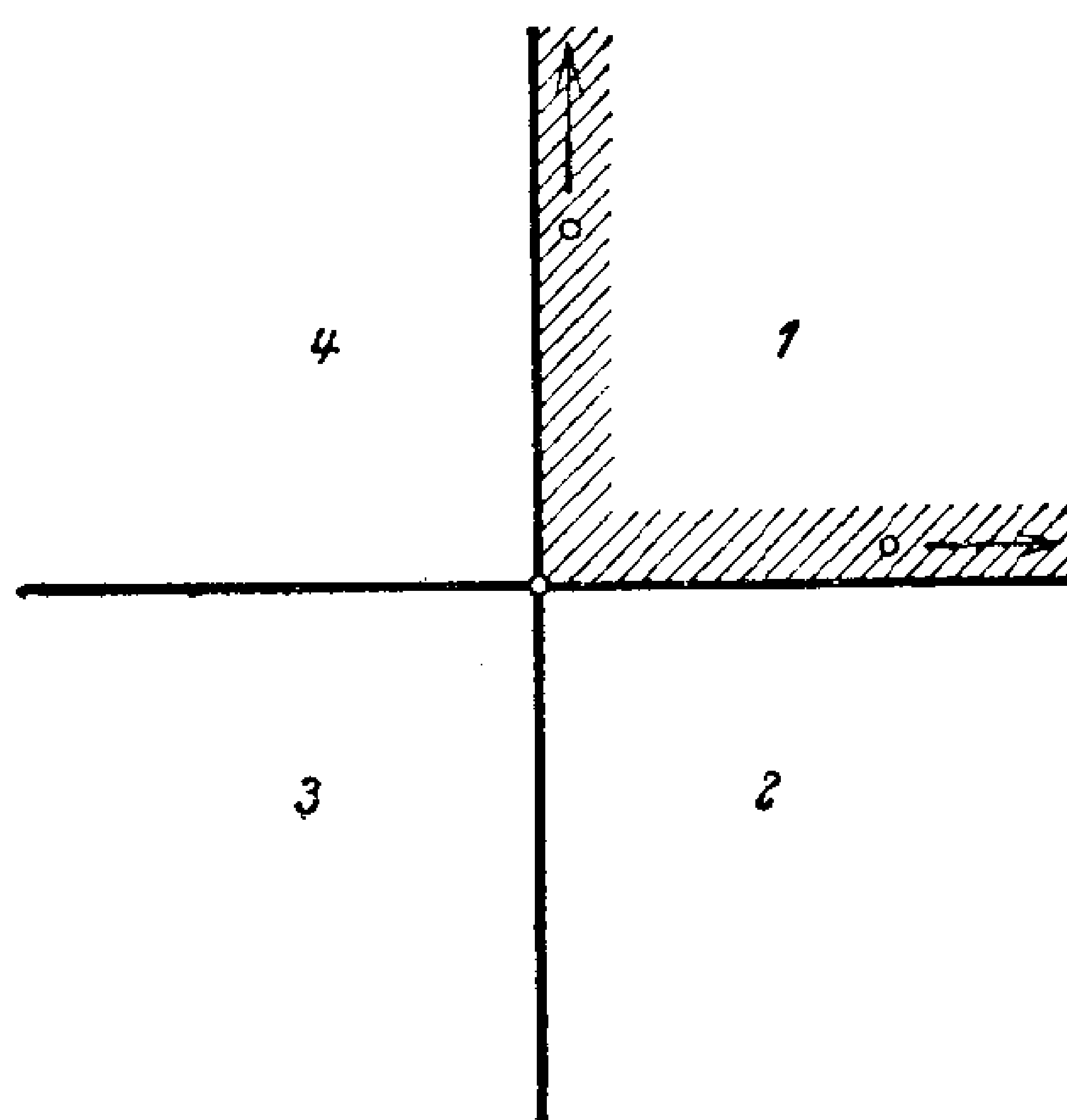


图 160　八面体

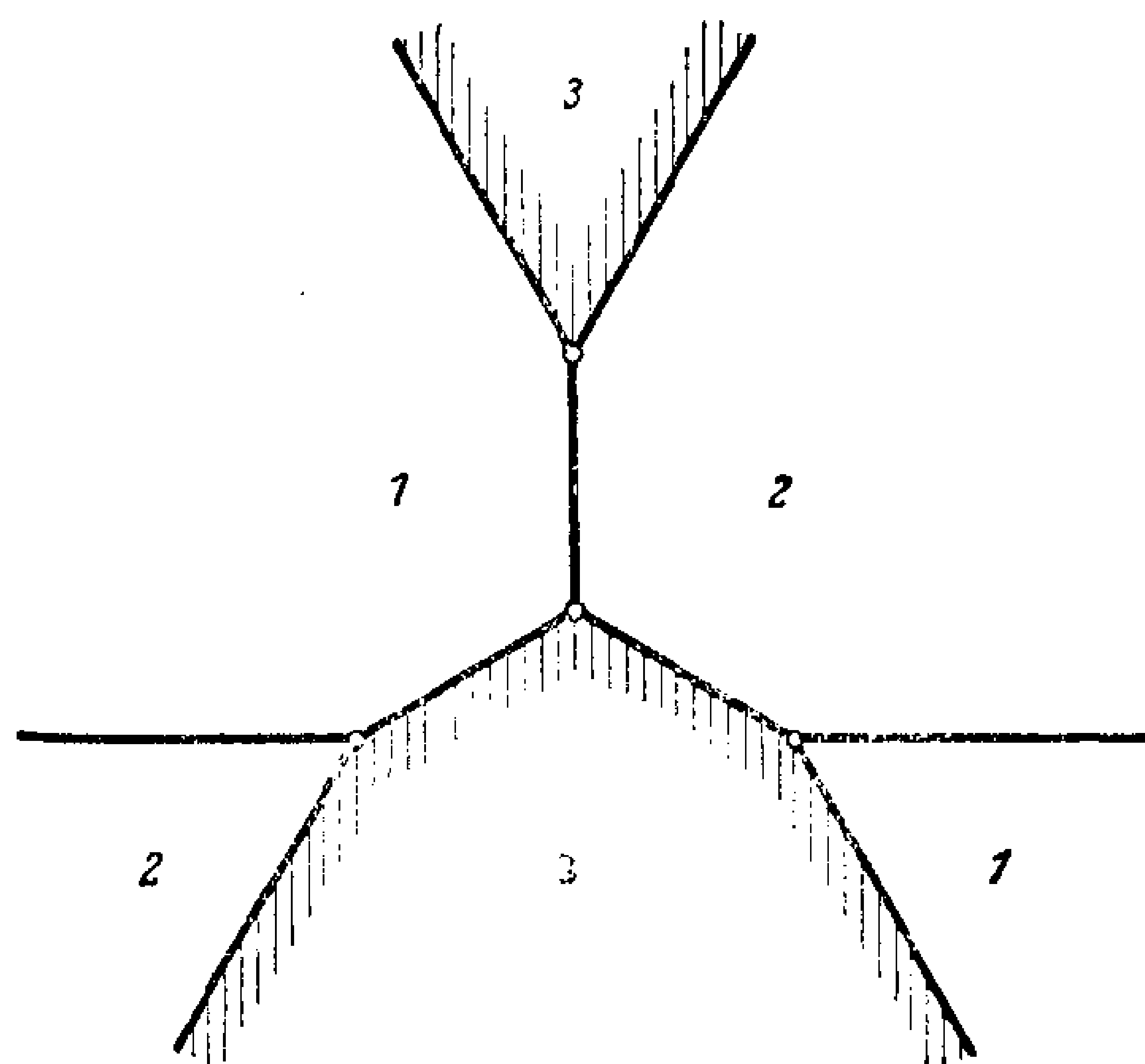


图 161 立方体

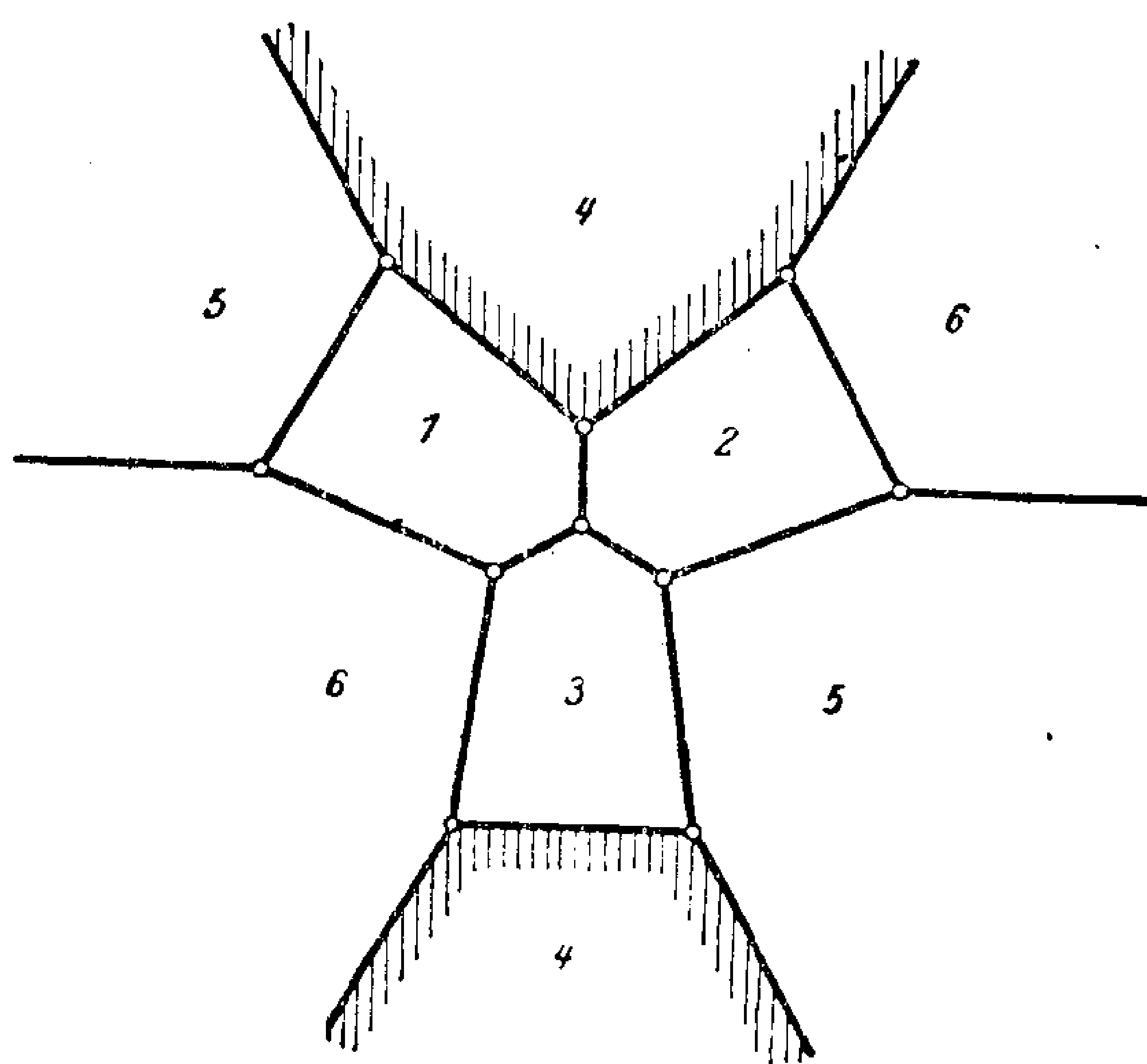


图 162 十二面体

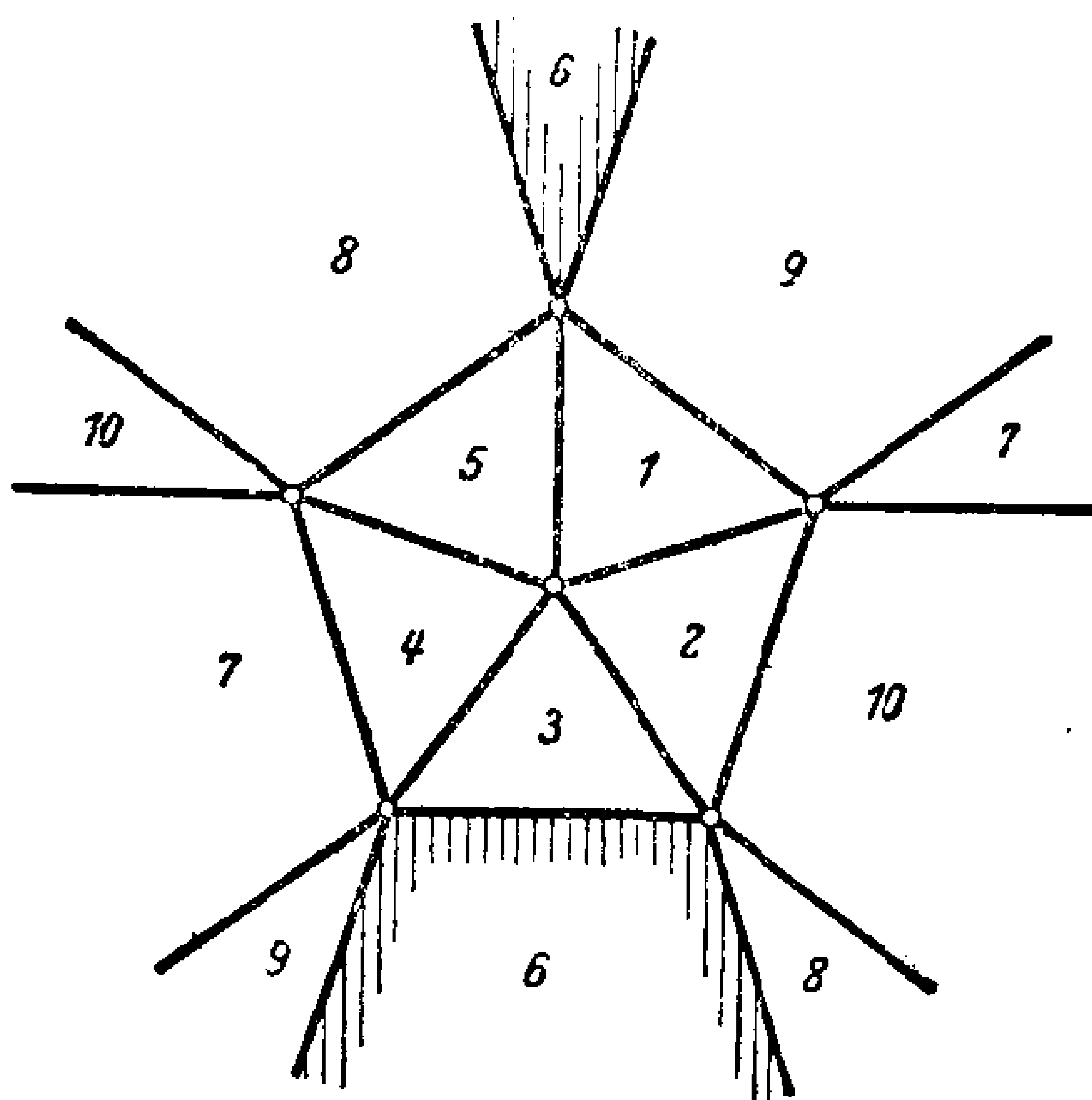


图 163　二十面体

个区域都用阴影标出。在四面体的投影中，象平面被复盖两次。至于其他图形，在象平面上的每一多边形恰好表示多面体的两个对徑面。

假如拿对称的多面体的一个面当作象平面(图 164 是立方体的情形)，則得到另外一組簡单的图形(对于四面体来説，得不到新的图形)。各多面体的投影如图 165 到图 168 所示①。

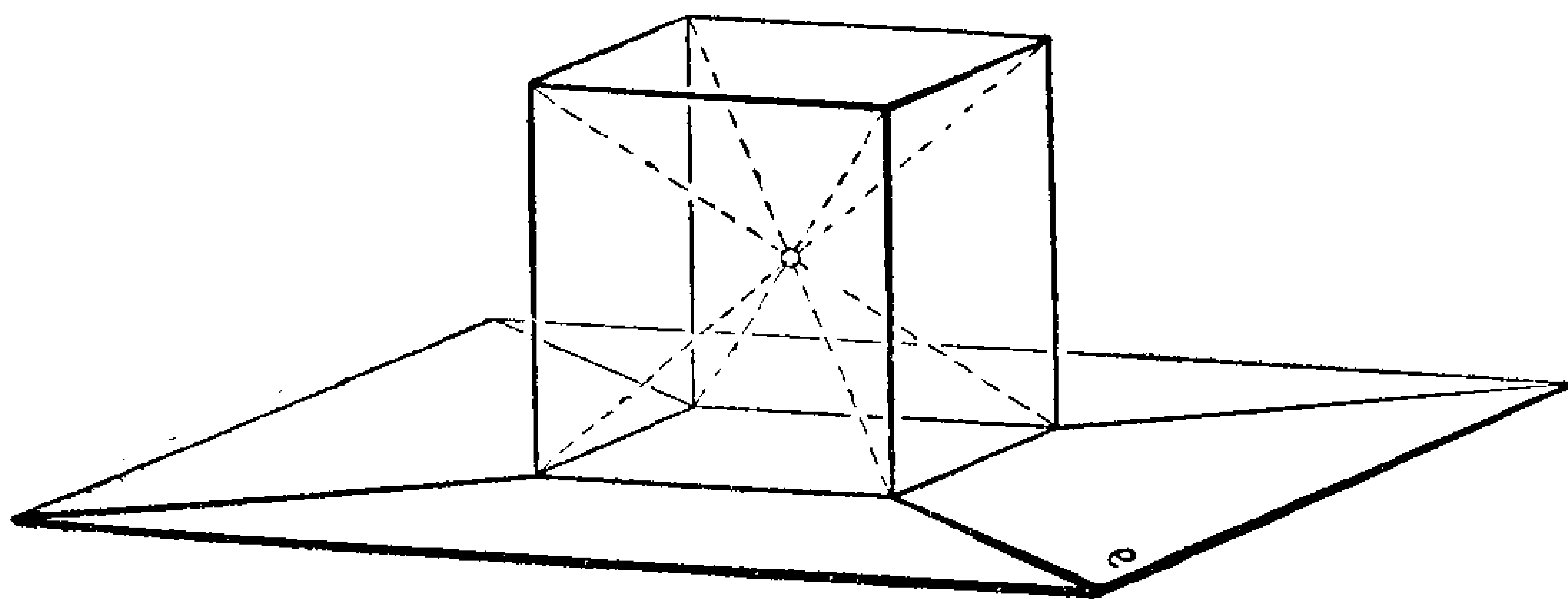


图　164

① 用这种方法得出的八面体的投影等于用投影坐标系将平面剖分为四个三角形的情形。

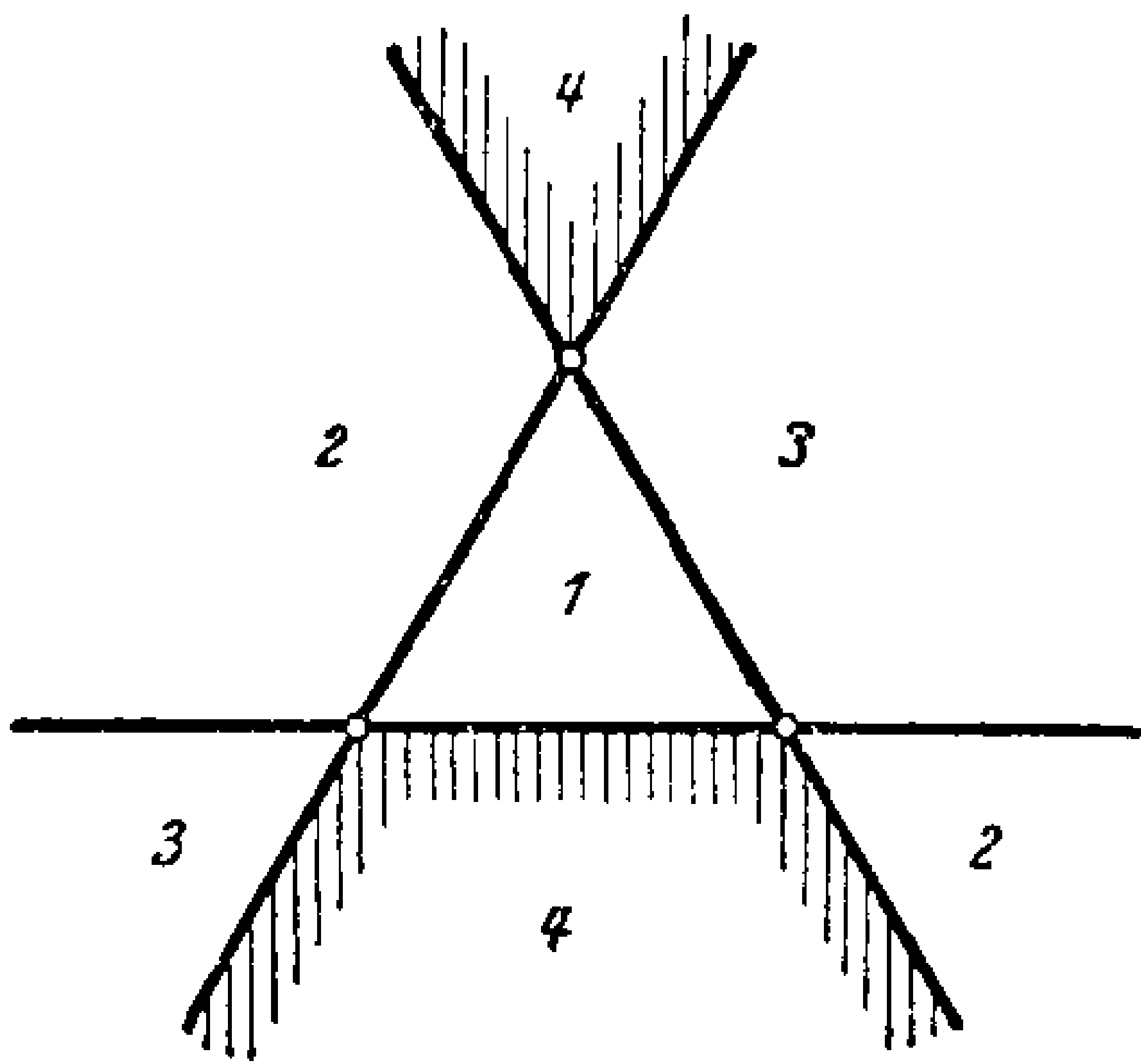


图 165 八面体

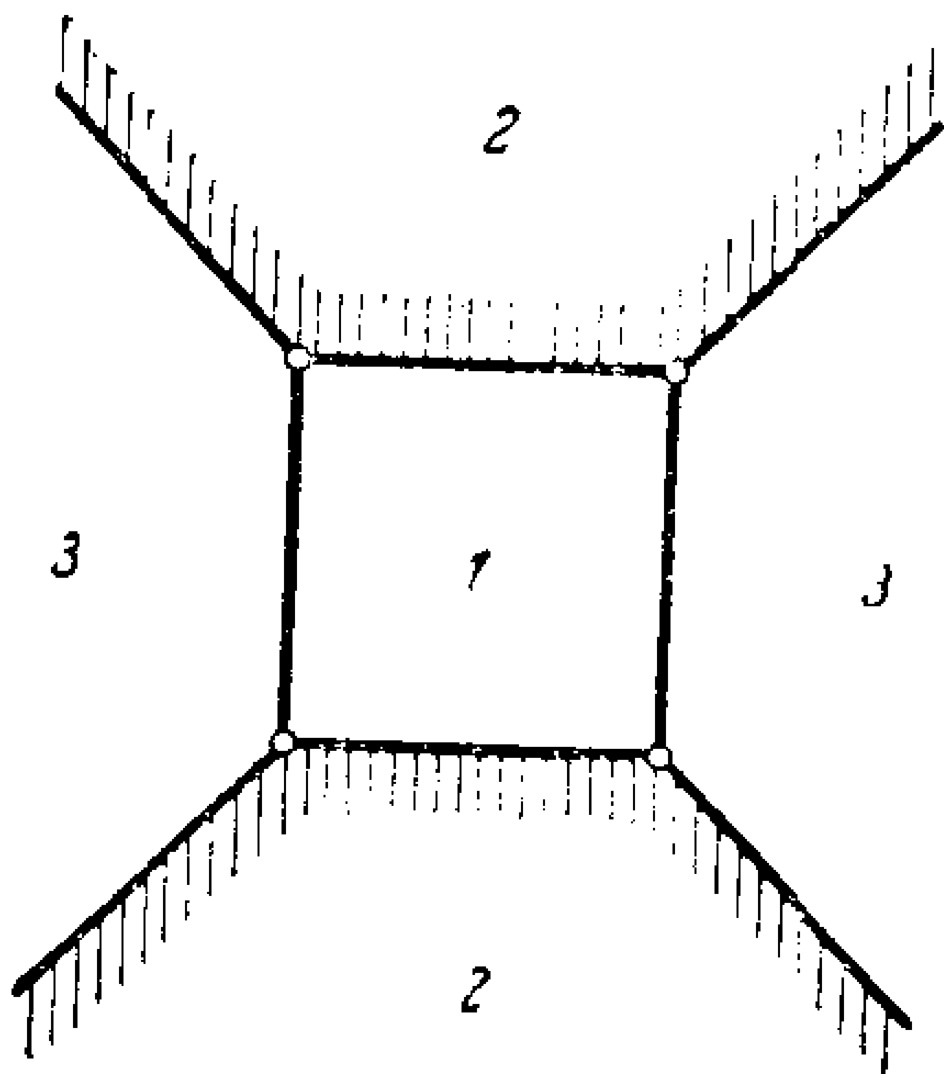


图 166 立方体

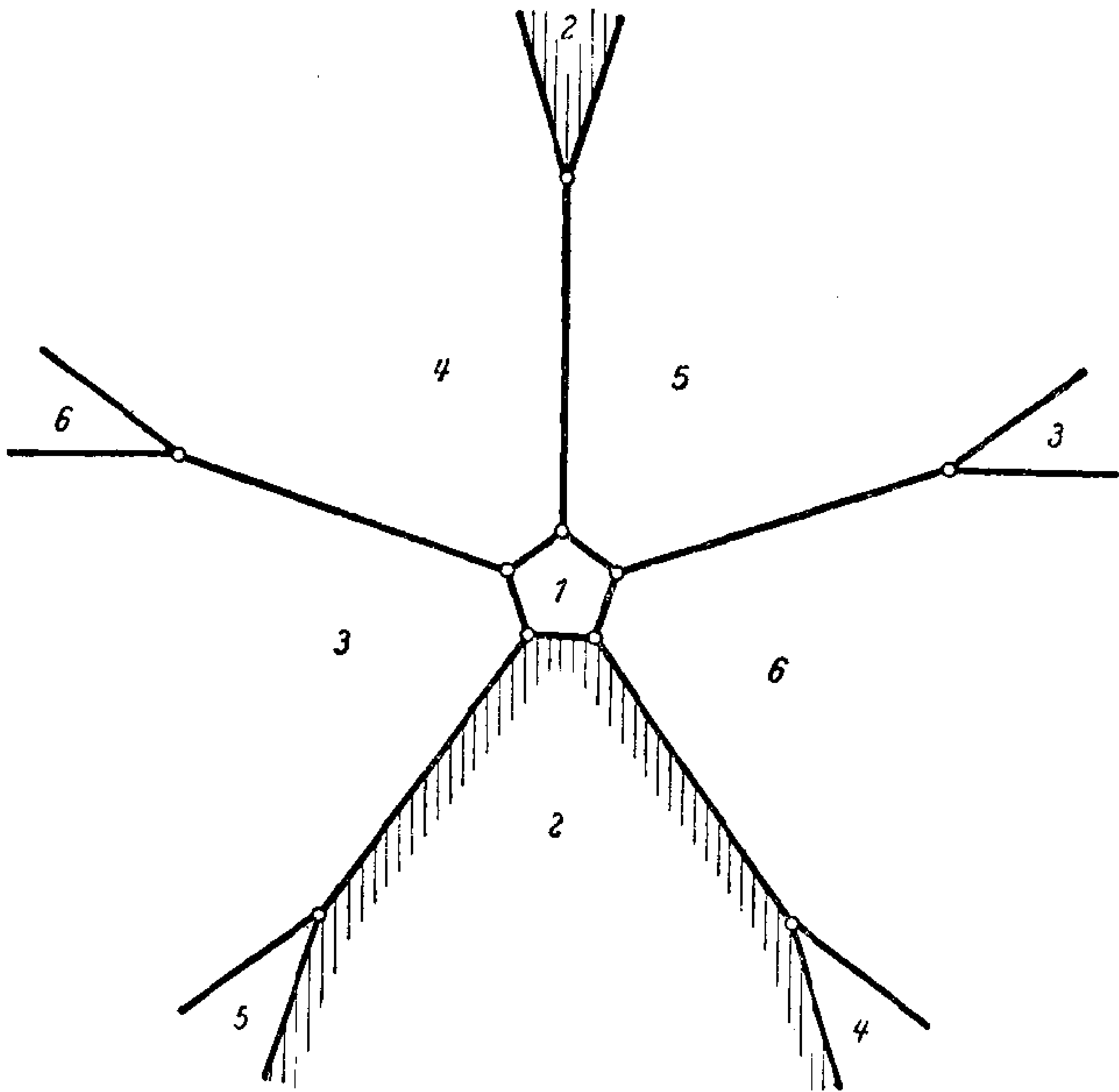


图 167 十二面体

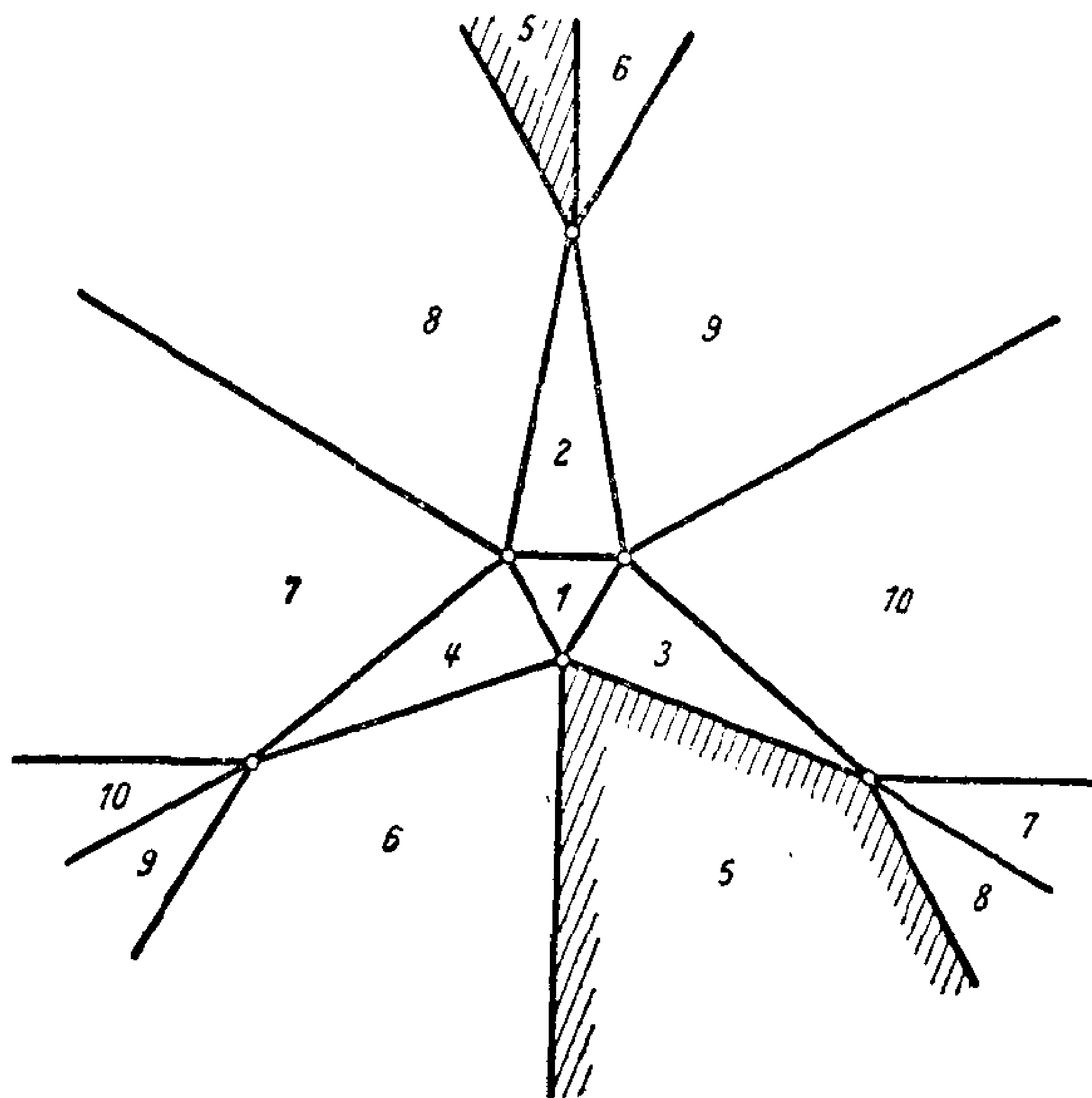


图168　二十面体

我們可以运用类似的投影办法，通过三維空間的图形去描写四維空間的胞腔。平行投影的方法在这里已不适用，因为这种方法把胞腔的边界多面体表示成部分复盖的、相交的三維空間的多面体。另一方面，利用得出图 153 到 157 上的同样办法可以得出四維胞腔的明显图象。这时胞腔的边界多面体被这样的一組空間多面体表示，其中有一个占着特殊地位，而且被其余的簡单而无遺漏地填满。如果把这些模型再投影到平面上来，就得到象图 169—172 上那样的投影。仔細观察，可以看出图 172 上的大八面体是由 23 个小八面体（有四种形状）填满，所以一共有 24 个八面体。至于 120-胞腔和 600-胞腔的图形就太复杂而不容易看清了。

如果把投影中心移到胞腔中心的位置上来，結果将得出投影空間的正則剖分。我們不能如同用綫把表示投影平面那样得出对称的投影空間模型，因为这里涉及四維图形。因此必須选擇一个特

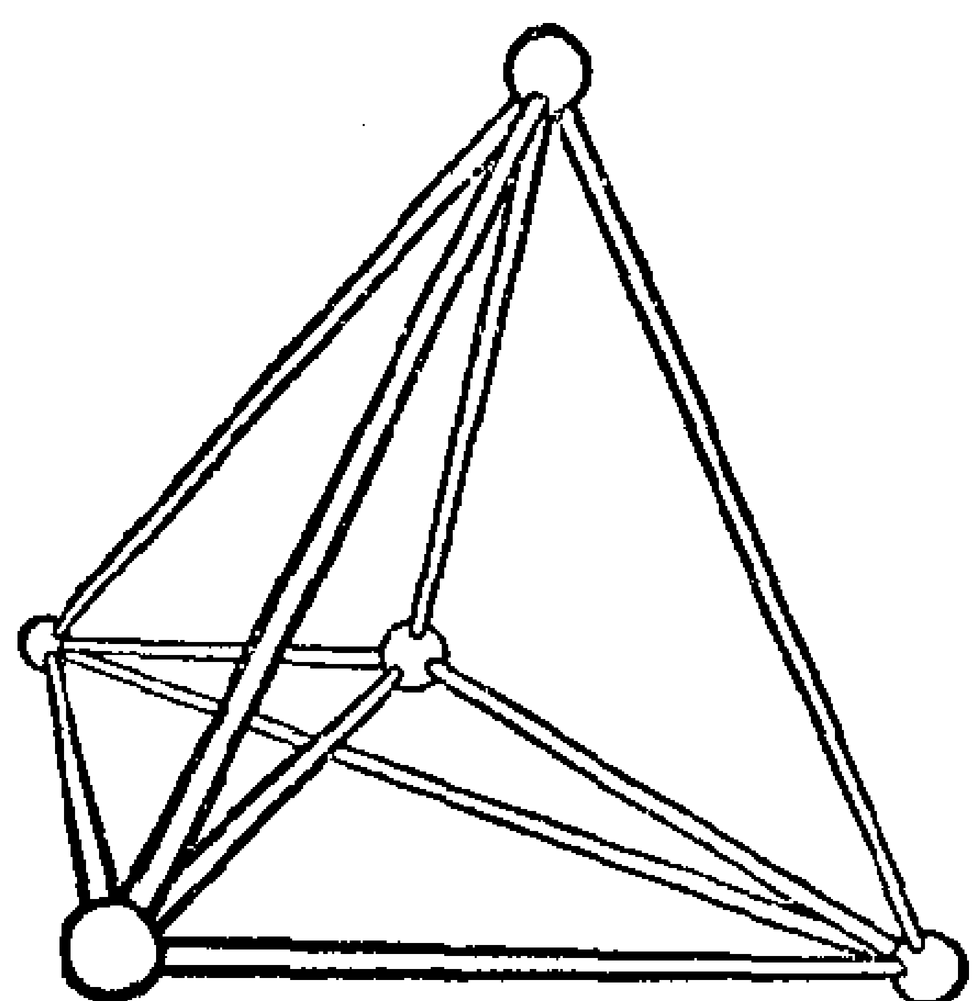


图 169　5–胞腔

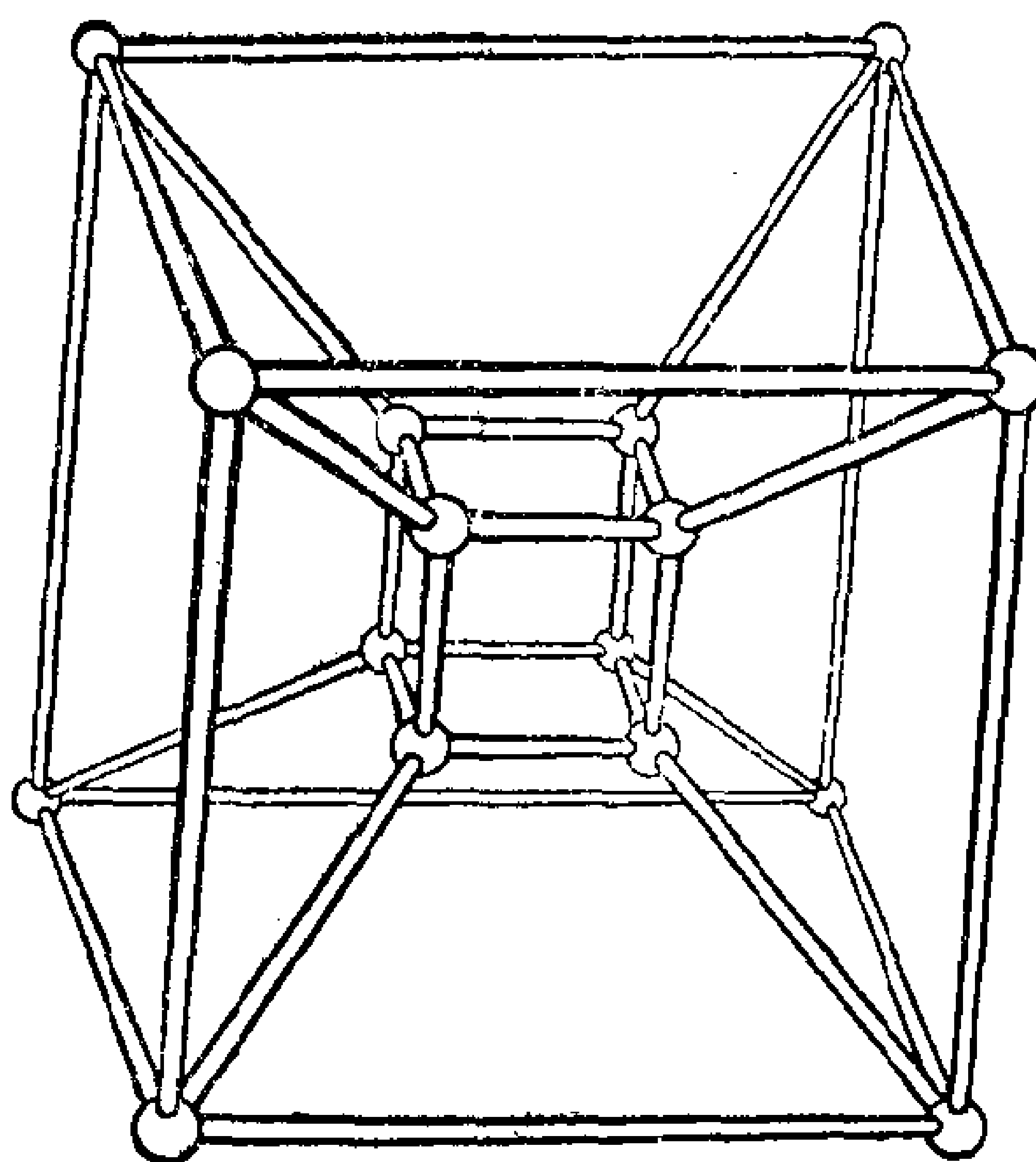


图 170　8–胞腔

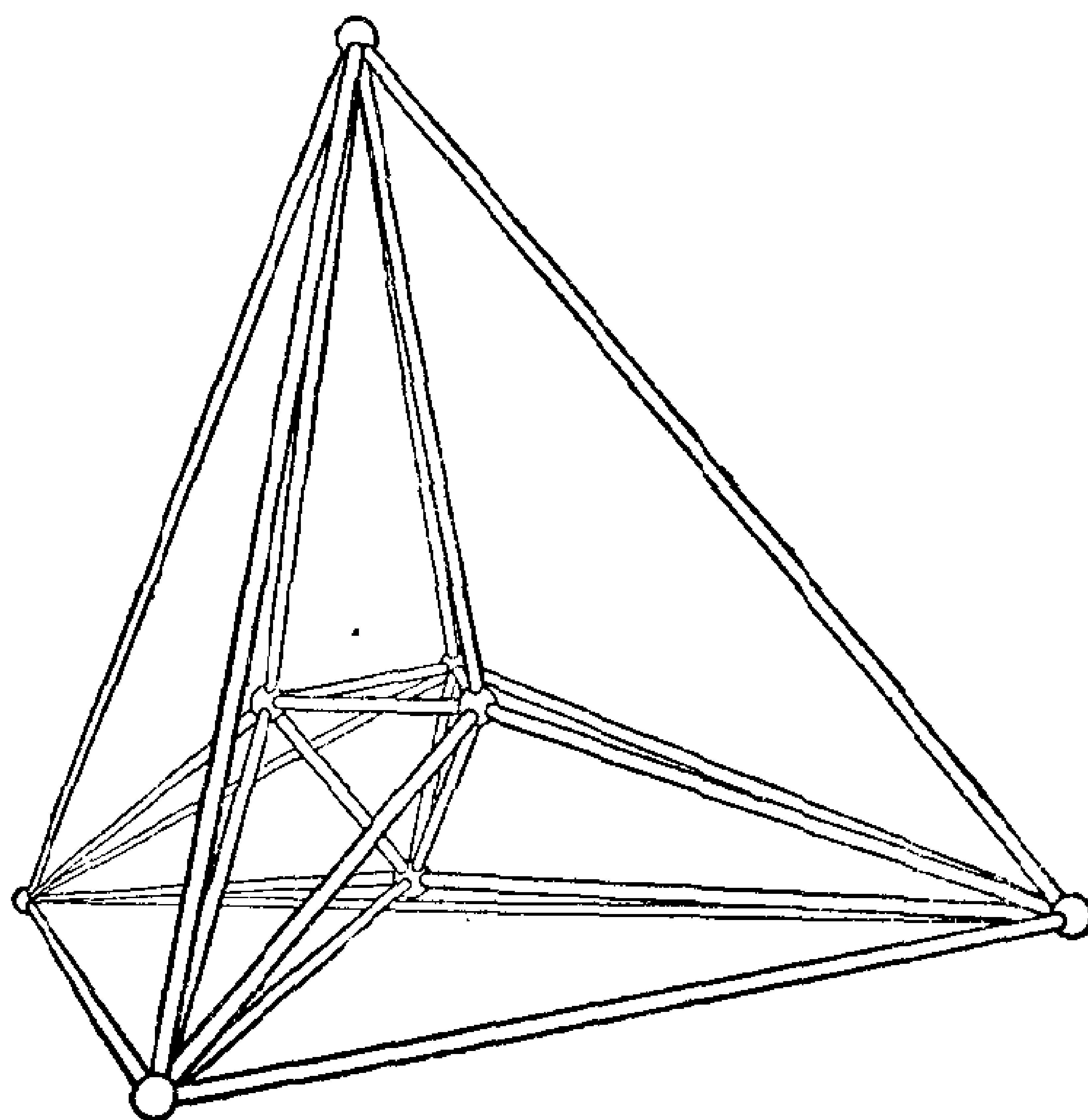


图 171　16–胞腔

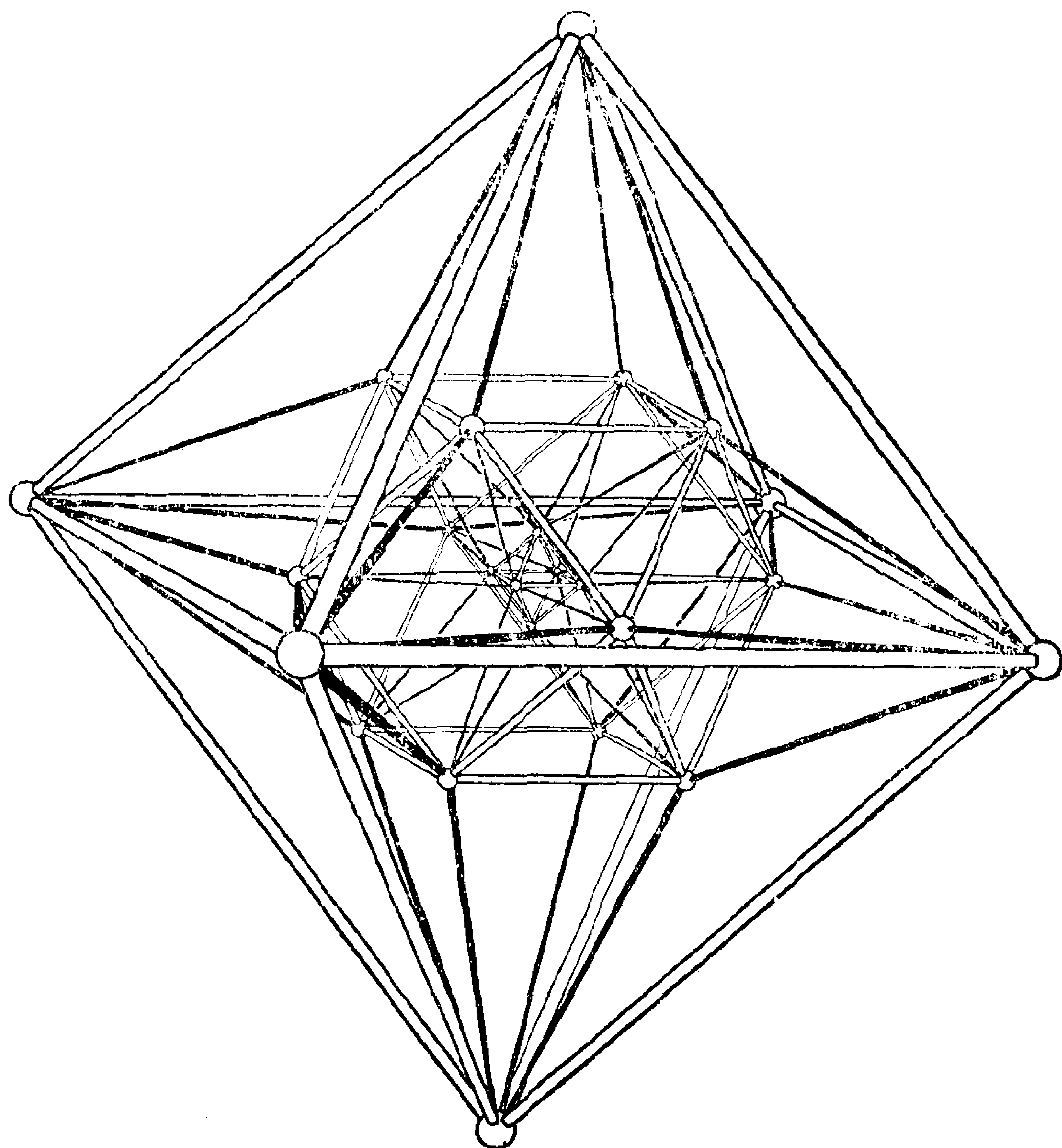


图 172 24-胞腔

別的三維空間作象空間，并且一定要丟掉一部分对称性。但是为了多少保留一部分对称性，我們仿照上面講过的三維空間中取象平面那样来取象空間：就是，或者类似图 164 那样的办法，选擇一个边界空間作为象空間，或者类似图 158 上那样的办法，选擇通过胞腔的一个頂点的空間作为象空間。在第一种情形下，选定的边界空間不会变形，因为它自己就在象空間中；在第二种情形下，投影图对于所选擇的頂点对称，而这頂点的象还是它自己。下面我

們先看一下用这两种方法得来的16-胞腔和8-胞腔的象(图173和174)①。

此时空間分别被剖分为八部分和四部分，每一部分相当于胞腔的两个对徑边界多面体。先說16-胞腔。在图173a中，延伸到无穷远的部分空間有两种不同的形式。其中的四个区域各有一个完全在空間的有限部分內的面(比如1, 2, 3)。从这个面开始它們通过无穷远平面而延伸到对頂点(例如2)。另一方面，另外三个区域各有一对有限长的对棱(例如1, 2和3, 4)，但所有的边界面都延伸到无穷远。在图173b中，无穷远平面本身是一边界面。我們注意，由16-胞腔的表示可导出空間的普通的剖分法，亦即在投影或笛卡儿坐标系下空間的八个卦限。

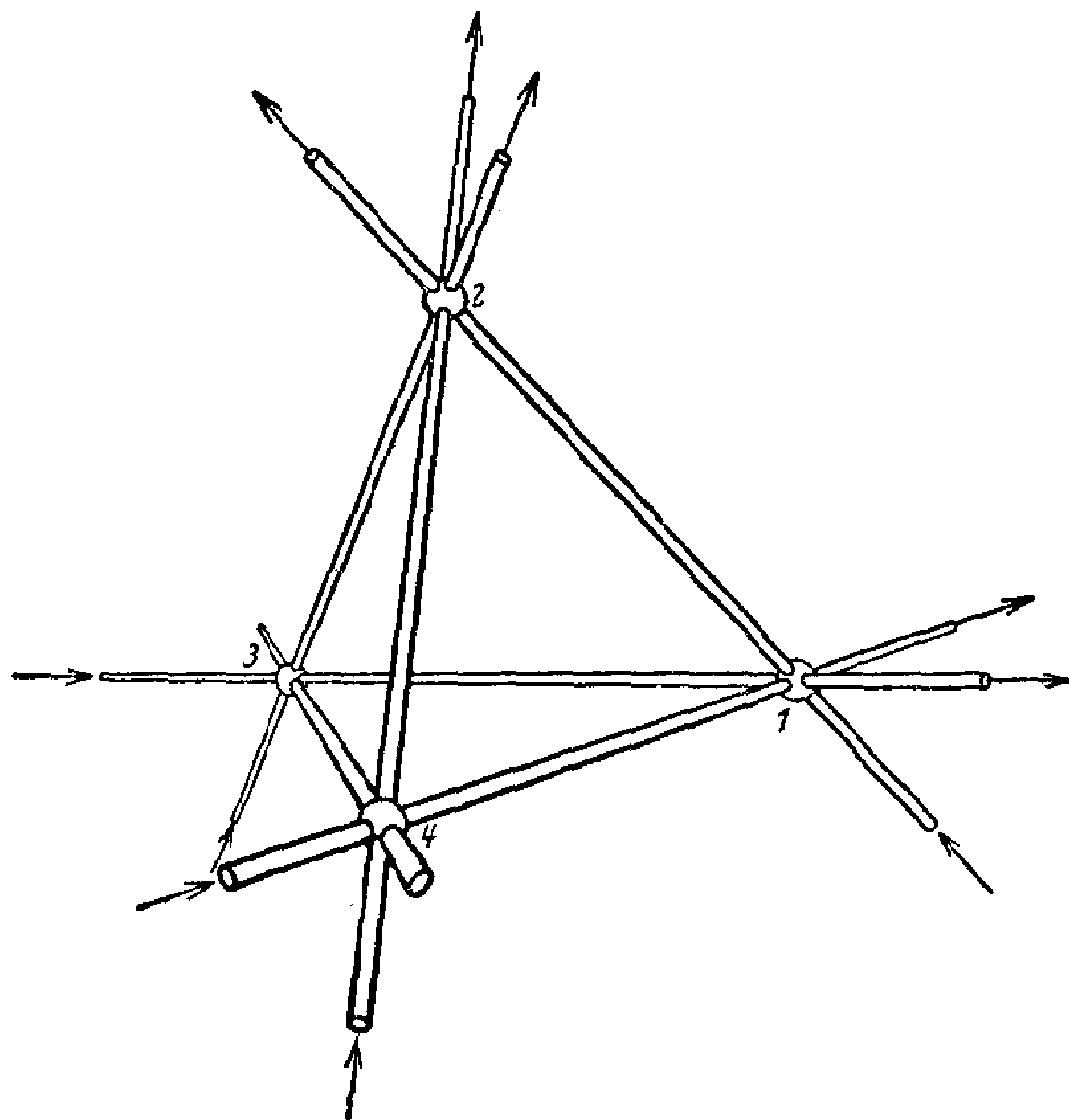


图173a 16-胞腔

① 这种投影方法对5-胞腔不适用，因为这样的胞腔不是中心对称的。

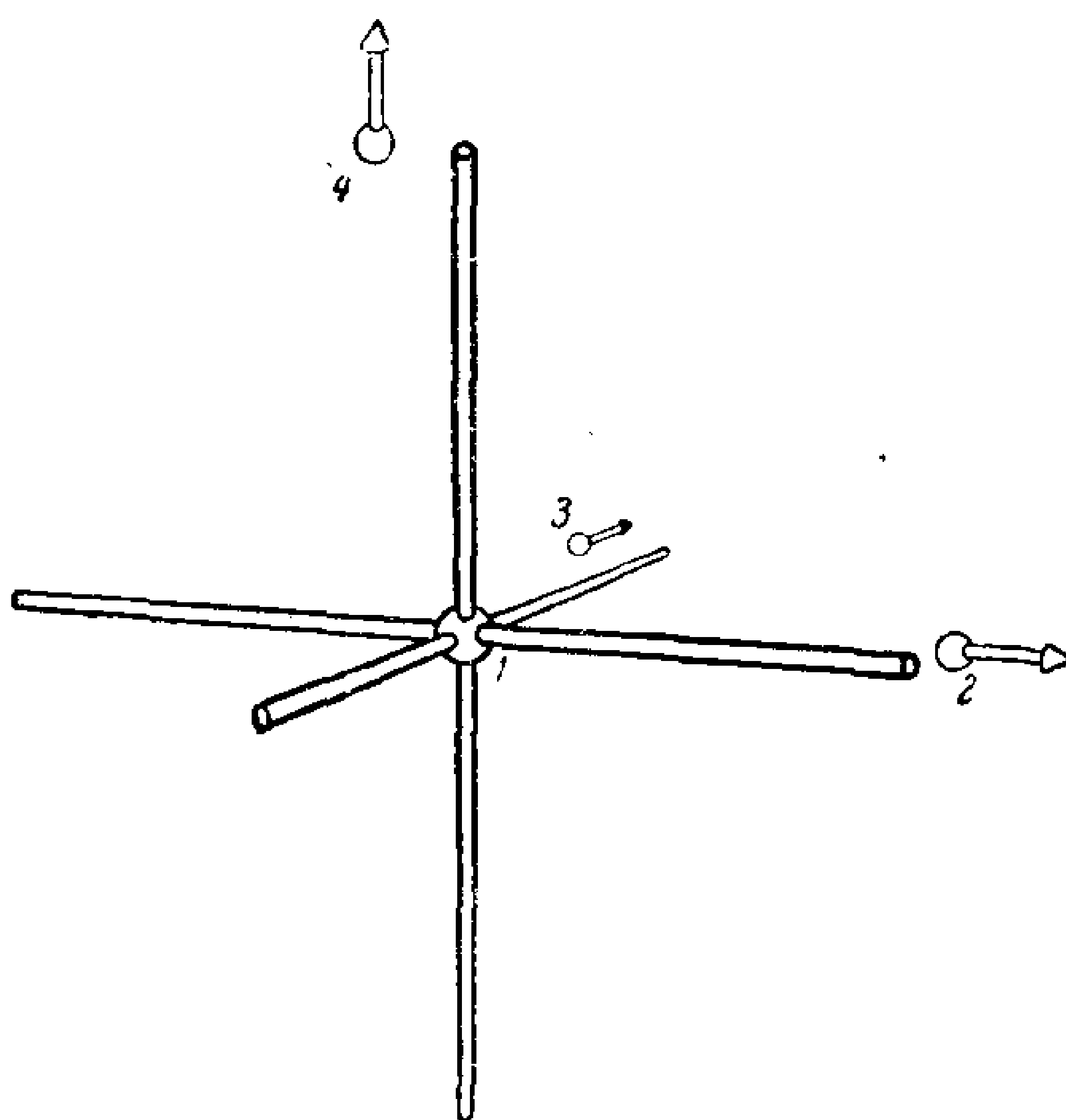


图 173b　16-胞腔

再說 8-胞腔的情形。在图 174a 中，延伸到无穷远的三个区域有同一形式。在图 174b 中，用箭头标出与图 174a 那一有限的立方体区域对应的各棱；这个区域还包括通过点 1 的各个有限的棱，但棱 1，6 除外。

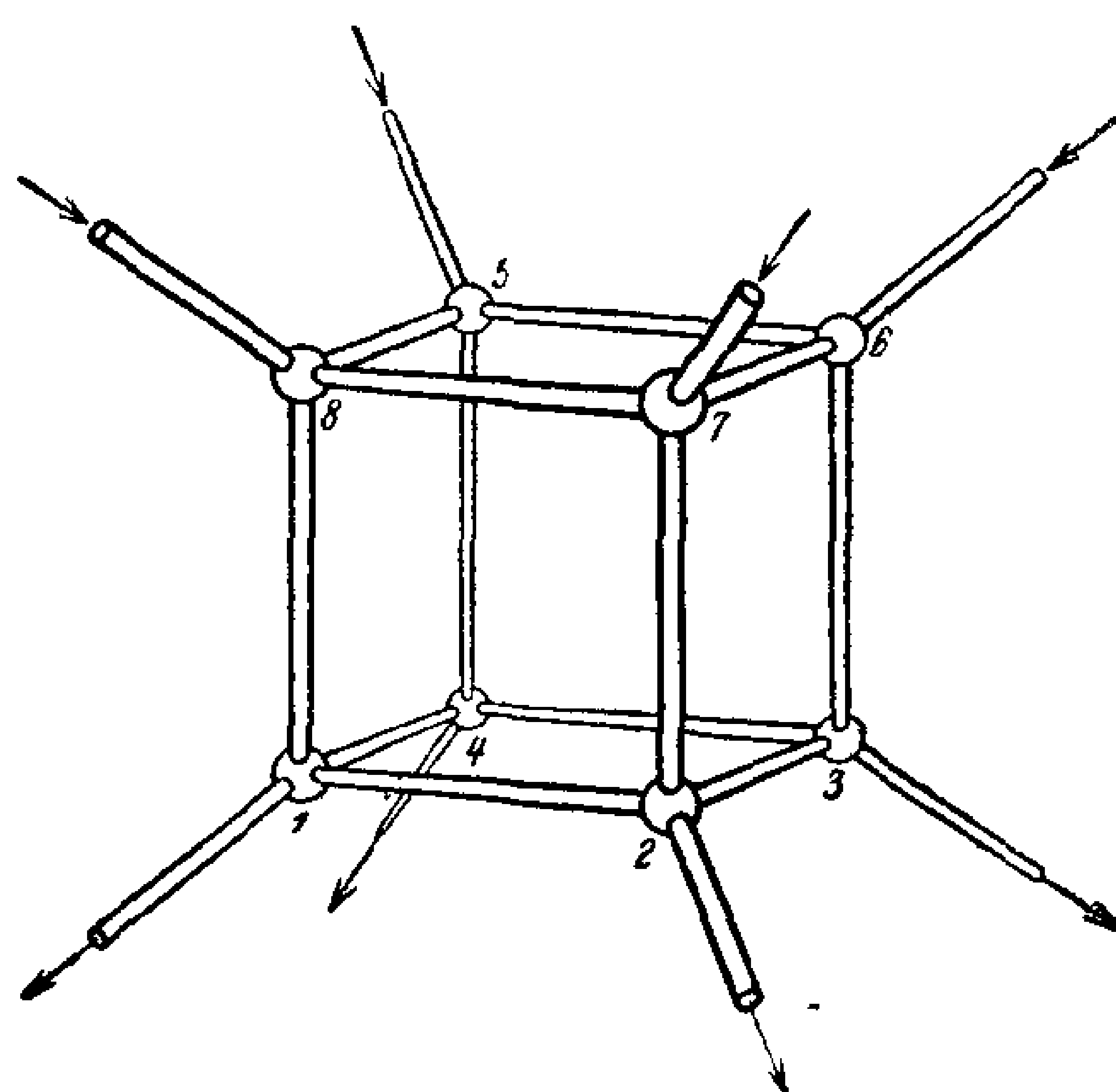


图 174a　8-胞腔

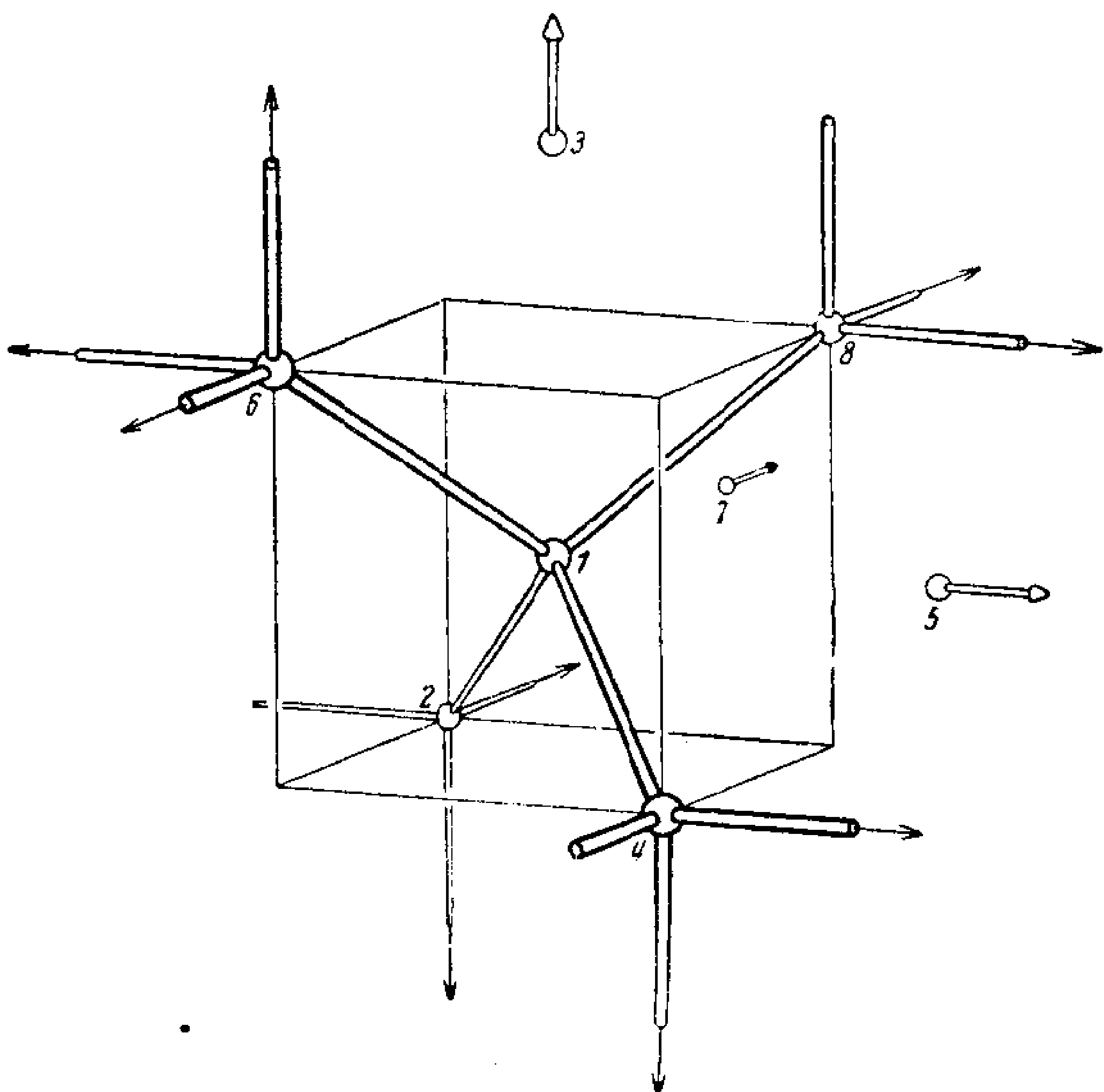


图 174b 8-胞腔

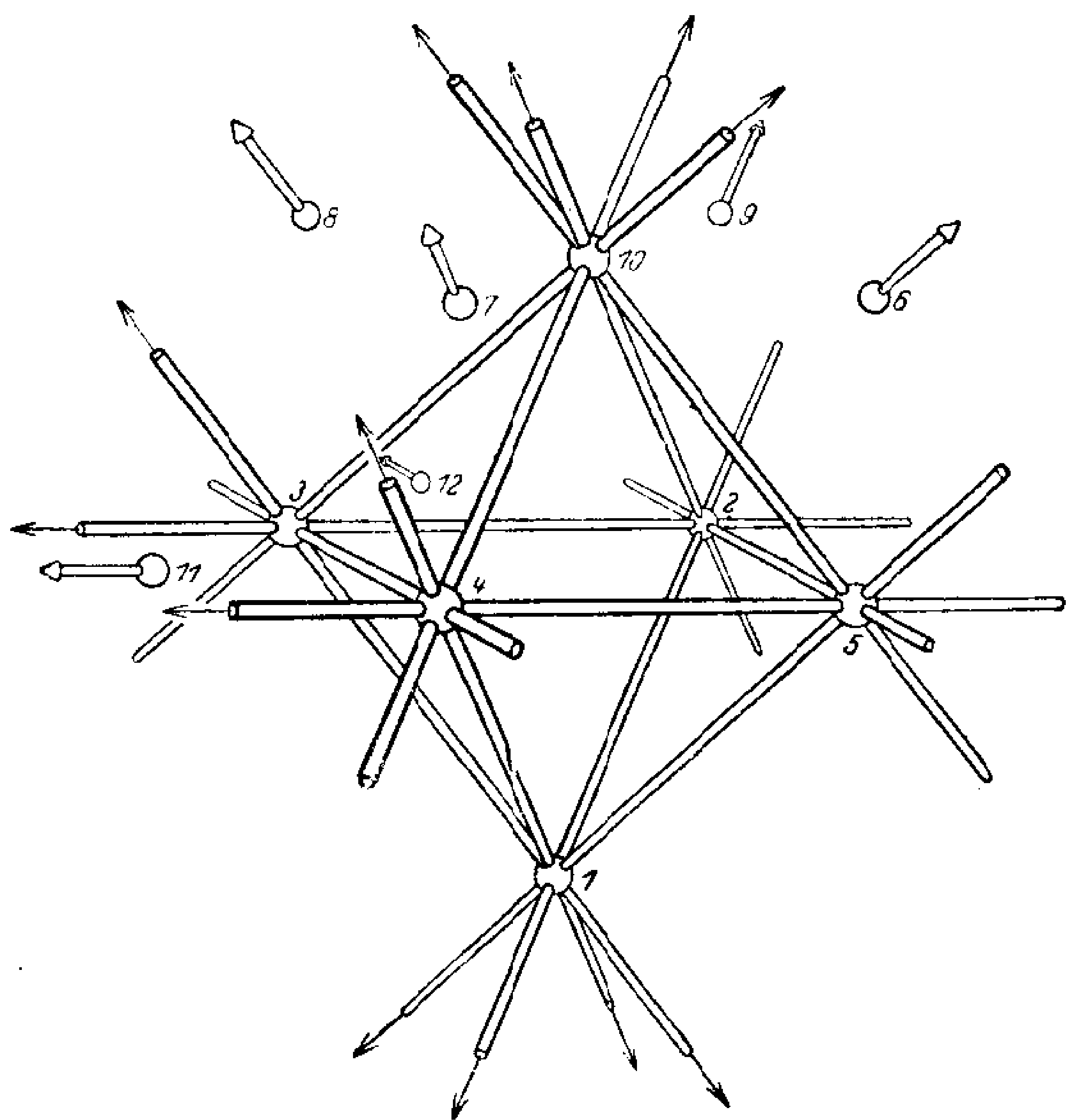


图 175

我們再应用上述两种投影方法于 24-胞腔。图形如图 175 和图 176 所示。这样,我們得到把空間剖分为十二个八面体的一种方法。除如图 175 上当中的一个八面体外,所有其余的八面体都延伸到无穷远。可以看到,图 175 和图 176 重新給出在上一节我們討

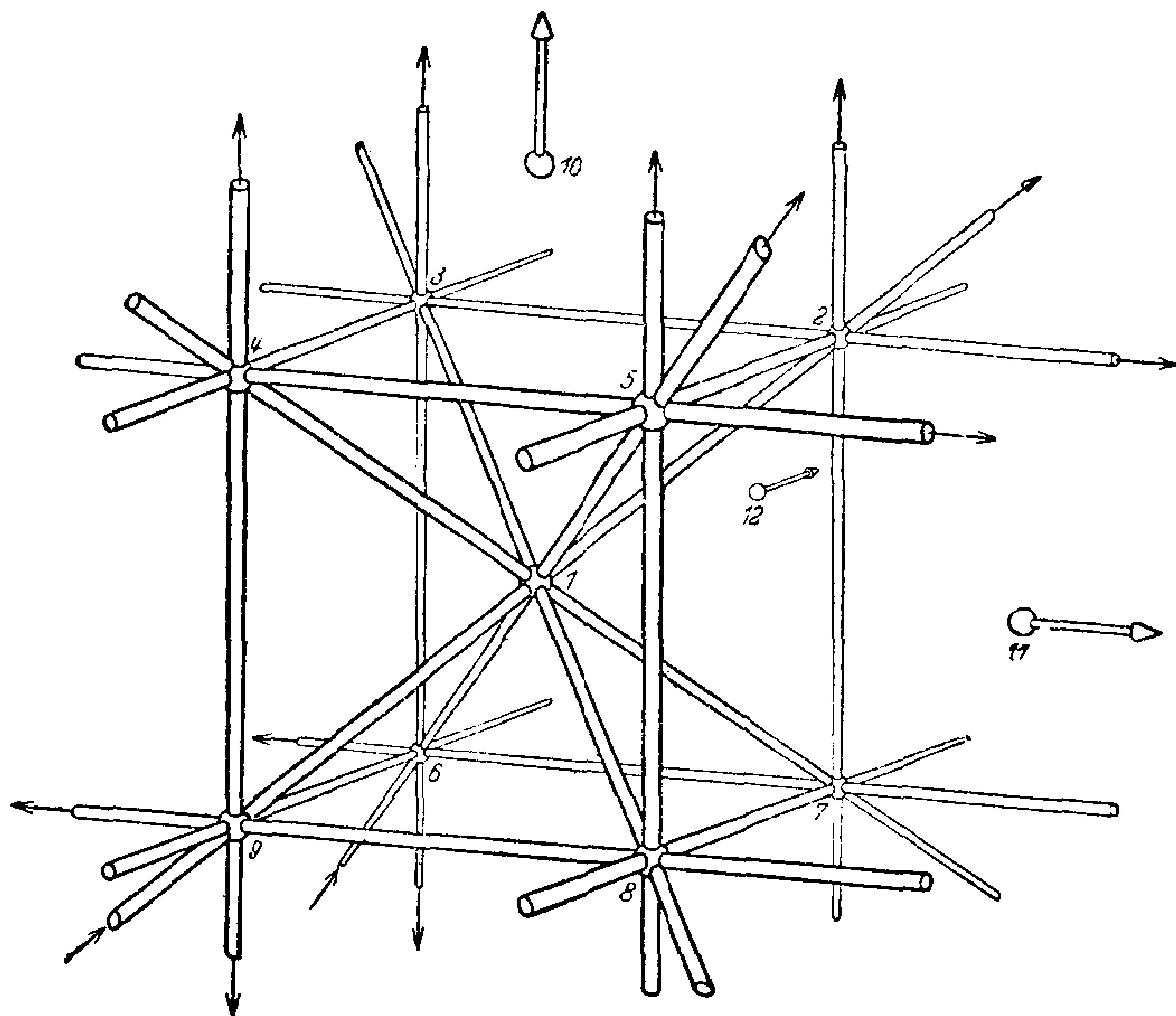


图 176

論过的雷耶构形的两种对称形式①。从图 175 上的有限八面体可以看到构形的各平面既是十二个八面体的边界平面又是它們的对称平面。再进一步研究,可以发現其中的基本原理:一个完全四边形划分投影平面为三个四边形和四个三角形(在图 177 中,四边形是 1, 2, 3; 三角形是 I, II, III, IV)。在雷耶构形中的直綫也是

① 那里我們曾經看过,二图形可以由对于一个球的配极变换互相轉化。現在又看到了二图形是同一四維图形的投影,每个图形可以用移动三維象空間的方法变到另一个。

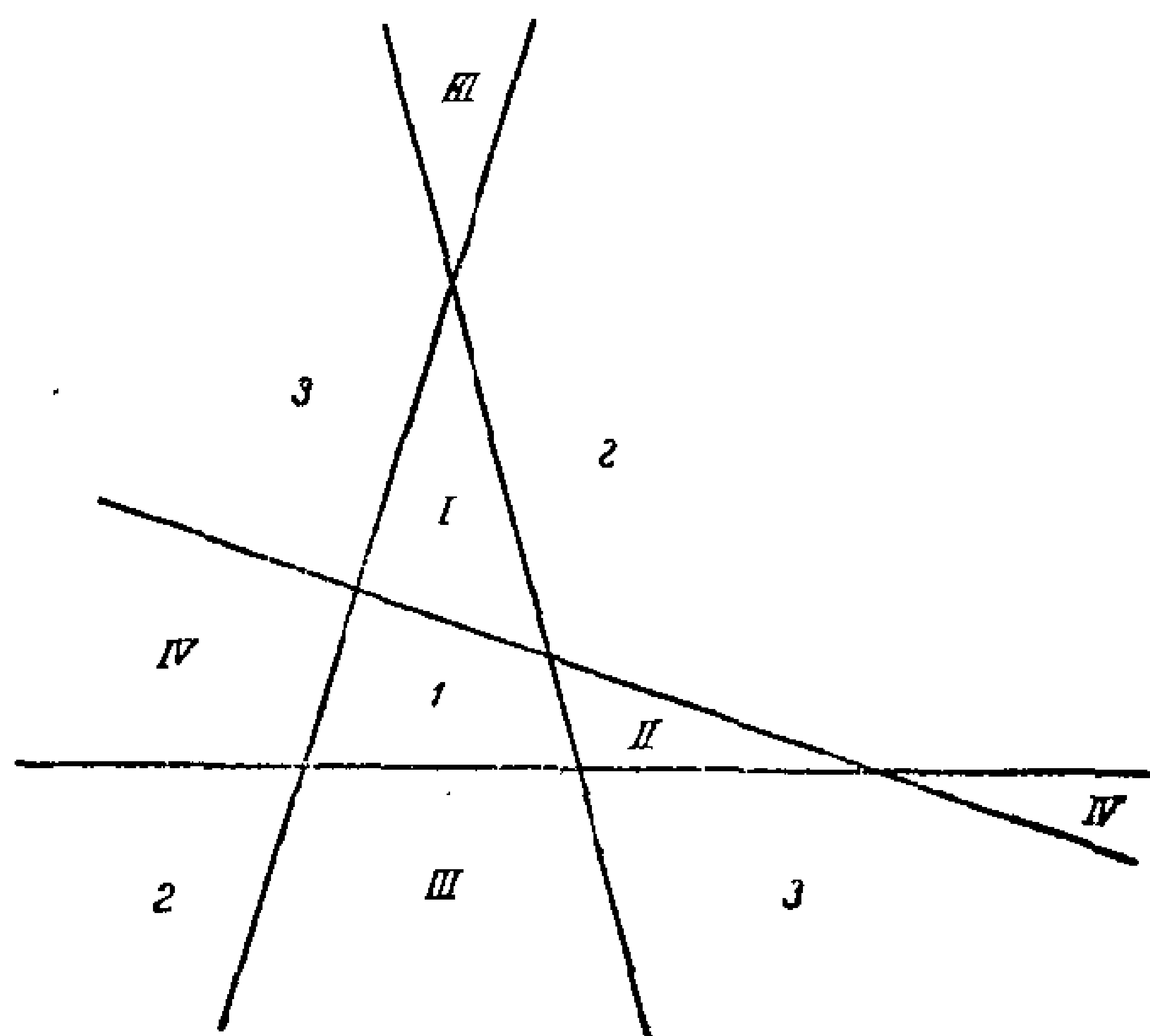
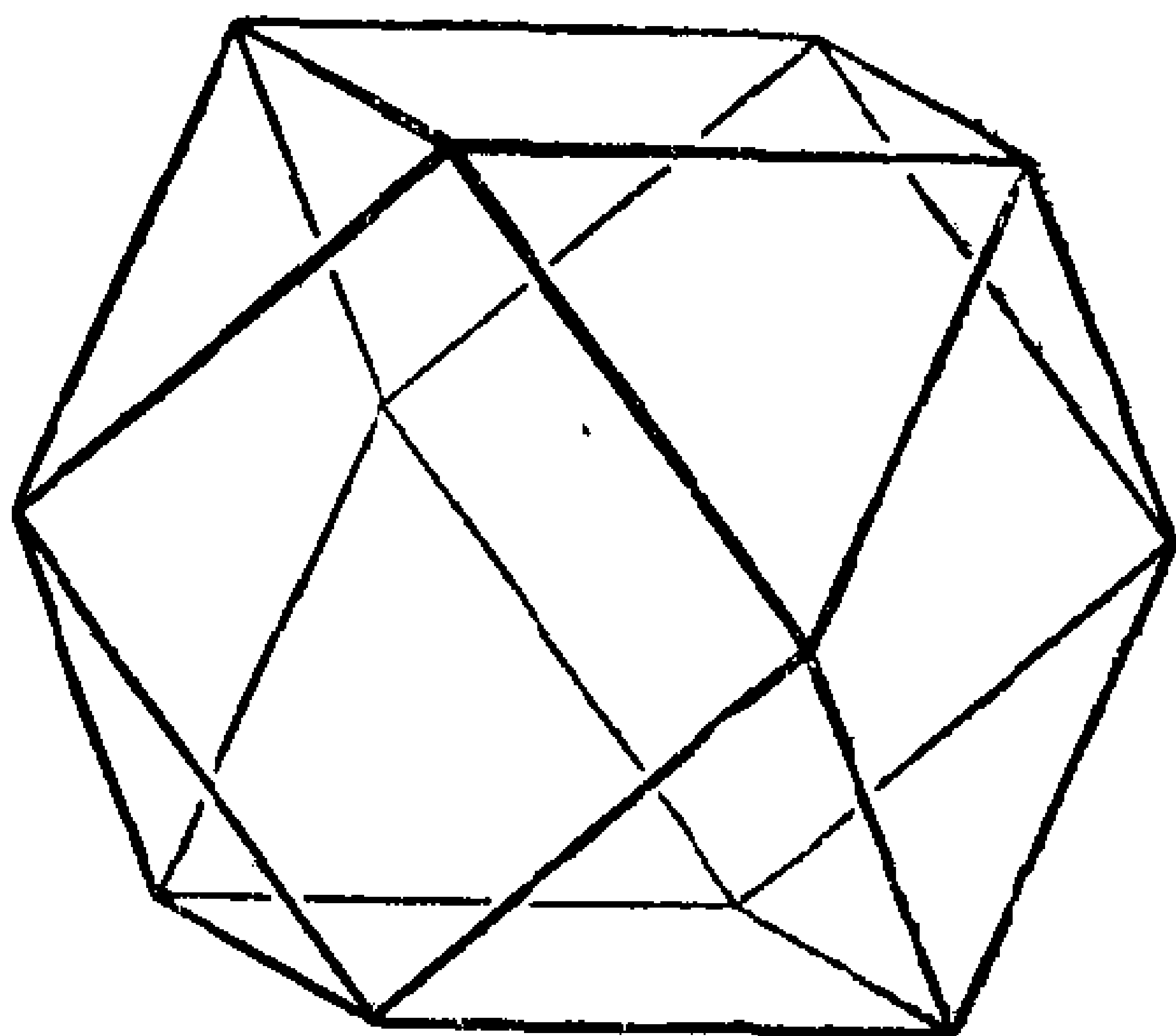


图 177

这样划分每个平面的，又因为八面体的面是三角形，而对称平面交八面体于四边形，由此可知，构形的每一平面是三个八面体的对称平面和 2×4 个八面体的公共边界面，但跟十二个八面体中的一个不相交。例如，在图 175 上，无穷远平面是构形的一个平面，但八面体中有一个位于空間的有限部位①。

图 176 比图 175 簡单，因为在图 176 中只有两种不同类型的八面体（六个八面体与八面体 1, 2, 3, 4, 5, 10 合同，其余的六个与 2, 5, 6, 9, 10, 11 合同），可是在图 175 中有三种不同类型的八面体。一个八面体是正則的，另外的三个以无穷远平面作为对称平面（例如 1, 6, 7, 8, 9, 10），其余八个以无穷远平面作为边界面（例如 3, 4, 7, 8, 10, 11）。

① 八面体有三个通过中心且与八面体交于正方形的对称平面，与此相当，24-胞腔有十二个三維对称空間，这些对称空間通过胞腔的中心且与胞腔交于立方-八面体（立方-八面体如图 178 所示；在图 172 中也可看出有一个立方-八面体）。在我們所研究的投影中对称空間的投影，和通过中心的任何空間的一样，是一平面。这些平面显然是雷耶构形中的平面。立方-八面体的三对对徑正方形和四对对徑等边三角形相当于雷耶构形中每一平面上的三个四边形和四个三角形。


图 178

从构形的这种作法立刻得到上一节最后一段所作的断言：雷耶构形是正則的。

上面的討論使我們想起把 n 維正則胞腔投射到維数最低的空間——即直綫——上去。让我們研究一下，如何把 n 維立方体用垂直平行投影的方法投射到一个主对角綫上去。这样的对角綫的端点 A 和 B 投射到自己。命立方体其他頂点在 AB 上的象点从离 A 最近的一个象点起算，依次为 C_1, C_2, $\cdots$。从 A 出发的立方体的棱有 n 个，这 n 个棱跟 AB 作成相同的角度，因此这 n 个棱的端点都要投射到 AB 的 C_1 点上来。其次，立方体的每一个棱平行于通过 A 的一个棱，因此两邻点間的距离 C_kC_{k+1} 永远等于 AC_1，所以是一常数。这样一来，主对角綫被分为相等的綫段。可以証明，恰好有 n 个这样的綫段，而且 C_k 是 $\binom{n}{k}$ 个頂点的象，这里的 k 是 1 与 $n-1$ 之間的数，而 $\binom{n}{k}$ 是大家熟知的二項式系数的符号。因为，以 C_k 为象的頂点包括所有那些可以用 k 个但不能用少于 k 个立方体的棱与 A 相連的頂点，而且仅仅包括那些頂点，于是，由計算可知恰恰有 $\binom{n}{k}$ 个这样的頂点。就正方形和通常的(三維的)立方体来說，上述事实可以立刻証实。

§ 24. 几何学的枚举法

我們最后要研究的一种三維构形是施累弗利双六构形。由于研究这种构形而引出几何学上的一个特殊的方法——所謂枚举几何学。让我們先講講这种方法，因为一方面我們不愿意在講双六构形时打断話头，一方面也因为枚举法本身很有趣味。

在平面上有无穷多的直綫和无穷多的圓。为了描写平面上所有直綫的繁多的程度，首先在平面上选好一个笛卡儿坐标系。这样一直綫一般地就由直綫与二坐标軸交出的截距(計其大小和符号)完全决定。因而除了下面就要說的一种情形外，在解析上一直

綫总用两个数来决定。同一个坐标軸平行的那些直綫，也可以用这种方法决定，即命无穷大作为它的一个截距。然而，通过原点的所有直綫，也只有这些直綫，不能以截距决定；这样的直綫，它們在二軸上的截距都相同，即零。

我們說，不通过原点的諸直綫，形成一个二参数族；这是說，族中的任一直綫以二数（族的"参数"）决定，而且参数的連續变化引起所决定的直綫的連續变化直綫。按照这个定义，则通过原点的諸直綫形成一个单参数族，因为这些直綫只用它們与一軸的交角即可决定。粗略一点說，我們往往設想一个含两个参数的族在加进一个单参数族后（可以連續地加入第一族内），增大得不十分显著。在这种意义下，我們可以說在平面上的所有直綫的集合也是一个含两个参数的族。下面我們将看到建立这种观点的好处。

平面上的諸直綫，也可以用其他种种方法决定。例如用它与任一定直綫所成的角和它所通过的一点。因为須有两个坐标才能决定平面上一点，因此用这种方法描写直綫須有三个参数。不过，用来决定直綫的那一点可以在直綫上任意挑选，而且在一直綫上的所有点显然形成一个单参数族。如用两点定一直綫，也可以看到类似的現象。在这种情形下需要四个参数，但那个含二参数的点偶族只决定同一直綫。因而，为了求出参数的正确数目，必須在后面的例子里减去两个参数，或者在前面的例子里减去一个参数。这样就象用第一种方法决定时一样，平面上的直綫形成一个二参数族。这种方法在这里只是提一下，其实它可以用解析法精确地表述，同时还可以証明，一个图形参数的个数与参数的选法无关。借用符号 ∞，可以把这一类的叙述写得簡短些。我們說，一平面上有 ∞^2 条直綫，一直綫上有 ∞^1 个点，有 ∞^2 个点偶。这种枚举法有类似于一个数的冪被另一个冪去除的运算：要知道在一平面上直綫的准确"个数" ∞^2，我們只須把平面上的点偶的"个数" ∞^4

"除"以一直綫上的点偶的"个数" ∞^2。

註我們按照这个方法在平面上求出所有圆的繁多的程度。一个圓由其圓心和半徑决定，亦卽由三数决定。反过来，每个圓只对应一个这样的三数組。因此平面上含有 ∞^3 个圓。因为在平面上所有直綫作成的族只有两个参数，而每一直綫可以看作圓的极限情形，所以所有的圓和直綫共同作成的族同样也有三个参数。这里所說的跟这件事实一致：通过平面上的任意三点可作一圓或一直綫。事实上，平面上有 ∞^6 个三点組，而同一曲綫可由 ∞^3 个三点組决定。同样可以証明，在任意一个 n 参数平面曲綫族中，总有一根曲綫通过平面上任意給定的 n 个点，但是通过 $n+1$ 个任意的点的曲綫，一般就不能从族中找出来。不过这句話必須将族中的极限情形也加进族中去，才能成立；这就好象要使圓和三点組一一对应，只有把作为圓的极限情形的直綫也看做圓才有可能。如欲严格証明这些叙述，必須用解析和代数的方法，特别地，除了实元素之外，还須考虑虛元素。

註我們应用这种方法求出所有圓錐曲綫的"个数"。一椭圓由二焦点（四个参数）和椭圓上一点到二焦点距离之常数和决定，就是說，由五个参数决定，而且每个椭圓只有一組这样的五个数。因此在一平面上共有 ∞^5 个椭圓。同理，可以証明在一平面上共有 ∞^5 个双曲綫。椭圓也可由二軸之长和椭圓的中心以及长軸的方向来决定。一共也是五个参数。由此可知，一平面上所有的抛物綫所成的族共有四个参数。因为根据第 3 頁上的作图，知道运用极限过程可以从椭圓得到抛物綫，在那里一个单参数椭圓族永远决定唯一的抛物綫，而每个椭圓属于有限多的族卽两个这样的族。

令椭圓的二軸长相等，就得到圓。在这里容易得出錯誤的結論，以为二軸等长，就应該有四个参数，因此在一平面上应該有 ∞^4

个圓,而不是我們已算出过的 ∞^3 个圓。要解釋这个矛盾,只要注意二軸等长并不需要知道二軸的方向,因为一圓的任意一对垂直直徑都可以当作椭圓的二軸的极限情形看待。

根据上面的討論,还不能断定通过平面上任意五个点一定能作一椭圓。至少須在椭圓之外再加上椭圓的极限情形——即抛物綫和圓——这个定理才可能是对的。而事实上,还应該加上双曲綫。平面上所有的圓錐曲綫的总体,也就是双曲綫、抛物綫、椭圓、圓、一对直綫和一对重合的直綫的集合,在枚举几何的意义下做成唯一个族。按照以前講过的,这个族应該有五个参数,因为每一种圓錐曲綫属于含五个参数或少于五个参数的一定的族中。就所有的圓錐曲綫的总体来說,的确有这样的定理成立:通过平面上任意五个点必有一个圓錐曲綫。更仔細地研究,但这已不属于枚举几何的范圍,可以知道,一个圓錐曲綫由五个点唯一决定,如果五个点中任何四个都不在一直綫上的話。若例外情形成立,显然圓錐曲綫不是唯一决定的。因为通过一直綫 g 上的四点和一个第五点 P,可以引 ∞^1 个直綫偶 g, h,其中的 h 是通过 P 的任一直綫,因此就有 ∞^1 个特别形式的圓錐曲綫。倘若点 P 也在直綫 g 上,則甚至可以引 ∞^2 个直綫偶,因为这时直綫 h 可以完全任意选擇。

現在我們把枚举法应用到空間的图形。一平面在一定的空間坐标系中可由平面的三个截距决定,因此我們知道,在空間里一共有 ∞^3 个平面。但通过原点的平面是例外,此时平面只作成含两个参数的族。应用枚举法可以驗証初等几何学中这一定理:通过空間任意三点必有一平面。事实上,在空間里有 ∞^9 个三点組,在每一平面上有 ∞^6 个三点組,因此空間三点組决定"∞^9/∞^6"个,即 ∞^3 个平面。

如果用二点来决定一直綫,可知空間一共有 ∞^4 条直綫,这是因为空間有 ∞^6 个点偶,一直綫上有 ∞^2 个点偶。

一个球可由球心和半徑决定。由此可知空間一共有 ∞^4 个球。如将作为极限情形的平面也加进来，则可用枚举法来驗証这一个熟悉的定理：通过空間任意四点常可作一球或一平面。正象圓錐曲綫的情形，球的决定不是唯一的，虽然当而且只当四点不在一直綫上时它是唯一的。关于一般的情形，也有类似的限制。如果一个 n 参数曲面族规定得十分齐全(比如說，象平面上整个的圓錐曲綫族那样而不是象椭圓族那样)，那么通过空間的 n 个点总有族中的一个曲面。曲面不一定由 n 个点唯一决定。但是，对于"一般的位置"的 n 个点，这是說，假如这 n 个点不适合某种与所給曲面族有关的几何关系，曲面总是唯一决定的。

三条攲斜的直綫决定一个二阶直紋曲面。空間包含 $\infty^{4\cdot3}=\infty^{12}$ 个三直綫組。但因为在直紋二阶曲面上的每条直綫是某一个单参数族中的一条，所以 ∞^3 个三直綫組决定同一曲面。因此一共有 ∞^9 个二阶直紋曲面。

同理，一共有 ∞^9 个三軸椭球。因为已知三軸椭球的中心(三个参数)，三軸之长(三个参数)，長軸的方向(两个参数)，和短軸在通过中心且垂直于長軸的平面上的方向(一个参数)，则能作一椭球，而且只能作一椭球。

根据解析上的研究結果，我們知道一共有 ∞^9 个二阶曲面。对于这一族来說，有这样的定理：通过空間的任意九个点必有这个族的一个曲面。要使九个点决定的二阶曲面是唯一的，也就是說，要使各点的位置对曲面族来說是足够一般的，必須要求諸点不在一个四阶的空間曲綫上(这曲綫是一对二阶曲面的交綫)；因为容易理解，在这样曲綫上随便多少个点都不能唯一决定一个二阶曲面。

現在我們来表明下列事实是可信服的，即：在任一二阶曲面上有无穷多的直綫。为此，我們从一个容易由二阶曲面的解析定义

推出的事实出发，这是指与一曲面交于三点的直綫必全在这曲面上。显然在一二阶曲面上有 ∞^6 个三点組(在任一其他的曲面上也是如此)。現在选擇那些共綫的三点組。从枚举几何可推出有 ∞^4 个这样的三点組，就是說减少了两个参数。因为，为了表示三点中的一点与其他二点連綫的結合关系必須有两个解析式。并且有一个一般定理：如果我們从一族元素中只选择适合一組 n 个独立关系的元素，則族中的参数减少了 n 个(所謂 n 个独立关系是說它們不得以个数少于 n 的等价的关系来代替)。因此在任意已給二阶曲面上应該有 ∞^4 个共綫的三点組。前面曾經指出过，通过这样的三点組的直綫应該完全在曲面上。但在一直綫上有 ∞^3 个三点組，所以在一个二阶曲面上的所有共綫三点組必在曲面上的 ∞^1 条直綫上。在椭球面上，在椭圓抛物面上，在双叶双曲面上，这些直綫是虛的。

末了，我們講一点关于三阶曲面的事項，因为三阶曲面对于下一节要講的施累弗利双六构形的性质有密切关系。在解析上，一个三阶曲面在笛卡儿坐标系之下用三次方程来描写。我們知道，包含三个未知数的一般三次方程有二十个系数，这些系数由其所属曲面决定，但可差一公因子。因此可知共有 ∞^{19} 个三阶曲面，而且通过空間任意选出的十九个点必有这样的一个曲面。不过这里必須把某些退化情形也包括到三阶曲面族內，例如把二阶曲面和平面一起看作是三阶曲面。

一般地說，一直綫与一个三阶曲面交于三点；如果交于四点，則直綫必完全在曲面上。这容易从曲面的方程为三次方程而推知。下面我們要用枚举法表明最一般的三阶曲面只能包含有限条直綫。在任一曲面上有 ∞^8 个四点組。要保証这样的四点組在一直綫上，須有四个条件——要使第三第四两点在通过前二点的直綫上，各須两个条件。因此在一般的三阶曲面上共有 ∞^4 个共

綫的四点組。包括这样的四点組的任一直綫必完全在曲面上，并且包含 ∞^4 个其他的这样的四点組。因此如果在一曲面上有无穷多的直綫存在，則在該曲面上将会出現比 ∞^4 更多的共綫的四点組。

在三阶曲面中也有大量的直紋曲面。这样，这些曲面包含 ∞^5 或更多的共綫四点組。据此三阶的直紋曲面方程应該具有这样特殊的性質：这个方程和四点共綫的四个条件一起可以用較少的等价方程組来代替。可以証明，只有三阶方程的二十个系数适合某特殊关系时，这样的簡化才有可能。从这里可看出，一般的三阶曲面至多包含有限条直綫这句話是对的①。

仿照上述枚举法可以証明，高于三阶的曲面一般不再包含直綫。

§ 25. 施累弗利双六构形

我們先看几个关于空間直綫可能位置的簡单的情形。三条敧斜的直綫 a, b, c 决定一个双曲面 H。一般地，一条任意的第四条直綫，d 与 H 交于两点，虽然也可能它与 H 相切或者在 H 上。在一般的情形下，d 和 H 的每一交点必在这样的一条直綫上，这条直綫在 H 上，但不属于 a, b, c 所在的族，因此必与 a, b, c 相交。反之，每条跟 a, b, c 和 d 相交的直綫必在 H 上，因而必通过 d 和 H 的一个交点。这样看来，在一般情况下与已知四条直綫相交的直綫有两条，而且不多于两条。在 d 和 H 相切的情形，則只有一条直綫(重合的)与 a, b, c, d 相交。另一方面，如果有两条以上直綫与 a, b, c, d 相交，則 d 必在 H 上，因而有无穷多条直綫与 a, b, c, d 相交。在这种情形下，我們說，这四条直綫处于双曲面位置。

① 例如，在曲面 $xyz=1$ 上就沒有一条通过曲面上有限点的直綫。

現在我們来作施累弗利双六构形。从任意一条直綫1开始。作三条相互敧斜的直綫与1相交，这三条直綫我們叫做2′, 3′, 4′(图179)，其理由由下文自然明白。其次，再作另一直綫5′与1相交，使5′对于2′, 3′, 4′有最一般的位置：5′与2′, 3′, 4′的每一个都不相交，而且除了1之外还恰有一直綫与2′, 3′, 4′和5′相交，命此直綫为6。最后过直綫1上一点作一直綫6′使它既与6不相交，也与2′, 3′, 4′, 5′不相交。而且还要如此选择6′，使四直綫組2′, 3′, 4′, 6′; 2′, 3′, 5′, 6′; 2′, 4′, 5′, 6′; 3′, 4′, 5′, 6′有最一般的位置。如此除了1外恰有一条与2′, 3′, 4′, 6′相交的直綫，即5′。直綫4, 3, 2的决定方法与此相仿(例如4是与1不同，并与2′, 3′, 5′, 6′相交的直綫，等等)。这样就得到如图179(示意图)表示的結合体系。由于直綫2′, 3′, 4′, 5′, 6′的选擇，容易看出，再沒有别的結合关系了。現在我們来看直綫2, 3, 4, 5。今証明这四条直綫不能处于双曲面位置。假如它們处于双曲面位置，那么与其中三条相交的任一直綫也必与第四条相交，特别地，从我們的示意图来看，这話也必适用于直綫2′, 3′, 4′, 5′中的每一条。于是上面所説的四条直綫也将处于双曲面位置，这跟我們的作图矛盾。所以最多有两条与2, 3, 4, 5相交的直綫。但按照我們的作图，2, 3, 4, 5都与6′相交。今命1′表示与2, 3, 4, 5相交的

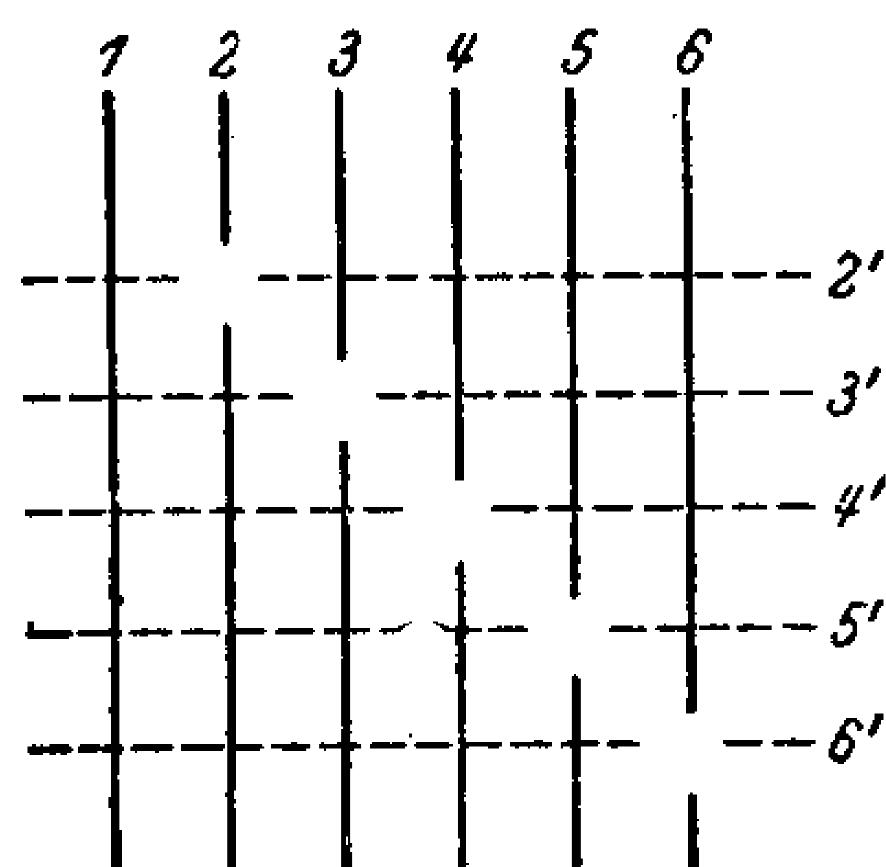


图 179

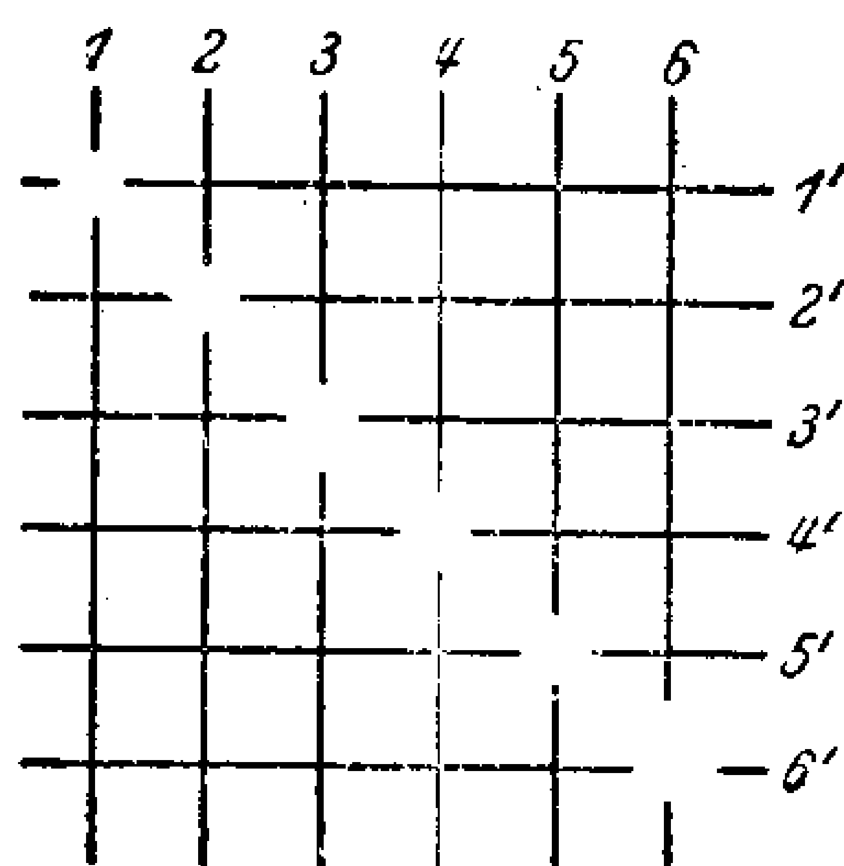


图 180

第二条直綫；我們說，1′ 与 6′ 不重合，而与 6 相交。在証明这句話(下面即将証明)以前，我們可以把示意图 179 扩充成图 180 那样。最后这个示意图代表双六构形。立刻可以看出，我們所講的正是由点和直綫組成的正則构形，其符号为 $(30_2,\ 12_5)$。从一个立方体的六个面上每六个一組的直綫当中适当地挑选一直綫，可作出特别清楚而又对称的双六构形。排列的情形从图 181 上看是一目了然的(再参看第 94 頁图 102)。

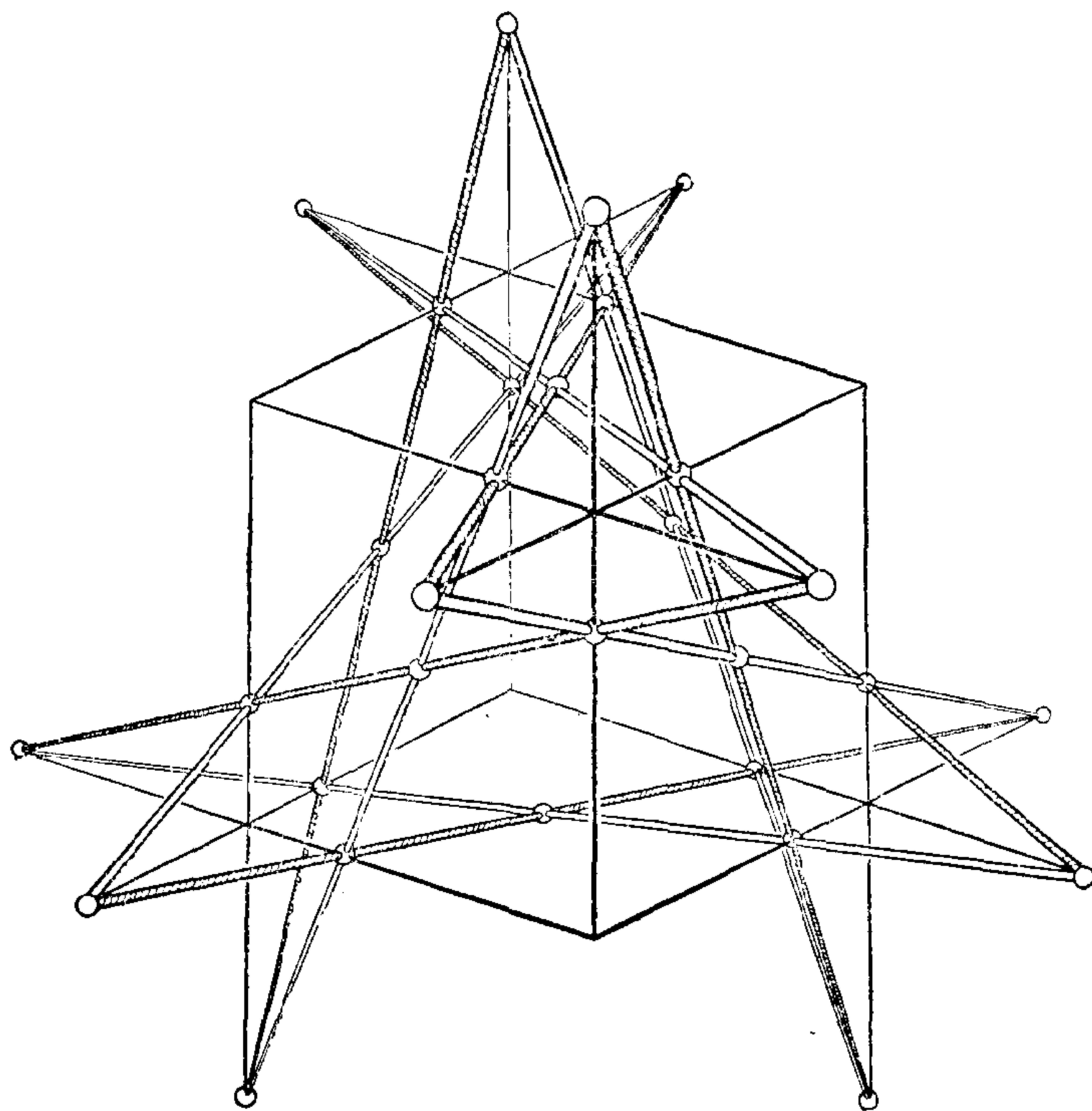


图 181

現在我們証明方才所說的断語：必有一条不同于 6′，但与 2, 3, 4, 5 相交的直綫 1′，而且 1′ 与 6 相交。姑假定第一部分已經

証明，以此为根据来証明 $1'$ 与 6 相交。为此，我們在直綫 1 上选出四点，在直綫 $2'$ 到 $6'$ 上各选出三点，如此一共选出十九个点。不过須注意这些直綫的交点不要与选出的这十九点相重合。从上节的論断我們知道，这十九个点决定一个三阶曲面 F_3。因为 F_3 与直綫 1 已經有四点相同，所以一定包含这条直綫。其次，F_3 与直綫 $2'$ 到 $6'$ 各有四点相同，这四点是原先选好的三点和跟这三点不同的直綫与 1 的交点。由此看来，曲面 F_3 也包含直綫 $2'$ 到 $6'$。由此又可以推出，F_3 也包含直綫 2 到 6，因为每条直綫与曲面上的四条直綫相交。最后，由于同样理由，F_3 也包含 $1'$。今若假定 $1'$ 与 6 不相交，我們考虑同 $5'$ 一样与 2, 3, 4, 6 相交的直綫 g。也象作 $1'$ 时一样，暫时除掉 g 与 $5'$ 重合的情形。g 不能与 $1'$ 重合，因为我們假定 $1'$ 与 6 不相交。由于 g 与 F_3 上的四条直綫相交，即与 2, 3, 4, 6 相交，所以 g 本身也在 F_3 上。根据我們的作图，直綫 g, $1'$, $5'$, $6'$ 都与 2, 3, 4 相交，因而这四条直綫处于双曲面位置。于是对应的双曲面的全部必为 F_3 的一部分；这可以直接从这件事推知：与 g, $1'$, $5'$, $6'$ 相交的任一直綫必在 F_3 上，而所有的这样的直綫盖滿双曲面。

现在容易用代数方法証明：一个包含二阶曲面全部的三阶曲面必然由二阶曲面和一平面組成。这是說，如果 $G=0$ 和 $H=0$ 分别是三阶曲面和二阶曲面的方程，則三次多項式 G 总可以被二次多項式 H 整除，而这只有当 G 是 H 和一綫性式的乘积时才有可能。但是如果說由十九点决定的曲面 F_3 一定是这一类的一个退化情形，便要得出矛盾。因为，直綫 $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ 中沒有四条处于双曲面位置，因此至多有三条落在属于 F_3 的双曲面上。于是至少有两条落在組成 F_3 的另一个部分的平面上，所以这两条直綫将有一交点，这跟我們的作图发生矛盾。

如果我們考虑前面除掉不算的 $1'(2345)$ 同 $6'$ 重合或者 $g(2346)$

同 $5'$ 重合的情形，証明仍然无大更动。在这种情形下也可以断定由 2, 3, 4 决定的双曲面必为 F_3 的一部分。但是要証明从一般的情形推出这种情形的极限过程，就非用代数方法不可。

我們在証明双六构形的最后結合关系 $(1'6)$ 时，曾引用过一个有趣的事实：永远有包含双六构形的一个三阶曲面 F_3。不难把也在 F_3 上的另外几条直綫补充到这个构形上去。比方說，考慮由相交二直綫 1 和 $2'$ 决定的平面和由 $1'$ 和 2 决定的平面，并命 (12) 代表这二平面的交綫。那末 (12) 与完全在 F_3 上的四直綫 1, $1'$, 2, $2'$ 相交；因此 (12) 也在 F_3 上。对于双六构形有和 (12) 一样的关系的一共有十五条直綫，因此这十五条直綫都在 F_3 上。因为从 1 到 6 六个数字里每次取两个应有 15 种不同的取法。由此我們得知在 F_3 上一共有 $2\times6+15=27$ 条直綫。

在我們得到的这种扩大的构形上的直綫当中还存在别的結合关系。事实上可以証明，那些用两个数目表示的直綫所成的直綫偶，如果它們的記号中的两个数目都不相同，那么它們一定相交，而且也只有这些直綫偶，才有交点。証明可以根据如同証明 $1'$ 和 6 相交时所用的概念。以下我們只給出証明的梗概。由于对称的关系，只須証明 (12) 与 (34) 相交卽可。为此，我們考虑三条直綫 1, 2, (34)，并注意这三条直綫是同 $3'$ 和 $4'$ 相交的。假定 (12) 与 (34) 不相交，則必有一直綫 a 与四直綫 1, 2, $1'$, (34) 相交，而且还有一直綫 b 与 1, 2, $2'$, (34) 相交。b 必与 a 不同，因为假如它們表示同一直綫，它們将与四直綫 1, 2, $1'$, $2'$ 相交，因而必与 (12) 重合，这样 (12) 势将与 (34) 相交，这与方才假定 (12) 与 (34) 不相交矛盾。同样，a 和 b 必与 $3'$, $4'$ 不同。因为，假如比方 a 与 $3'$ 重合，則 $3'$ 也将与 $1'$ 相交，这跟我們的作图矛盾。因此 a 和 b，也象 $3'$ 和 $4'$ 一样，都在 F_3 上。又因为这四条直綫都与三直綫 1, 2, (34) 相交，所以四直綫处于双曲面位置。但是我們已經証明过，F^3

不能包含一組处于双曲面位置的四直綫。由此可見(12)必与(34)相交。同理，(12)也与(35)，(36)，(45)，(46)和(56)相交。因为(12)还与1, 2, 1′, 2′相交，可見(12)以及其他用二不同数字表示的任一直綫，都与扩大的构形的十条直綫相交。这句話对于双六构形本身上的直綫也是对的。例如，1与2′到6′的五条直綫相交，也与(12)，(13)，(14)，(15)，(16)五条直綫相交。这样說来，由F_3上27条直綫及其交点組成的构形，其符号应为$(135_2 27_{10})$。恰有135个点这件事是由关系式$135\times2=27\times10$得来的。除此之外，还可証明构形是正則的。因而可以从这个构形用許多种不同的方法选取双六构形。如果加进构形中相交直綫所决定的各平面，我們便可以利用結合关系表格来驗証每个这样的平面必包含构形的第三条直綫。这个結果可以用下述簡单的代数論点来解释。任一平面必与F_3交于一条三阶的曲綫。如果平面包含构形中的两条直綫，这条三阶曲綫也应該包含这两条直綫，由此应用代数方法可以証明曲綫必由此二直綫和第三条直綫組成。不难算出，二十七条直綫中的每一条有五个这样的平面通过，而且一共有四十五个这样的平面。由此得知此构形不是自对偶的，虽然建立在二直綫的对偶不变的結合关系上的双六构形是自对偶的。双六构形容易加以补充使成为上面作出的构形的对偶构形。为此，我們必須另以直綫組$[ik]$来代替直綫組(ik)，其中例如[12]通过1与2′的交点和1′与2的交点。这样得到的构形，其符号应为$(45_3 27_5)$。

让我們回到有二十七条直綫的原来的构形上去。我們应用枚举法显示，在任意一个三阶曲面F_3上必有这样的一个构形K。在这里，也如同其他枚举几何的論証中一样，K的一部分是虛的或退化的情形也要計入。証明从計算所有的双六构形所成的族繁多的程度开始。按照我們的作图法，直綫1的选擇是完全任意的，这

就有了四个参数。直綫 1 与直綫 $2'$ 到 $6'$ 的交点依赖于另外五个参数；1 与 $2'$ 到 $6'$ 的交点既定，則 $2'$ 到 $6'$ 諸直綫各可取 ∞^2 个位置，这就有了十个参数。因为直綫 $1, 2', 3', 4', 5', 6'$ 唯一地决定双六构形，所以一共有 ∞^{19} 个双六构形 $(19=4+5+10)$。构形 K 族也有这样多的参数。因为，每一个这种类型的构形决定于其中的一个双六构形，而且在任一构形 K 里显然只有有限个数的双六构形。但是我們已經給出了通过任意給定的 K 作 F_3 的方法，因此可知，用这种方法作出的曲面 F_3 族或者包含 ∞^{19} 个曲面，或者还要少些，如果是少些的話，那末在 F_3 上至少有 ∞^1 个构形 K，也就是 F_3 必須是三阶的直紋曲面。但是可以証明，三阶直紋曲面的个数少于 ∞^{18}；因此，所作出的 F_3 至少应該包含 ∞^2 个双六构形。由于我們已經証明 F_3 不包含双曲面，又因为高于二阶的任一直紋曲面只能包含一个直綫族，这样的 F_3 不可能含有 ∞^2 个双六构形。因此，在一般的情况下曲面不能是直紋曲面，可見我們的作图至少包括了 ∞^{19} 个曲面。另一方面，在上一节我們曾經講过，只有 ∞^{19} 个三阶曲面。据此，再考慮到图形的代数性质，每一个三阶曲面包含构形 K 的断言的正确性就可以严格地加以論証。

直観几何

下册

D. 希尔伯特
S. 康福森 著

王联芳 譯

高等教育出版社

俄譯本出版者的話

D. 希尔伯特和 S. 康福森合著的“直观几何”是世界通俗文献中为数不多的出于大数学家手笔的书籍中的一本，由于叙述的循序漸进而又生动，著者就使得极其丰富的几何知識能为对数学有兴趣的广大讀者所接受、所理解。

原书著者之一 S. 康福森在 1934 年由希特勒德国迁居到苏联来，并且参加了俄譯本第一版的准备工作。1936 年 S. 康福森在重病之后死于莫斯科。

必須指出，原书还是有些較大的缺点的。一般地說，书中沒有关于数学发現的历史方面的闡述。某些地方虽也有带点历史性質的注釋，却往往只詳細地引証比較不重要的著作，可是对于直接关联到所講內容而属于我国科学家的重大的数学研究，有时連提也不提。在这次再版俄譯本时，各个地方加了脚注，希望尽可能地弥补这个缺陷。

序

在数学中，象在任何科学研究中那样，有两种傾向。一种是抽象的傾向，即从所研究的错綜复杂的材料中提炼出其內在的邏輯关系，并根据这些关系把这些材料作系統的、有条理的处理。另一种是直观的傾向，即更直接地掌握所研究的对象，側重它們之間的关系的具体意义，也可以說領会它們的生动的形象。

就几何方面說，抽象的傾向已經引导到代数几何、黎曼几何和拓扑学等宏偉的系統的理論；在这里抽象的思考方法、以及代数性質的符号运算获得广泛的运用。然而，直观在几何中起的作用却是更大，过去如此，現在还是如此。具体的直观不仅对于研究工作有巨大的价值，对于理解和欣賞几何中的研究結果也是这样。

本书的目的在于从直观形象这一側面来介紹今日的几何。借助于直观想象，我們能够闡述几何中的各种各样的事实和問題；不但如此，在許多情况下我們还能够描述有关的研究方法和証明方法的几何輪廓，而无須詳究概念的严格定义和实际計算。例如，具有一个洞（不管这个洞多么小）的球面恒能攤平的証明，或一般地不能把两个不同的环面中的一个保角地映射成另一个环面的証明，都可如此处理，使得不愿追究解析推演的細节的人，也可以領会到应如何証明和为什么能这样証明。

由于几何的方面很广而且它跟許多数学分支发生关系，因而我們甚至于能够从它获得整个数学的概观、能够認識数学問題的变化多端、以及数学思想的丰富多彩，因此从直观形象出发而且用粗綫条的方式来描繪几何，应該会使专家圈子以外更广大的群众

对于数学有更合理的評价。因为，一般地說，数学幷不是普通人特别喜爱的学科，虽然它的重要性可以說已經得到公認了。此中原因是由于有一种流行的誤解，認为数学不过是算术的延續和提高，用数目来变戏法。本书用图形来替代公式；这里的图形是讀者看得見的，而且讀者容易制作模型来加以补充。本书要通过这种方式来和这种流行的誤解作斗爭。希望本书能使讀者易于看透数学的本质，不致于在繁难的学习面前望而却步，从而使数学更易于为人所欣賞。

本书的目标旣是如此，自然不能顧到把各方面的材料搜罗完备和把所討論的材料按严格系統安排，也不能把所討論的每个課題討論得詳尽无遺。再者，书中各节对于讀者預先具有的数学訓練的要求也不能完全相同；虽然本书大部分的叙述是很初等的，但是，若要避免冗长而厌煩的叙述，有一些美丽的几何的探討是只有对于具有一定程度的訓練的人才能完全解釋清楚。

各章的附录都假定讀者已具有某些預备知識，这些附录是补充性的，而不是解釋正文的。

几何各部門的相互关系甚为密切，而且密切得往往出人意料之外。这一情况在本书中多处出現。虽然如此，由于所处理的材料多种多样，有必要使各章在一定程度上各自独立，以免为了理解后面的几章就必需完全熟悉前面的各章。我們希望，由于有了一些叙述上的重复，讀者可能自由地閱讀各别的章，有时甚至是各别的节，而不致于难以接受或不感到兴趣。我們愿意領着諸位讀者在几何的大花园里作一次幽閑的散步，让每人摘取一束自己心爱的花朵。

本书的底稿是我在古庭根于 1920—1921 年冬季每周四次的“直观几何”的讲演，經 W. 罗塞曼 (Rosemann) 記录的。本书里基本上保存了原讲稿的結构和內容，但是 S. 康福森 (Cohn-Vossen)

改写了許多細节，并且补充了不少的材料

D. 希尔伯特

1932 年 6 月于古庭根

下 册 目 录

第四章 微分几何

直到現在为止，我們都在研究几何图形的整体构造。微分几何学則提供了根本不同的一种研究方法。說得明确些，我們开始将只研究曲綫或曲面在它任一点紧密邻近的情况。为了这个目的，我們把一点的邻域，同一个最簡单的图形，例如直綫、平面、圓或球，来进行比較，而这个图形在所考虑的邻域內是最接近所給于曲綫的。例如用这种方法我們就得到众所周知的曲綫在一点的切綫的概念。

这种所謂局部的微分几何学，或小范圍的微分几何学的研究方法，为另一种重要观点——大范圍的微分几何学所补充。这就是說，对于一連續几何图形，如果已知它在每一点的邻域內都具有某一确定的微分几何学的性质，那么經常可以推断关于图形整体結构的一些重要事实。例如对于一平面曲綫，若已知曲綫上沒有一点的邻域完全在这点的切綫的同側，那么可以证明，这曲綫必然是直綫。

微分几何学除了討論由点組成的連續流形以外，还討論由其他元素，例如由直綫組成的流形；在研究連續光綫系統的几何光学中，就提出这一类的問題。

最后，微分几何学引导到高斯和黎曼首先提出的一个問題，就是由只与各点的邻域有关的概念和公理建立起整套的几何学来。于是产生了直到今天还沒有发掘淨尽的多种多样更一般的几何学，而所謂"非欧几何学"，只是其中一个重要的特殊例子而已。广义相对論告訴我們，要眞实地描写物理世界絕不能依照通常的欧氏几何学，而必須依照更一般的黎曼几何学。

§26. 平面曲綫

从最簡单的东西說起，即先研究平面曲綫。我們限于研究曲綫的一小段，在这小段上曲綫不和自己相交。

和曲綫交于两点的直綫称为該曲綫的**割綫**。把割綫 s 繞其一交点旋轉，使另一交点沿曲綫趋近于这一点(图 182)，則割綫将趋近于一定的位置 t。在这个位置的直綫叫做該曲綫的**切綫**，而定点叫切点。显然切綫是通过切点的所有直綫当中最貼近曲綫的直綫。因此，在这点的切綫的方向就称为曲綫在这点的方向。若二曲綫在一交点处的切綫交成 α 角，則称二曲綫在这点交成 α 角；若二切綫重合，則称二曲綫在这一交点相切。切綫在切点的垂綫称为曲綫在該点的**法綫**。

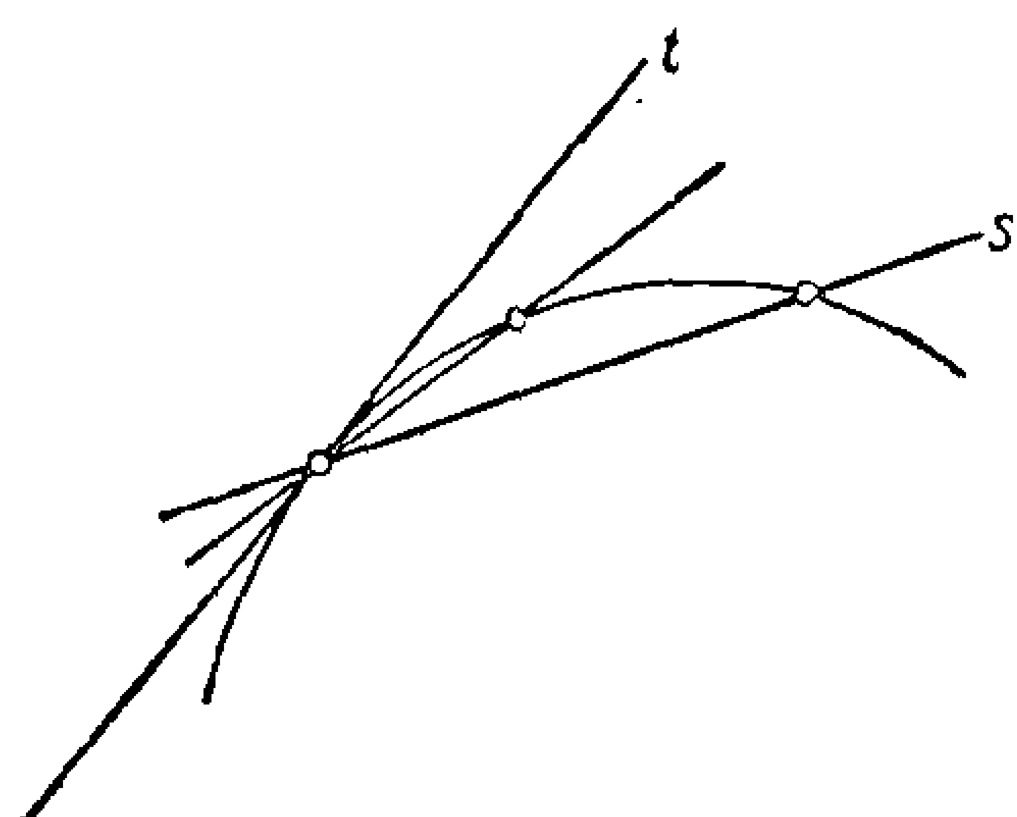


图 182

曲綫在任一点的切綫和法綫作成一直角坐标系的坐标軸。用这种特殊坐标系来研究曲綫在所考虑的一点处的性态，甚为方便。让我們任意选定曲綫上一个方向作为点的移动方向。然后把平面被坐标軸分成的四个象限編上号碼。第一象限是这样选取的（图 183）：其中含有曲綫在原点近旁的点，从这点在曲綫上沿指定方向行进将碰到原点；其余三个象限 $2, 3, 4$ 的命名法是：切綫把象限 $1, 2$ 同 $3, 4$ 分开，法綫把象限 $1, 4$ 同 $2, 3$ 分开。于是

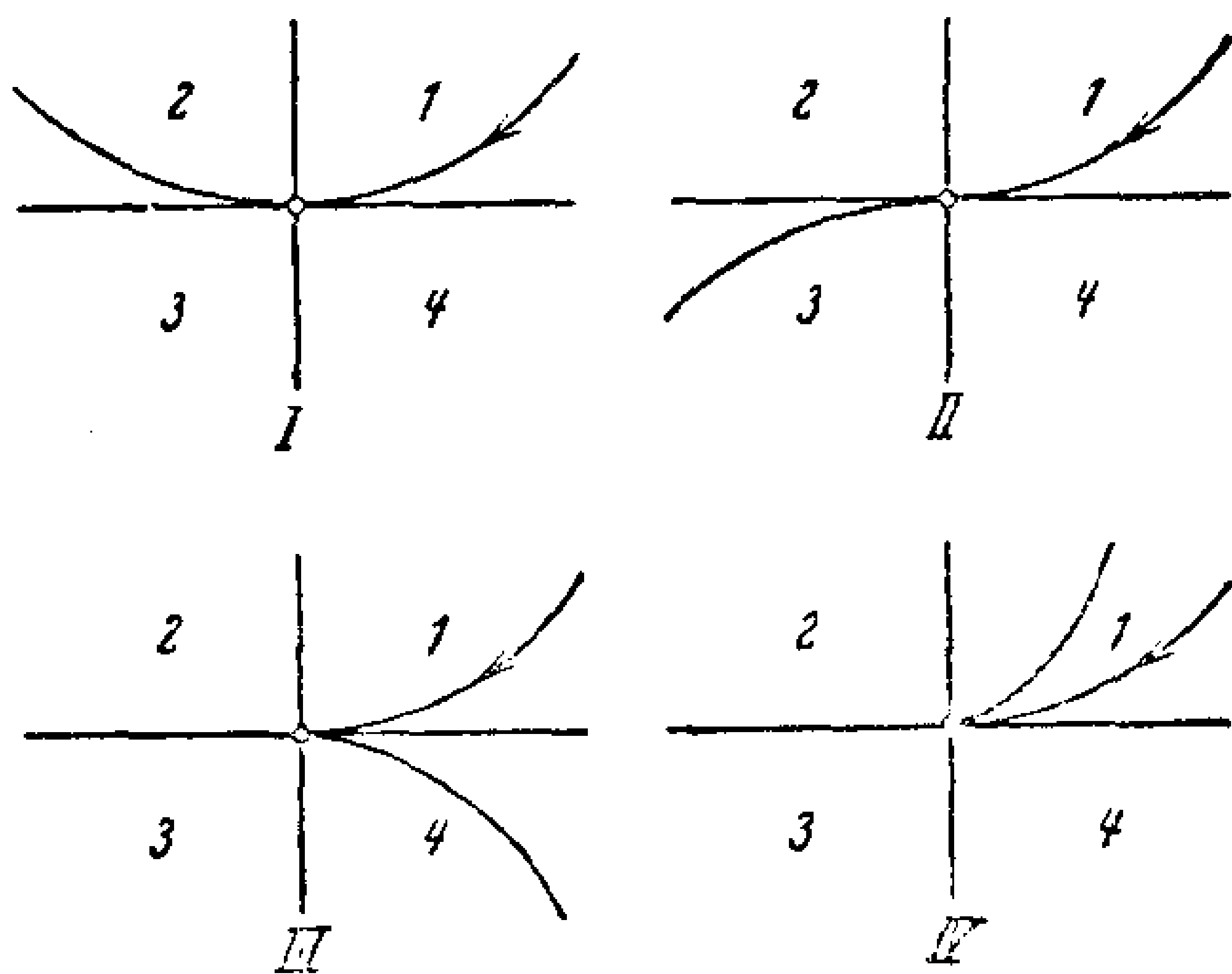


图 183

按照动点沿指定方向通过原点后，来到第二、第三、第四象限或回到第一象限，而分为四种情况(图183的I—IV)。只有在第一种情况下我們所討論的点才叫做**正則点**，在其余三种情况下都叫做**奇点**。实际上曲綫上几乎所有的点都是正則的，只有在个别的地方才出現奇点①。在第二种情况下我們說曲綫有**拐点**，在第三、第四种情况下分别說曲綫有**戟尖点**和**鳥嘴尖点**②。可以证明，这种分类法与所取点的移动方向无关。

現在我們要作一图形，表示曲綫当通过这四种类型的点时切綫方向改变的情况。为此我們采用高斯首創的一种方法，这方法对于曲面的研究特别重要。同以前一样，在曲綫上选好一个行进方向。在曲綫的平面上另作一单位圆。我們把曲綫上的每一条切綫用和它平行的半徑表示，半徑从圆心出发的方向与曲綫在所討論的点的方向一致（图184)。用这种作图法，对应于曲綫上每一点P就决定了圆周上一点Q，此即半徑与圆周的交点。在这种表示法之下，圓上的点称为曲綫的“切綫象”或“切綫标形”或“高斯象”。因为圆的半徑总是垂直于对应的圓的切綫，所以曲綫的切綫总平行于切綫象上对应的法綫，而切綫象上的切綫总平行于曲綫上对应的法綫。

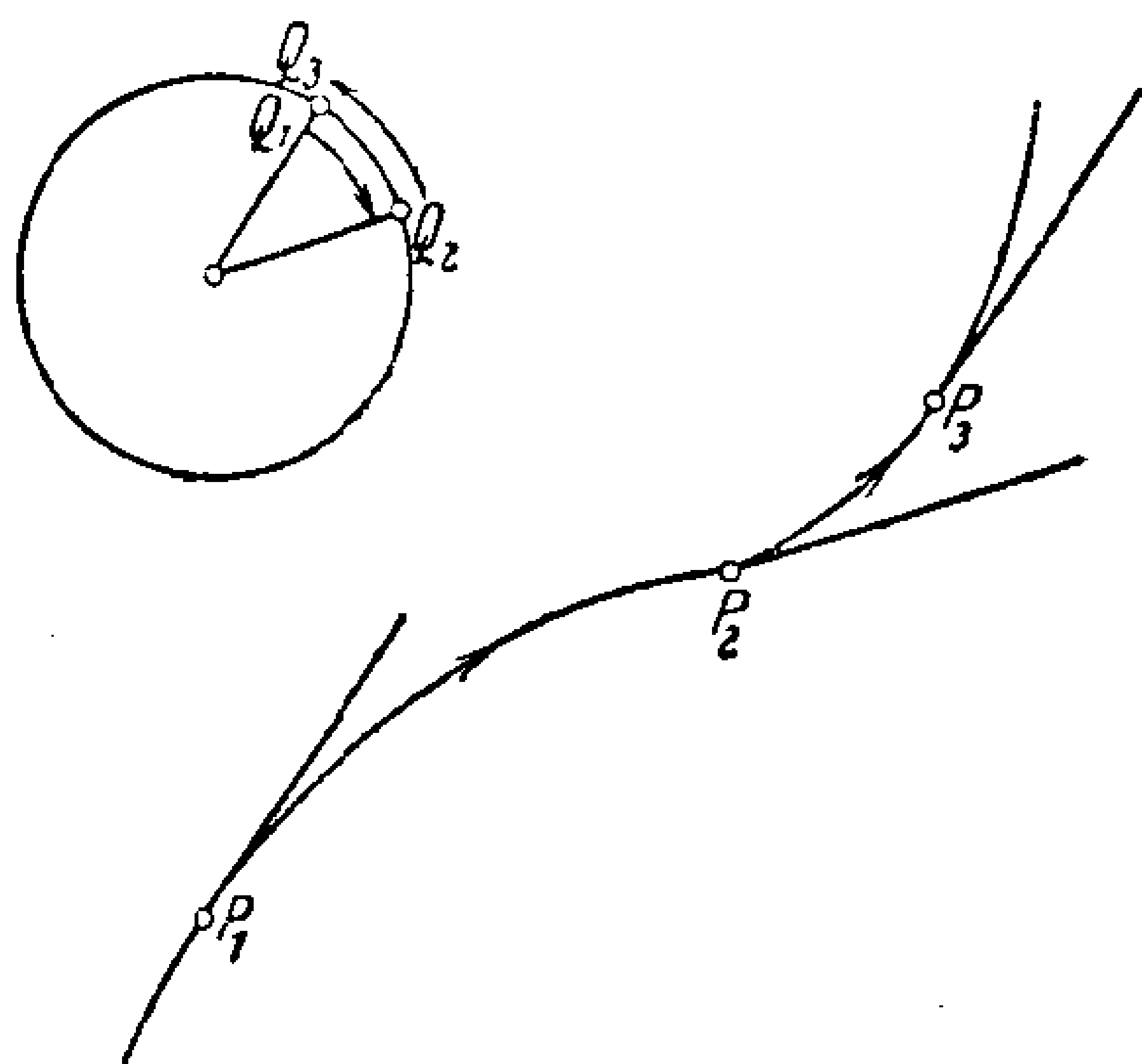


图 184

① 这句話仅对于直綫不成立。在直綫的情况，上述方法完全不适用。又若从更高的观点来看，则在第一种情况下也可出現奇点，即当在該点的曲率圓退化成直綫或点的时候(参看第181頁)。

② 这里讲的戟尖点和鳥嘴尖点通常称为第一类尖点和第二类尖点。——中譯者注。

高斯的表示法能使曲綫上每一点对应于圓周上唯一的点。但是反过来，与圓周上一点相对应的曲綫上的点，通常不止一个，而是好多个，即所有那些具有相同切綫方向的点(例如图184中的 P_1 和 P_3)。

設想有一点沿曲綫运动，經过图183中所示的各种不同类型的点。在第Ⅲ和第Ⅳ种情况，点改变了运动的方向，但在第Ⅰ第Ⅱ种情况，方向不变。現在要問，切綫象上对应点的情况是怎样的？在第Ⅰ种和第Ⅲ种情况，运动的方向不变，但在第Ⅱ和第Ⅳ种情况方向改变了。实际上在一个第Ⅱ和第Ⅳ种点的近旁有平行切綫，但其他两种就沒有。因为切綫象上点的移动方向，反映了曲綫上切綫方向的改变，我們可以把曲綫上的四种类型的点刻划如下：

Ⅰ. 正則点：曲綫上的点和它的切綫象都沿原方向继續前进。

Ⅱ. 拐点：曲綫上的点沿原方向继續前进，但象点反轉了方向。

Ⅲ. 载尖点：曲綫上的点反轉了方向，但象点沿原方向继續前进。

Ⅳ. 鳥嘴尖点：曲綫上的点和象点都反轉了方向。

上面的分类法并沒有包括所有可能的情形。即使我們局限于有簡单解析表式的一段曲綫，也还有另外三种情况未包括在內：可能有“二重点”，在这种点处曲綫自交；还有端点，在这种点处，曲綫突然終止了；最后，曲綫也可能有“孤立点”，即同曲綫上其他点完全分离的点(参看第201—202頁)。奇怪的是，更有一些情况，在图形上看来很簡单，可是它們的解析表达式却很复杂，例如角度不等于零的隅角。

現在我們来引进曲率的概念。这个概念在全部曲綫論和曲面論中占着极其重要的地位。以后将会看到，曲率与高斯的切綫表示有密切联系。設 t_1 和 t_2 是一曲綫上相邻二点 P_1 和 P_2 的切綫，

n_1和n_2是它們的法綫。設二法綫交于点M(图185)。显然，二切綫間的夹角等于二法綫間的夹角:

$$\angle(t_1t_2)=\angle(n_1n_2).$$

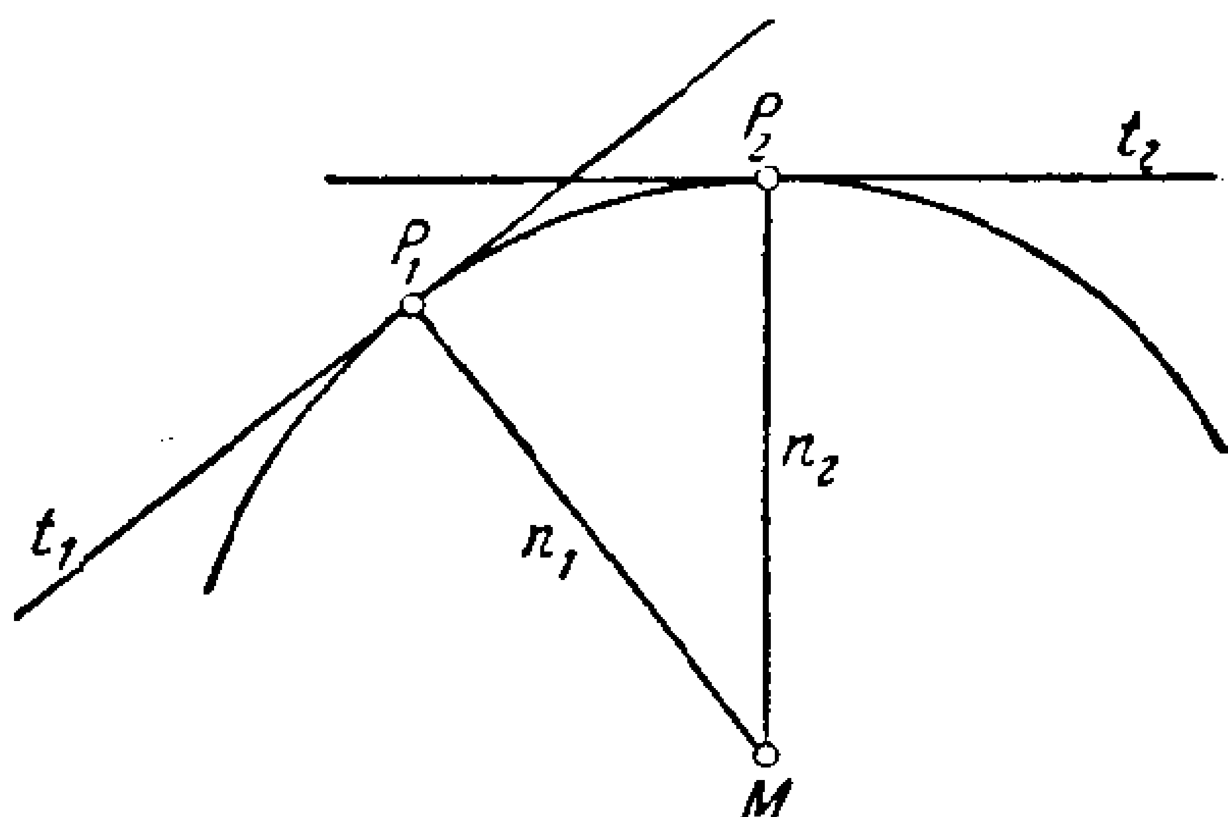


图 185

现在让P_2点沿曲綫趋近于P_1，同时考虑$\angle(n_1n_2)$和曲綫上两点距离之比。一般地,这个比趋于一极限

$$\lim_{P_1P_2\to 0}\frac{\angle(n_1n_2)}{P_1P_2}=k.$$

这个极限值k叫做曲綫在点P_1的**曲率**。

k等于二法綫綫段MP_1和MP_2的公共极限綫段长r的倒数。这可以从下面的变换推知,至于它的解析证明姑且从略:

$$k=\lim_{P_1P_2\to 0}\frac{\angle(n_1n_2)}{P_1P_2}=\lim_{P_1P_2\to 0}\frac{\sin(n_1n_2)}{P_1P_2}=\lim_{P_1P_2\to 0}\frac{P_1P_2}{MP_1\cdot P_1P_2}=$$

$$=\lim_{P_1P_2\to 0}\frac{1}{MP_1}=\frac{1}{r}.$$

数值r也可以用别的方法求得:过P_1及曲綫上邻近二点作一圓。让这邻近二点沿曲綫趋近于P_1，則圓将趋近某一极限位置。从作图上看来，我們可以預想到极限圓的中心就在法綫交点M的极限位置，由此可知极限圓的半徑就等于r。用解析方法可以证实这句話。这个圓叫做曲綫在P_1的**曲率圓**，圓心叫做**曲率中心**。圓的半徑叫做**曲率半徑**。由于上述的作图法，我們通常說曲率圓与曲綫交于三个重合的点。相仿地，我們也說切綫与曲綫交于两个重合的点。

还有一种确定曲率圓的方法:試考虑所有与曲綫相切于P点的圓(图183)，但这些圓的圓心都在曲綫过P的法綫上。平面在P的邻近被曲綫分成两部分，这两部分叫做曲綫段的两側。所考虑

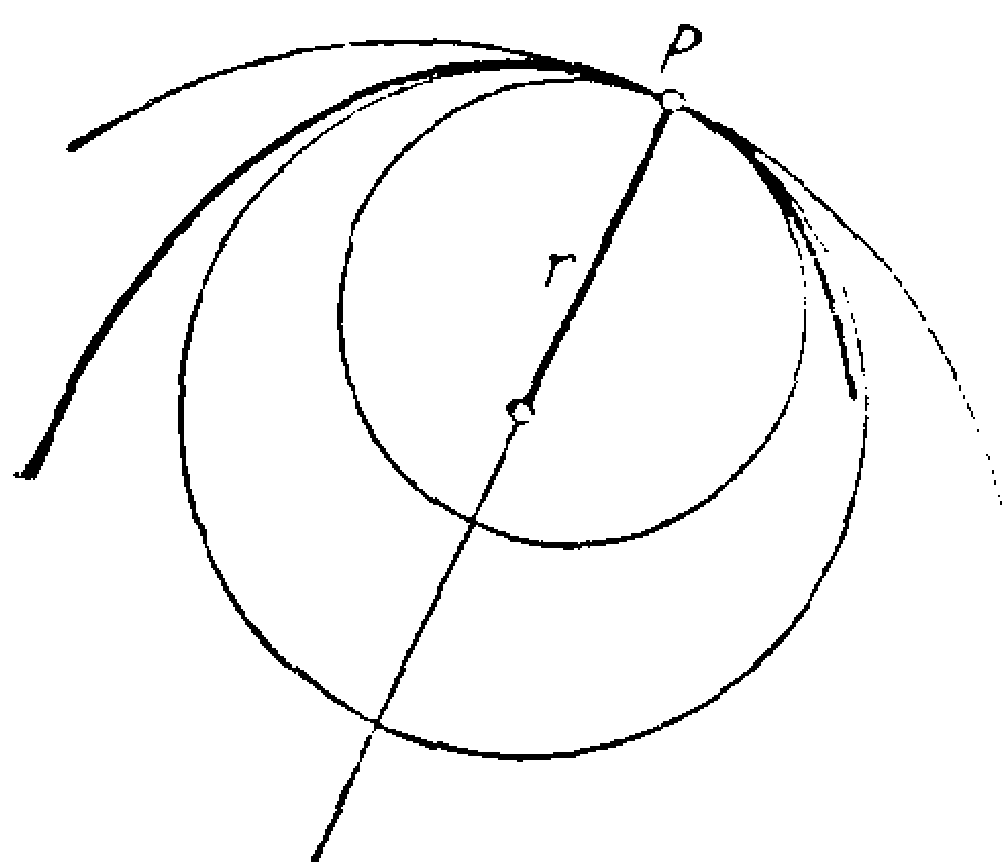
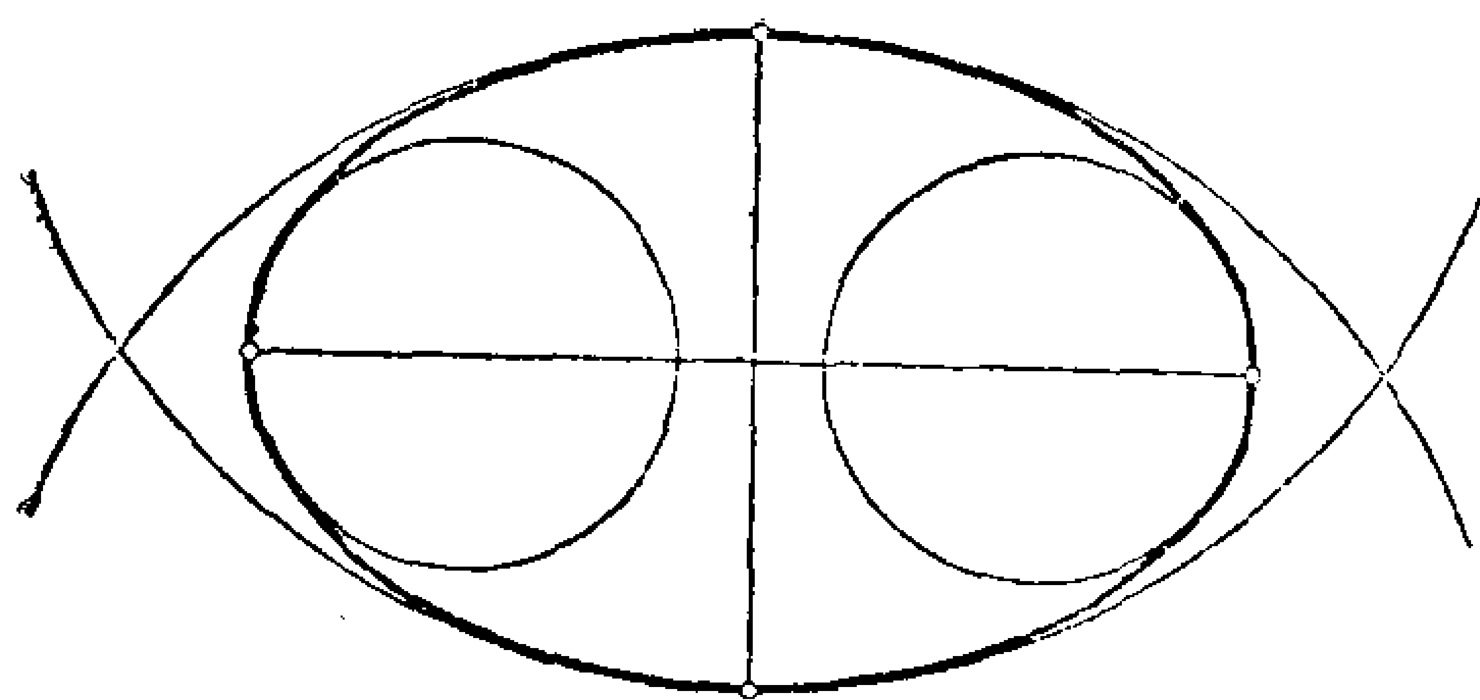


图 186

的那些圓里面，有一些圓在P的近旁完全位于曲綫的一側，其余的一些圓則完全位于另一側。曲率半徑为r的曲率圓一般地有下列性质：它把两組圓分开，使得在P的邻近所有半徑大于r的諸圓居于曲綫的一側，所有半徑小于r的諸圓居于曲綫的另一側。曲率圓本身通常分开落在法綫的两側，又在曲綫的两側；換句話說，曲率圓在切点处穿过曲綫。如同曲綫的奇点一样，曲率圓不穿过曲綫的点只能在曲綫的个别地方出現，除非曲綫本身就是圓。橢圓的四个頂点可以作为这种点的例子(图 187)。从对称性上来看显然曲率圓不能在这些点处穿过曲綫。一般来讲，在曲綫与对称軸的各交点处，也有同样情形。


图 187

曲率圓通常穿过曲綫这件事实，从曲率圓的第一种作法中也是容易理解的。一个經过曲綫上一点的圓一般地要在这点处穿过曲綫。因此当一圓通过曲綫上的邻近的三个点时，在第一点从A側穿到B側，在第二点从B側穿回到A側，第三点又从A側穿到B側；若三点趋近以至重合，則圓的这种情况一般地在过程中不会改变，因而可以看到曲率圓在切点处确实从曲綫的一側穿到另一側①。

前面曾經提过，曲綫的曲率和切綫象之間有某种关系存在。

① 根据类似的理由，切綫通常不在它的切点处穿过曲綫。

設 Q_1 和 Q_2 是与曲綫上两点 P_1 和 P_2 对应的切綫象（图 188）。那么

$$\angle(t_1t_2)=\angle(Q_1OQ_2)=\widehat{Q_1Q_2}.$$

由此可知，曲率半徑是曲綫上一小段弧长对其切綫象上弧长之比的极限。

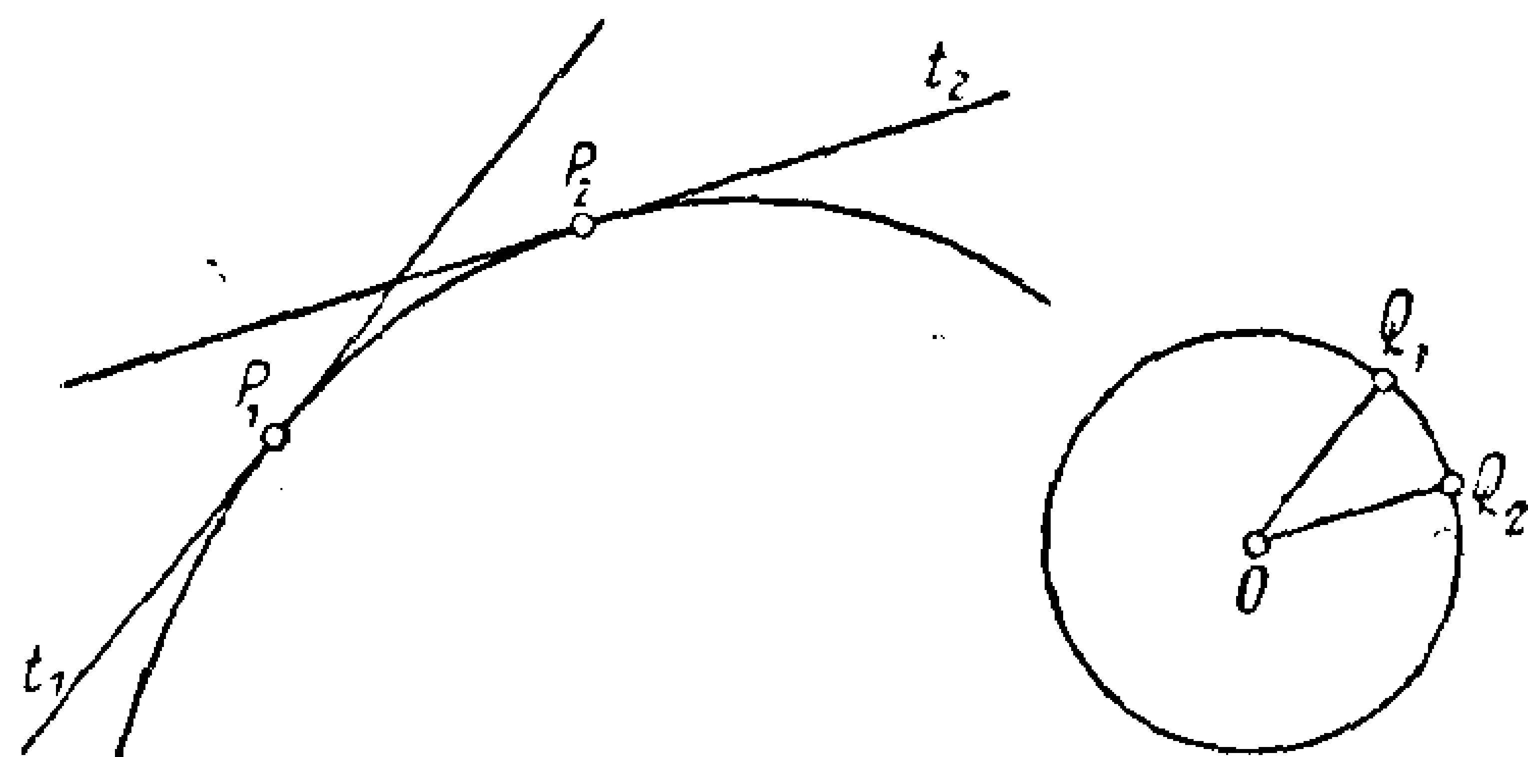


图 188

在个别点处曲率半徑可能变成无穷大；在这等点处曲率圓退化成直綫，因而与切綫重合。在这样的点处切綫通常要穿过曲綫，因此这一点乃是拐点。不过也有一些例外，即是在曲率等于零，但切綫不穿过曲綫的情形。这情形与橢圓在它的各个頂点处的曲率圓的性态有相同之处（参看第 177 頁上的脚注）。

从曲綫的曲率和切綫象之間的关系又可导出在戟尖点处的曲率通常变为无穷大，因而在这种点处曲率圓收縮成为切点。对于鳥嘴尖点来讲，我們作不出什么一般的論断。

从上面所介紹的几个概念，发生一系列的重要問題。例如，若曲綫的曲率已給定为弧长的函数，試由此决定曲綫。可以理解，而且也可以用解析方法证明，这样的函数唯一地决定了曲綫的形状；另一方面，任意給定这样的一个函数（假定这函数滿足某些連續条件），确实有某一曲綫与之对应。这种决定曲綫的方法，其优点是不依賴于特殊的坐标系。由于这种理由，弧长和曲率叫做曲綫的“自然”或“禀性”参数。最簡单的情况是曲率 k 处处是常值的。半徑为 $\frac{1}{k}$ 的圓，就是一例。并且按上面所說的，只有圓才能如此。当 $k=0$ 时，得到直綫。这样，直綫和圓是曲率为常值的仅有的平面

曲綫。

再有，可用好多种方法从一曲綫誘导出另一曲綫。例如，一給定曲綫的所有曲率中心，构成一新的曲綫，叫做給定曲綫的漸屈綫。反过来，第一条曲綫叫做第二条曲綫的漸伸綫。一曲綫的漸伸綫永远可用绳綫作出，其法如下：把一段绳綫紧紧貼附在曲綫上，并固定其一端点，然后把绳綫逐漸拉开，拉开时要始終保持绳綫是拉得紧紧的，如此则自由端点就描出一段漸伸綫。圓的漸伸綫我們已經用这种办法作出来了(参考第 6 頁)。至于漸屈綫和漸伸綫之間的这种特殊关系的原理，将在下一章闡明(§ 41, 第 275—276 頁)。

§ 27. 空間曲綫

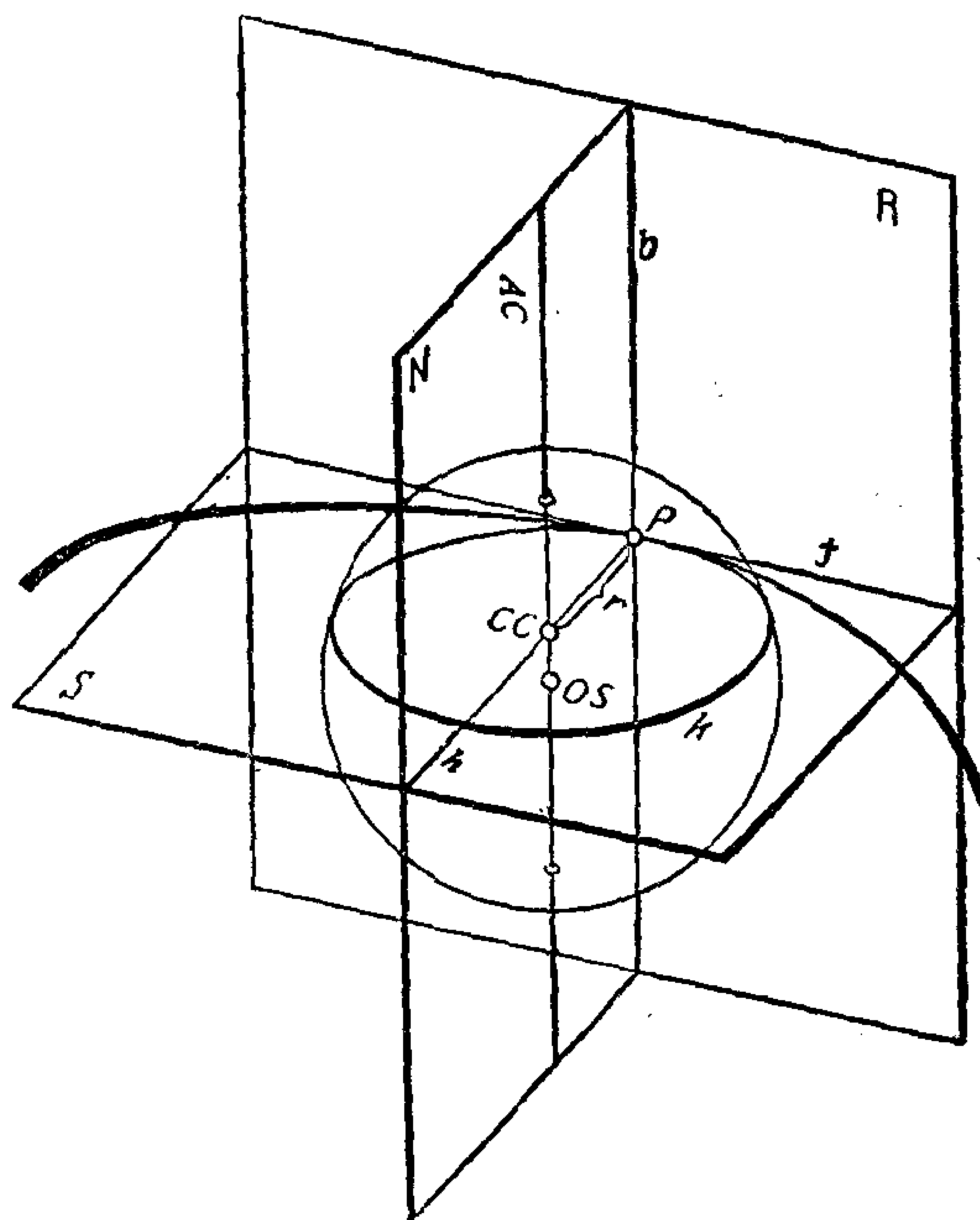
上一节的大部分討論均可适用于空間曲綫（有时也叫撓曲綫）。

首先，空間曲綫的切綫仍然是当一交点趋近以至重合于另一交点时割綫的极限位置。但是空間曲綫跟平面曲綫在这方面有所不同：空間曲綫的切綫在切点处有无数垂綫，这些垂綫填滿一平面，它叫做曲綫在該点的法面。

現在我們要找出在所考虑的点的邻近与曲綫最逼近的平面。为了这个目的，我們通过在已知点的切綫和曲綫上一邻点作一平面，并让第二点沿曲綫趋近于那个固定的切点。在这个过程中平面趋近于一极限位置。这极限平面就是我們所要求的平面；它叫做曲綫在已知点的密切面。按照前面的說法，我們說密切面与曲綫有三个重合的交点。由于这个原故，曲綫在切点处一般地要穿过密切面，虽然它位于包含切綫的任何其他平面的同一側。

因为密切面包含切綫，所以密切面垂直于法面。最后，我們考虑通过曲綫上已知点的旣垂直于法面又垂直于密切面的平面。这

个平面叫做从切(直化)面。



P	所考慮的点	s	密切面	N	法面
R	从切面	t	切綫	h	主法綫
b	副法綫	k	曲率圓	r	曲率半徑
AC	曲率軸	CC	曲率中心	OS	密切球面的中心

图 189

剛才所說的三个平面可以作为空間笛卡儿坐标系的三个坐标面。这样的坐标系用来描写曲綫在所考慮的点处的性态甚为方便。在这样的坐标系中，一根坐标軸是切綫；其他两根軸，因为一定都在法面上，分别叫做主法綫和副法綫。主法綫在密切面上，副法綫在从切面上（图 189）。这种坐标系，由于它依賴于曲綫上的点，叫做曲綫的动标三面(棱)形。动标三面形与平面曲綫中由切綫和法綫做成的坐标系相类似。在空間中，一个坐标系定出八个

称为卦限的区域，这是跟平面上只有四个象限不同的地方。这样动标三面形可用来区别空間曲綫上八种不同类型的点，正与在第178 頁上讲过的将平面曲綫上的点分成四种类型的作法相彷彿。同平面曲綫一样，空間曲綫上的点也只有一种类型是正则的，其余的情况只能在个别的地方才会出現（假定我們的曲綫眞正是空間曲綫而不是完全在一平面上）。在正則点处，曲綫穿过密切面和法面并且位于从切面的同旁。其他的情况我們不再討論。此外，附带一提，对于空間曲綫，也和平面曲綫一样，即使解析結构很簡单，仍可能出現另外三种类型的奇点，即二重点、端点和孤立点。

現在我們把平面曲綫的高斯表示法推广到空間曲綫上去。为了这个目的，我們作一个单位半徑的球面。对应于曲綫（假定曲綫已定向，即有一定的行进方向）上的每一切綫作球面的一个半徑，使半徑平行于切綫，并和切綫取同一指向。球面上半徑的端点叫做曲綫上各对应点的切綫象。用这种方法能把整个曲綫表現为球面上的曲綫。若以主法綫和副法綫来代替切綫，则在单位球面上可得另外两条曲綫。分别相对于它們各自的动标三面形来看，这三种"球面象"之間，以及三种球面象与原曲綫之間，存在着某些簡单的关系。例如，切綫象和副法綫象一起能够刻划曲綫的上述八种类型的点。这是說，原曲綫上的点、切綫象上的点、副法綫象上的点可各在自己的路綫上继續前进或者变成后退，而所有可能情况的組合，就恰恰給出八种类型的点。

下面我們把曲率的概念推广到空間曲綫上去。設 t_1，t_2 分别为曲綫在二邻点 P_1 和 P_2 的切綫。考虑当 P_2 趋近于 P_1 时商 $\frac{\angle(t_1t_2)}{P_1P_2}$。这个商一般趋于一极限值，它叫做曲綫在 P_1 点的曲率（或第一曲率）。我們已經知道，平面曲綫的曲率与二法綫交点的极限位置之間存在着怎样的关系。对于空間曲綫，类似的論证导出的不是一

个点，而是一条直綫——相邻二法面交綫的极限位置。这条直綫叫做曲綫在所考虑点上的极軸(也叫曲率軸)。极軸在法面上，而且从极限过程可以知道，极軸平行于副法綫（参看图 189)。极軸和主法綫的交点叫做(第一)曲率中心。曲率中心与曲綫上对应点的距离 r 叫做（第一）曲率半徑。同平面上的情形一样，r 是曲率的倒数。通过曲綫上相邻三点的圓，当三点趋近以至重合时趋近一极限位置。这个极限圓在密切面上，其圓心和半徑即是曲率中心和曲率半徑。

空間高斯切綫象与曲率的关系同平面上的一样：曲率半徑是曲綫的一小段弧长与其切綫象上对应弧长之比的极限。证明与平面上的相仿。

我們把二切綫間的夹角换成二密切面間的夹角，也就是换成二副法綫間的夹角。这样又导出了空間曲綫理論的另一个特別重要的概念：我們把二副法綫間的夹角除以曲綫上对应两点的距离，然后让两点趋近以至重合。这个商的极限值 t 叫做曲綫在已知点的撓率，有时也叫做第二曲率。撓率的倒数显然是曲綫上的一小段弧长与其副法綫象上对应弧长之比的极限。

我們应用包含曲綫上的三个邻近点的极限过程，已經能够得出第一曲率。要得到第二曲率的类似解释，必須从四个点着手。四个点通常决定一个球面。現在我們可以考虑通过曲綫上四个邻近点的球面，当四点趋近以至重合时的极限。取得极限位置的球面叫做密切球面。由极限过程知道，曲綫的切綫在切点处也与密切球面相切，而且密切球面的球心位于极軸上（参看图 189)。至于从密切球面的球心到曲率中心的距离，經过計算得知为 $\frac{1}{t}\cdot\frac{dr}{ds}$，这里的 ds 和 dr 分别是弧长和曲率半徑的微分。其次，由作法上可以推出，密切球面和密切面的交綫就是曲率圓。应用毕达哥拉

斯定理我們便得到密切球的半徑为

$$\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\cdot\frac{1}{t^2}}.$$

正象平面上二量 s 和 r 的情形一样，空間的 s, r, t 叫做空間曲綫的自然参数或禀性参数。与平面上情形相仿，这里有一个重要的定理：我們永远能够找出一种，而且只是一种形状的空間曲綫，使得在这条曲綫上 r 和 t 是 s 的已知函数。如果 $\frac{1}{r}$ 恒等于零，得到直綫。平面曲綫的特征乃是 t 恒等于零。如果 r 和 t 是常数但不是零，則得到圓柱螺旋綫。

在球面上的曲綫要用比較稍微复杂的条件来刻划。显然曲綫所在的球面必与曲綫上所有点的密切球面相重合。因此上面計算出来的密切球面的半徑必然等于常数：

$$r^2+\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\cdot\frac{1}{t^2}=\text{常数}.$$

用解析方法可以证明这个条件也是充分的。

至于其他有关空間曲綫的問題，留待后面讲曲面論时再行討論。

§ 28. 曲面的曲率。橢圓点、双曲点、抛物点。曲率綫和漸近綫；臍点，极小曲面，猴鞍面

在研究曲面以前，我們預先声明我們所研究的曲面限于非自交的小片光滑曲面，并且不計边緣上的点。現在考慮曲面上一点 P 和曲面上所有通过 P 的曲綫。值得注意的是，一般来讲，所有这些曲綫在 P 点的切綫都在一个平面上。由于这个原故，这个平面叫做曲面在点 P 的切面。曲面上凡有切面的点都叫做正則点；所有别样的点，都叫做奇点。一片曲面上的奇点不能填滿整个曲面，最多只能填滿曲面上一些个别的曲綫。

通过曲面上一个正则点P作切面的垂綫，这垂綫叫做曲面在P的**法綫**。通过法綫的諸平面同曲面的交綫称为曲面的**正截口**。在一个正则点P处的正截口或者在P处是正则的，或者在P处有拐点。

我們下面的課題是把曲率的概念修改，使它适用于曲面。在曲綫的情形，曲率是在切点紧密邻近曲綫对其切綫的偏差程度的一种指标。相仿地，我們留意曲面相对于其切面的性态。如果我們从实例观察曲面的形状，就可看出有两种根本不同类型的点：**杯面式的点**和**鞍面式的点**(杯点和鞍点)。

杯点的特征是在所考虑点的紧密邻近切面不穿过曲面，而完全位于曲面的一側。正因为如此，我們能在这样的一点处把曲面竖立在平坦的桌子上。以前曾經見过不少这类曲面的例子。比如球面和椭球面，这两种曲面上的每一点都是杯面式的。这种类型的点还有一个名字，叫做**椭圆点**。

在鞍点处曲面的情况很像一个山口(图 190)。在山口的最高点P，切面水平；在P的左右，路面隆起；在P的前后，路面下陷。因此在P点的切面与曲面交于一曲綫，这曲綫有两支，它們交于P(換句話說，有两条水平的道路，它們汇合于山口的最高点)。这个性质是鞍点的特征。显然在这样的点处曲面不能竖立在平坦桌面上。曲面上所有点都是鞍点的例子有如单叶双曲面和双曲抛物面。鞍点的另一个名字叫做**双曲点**。

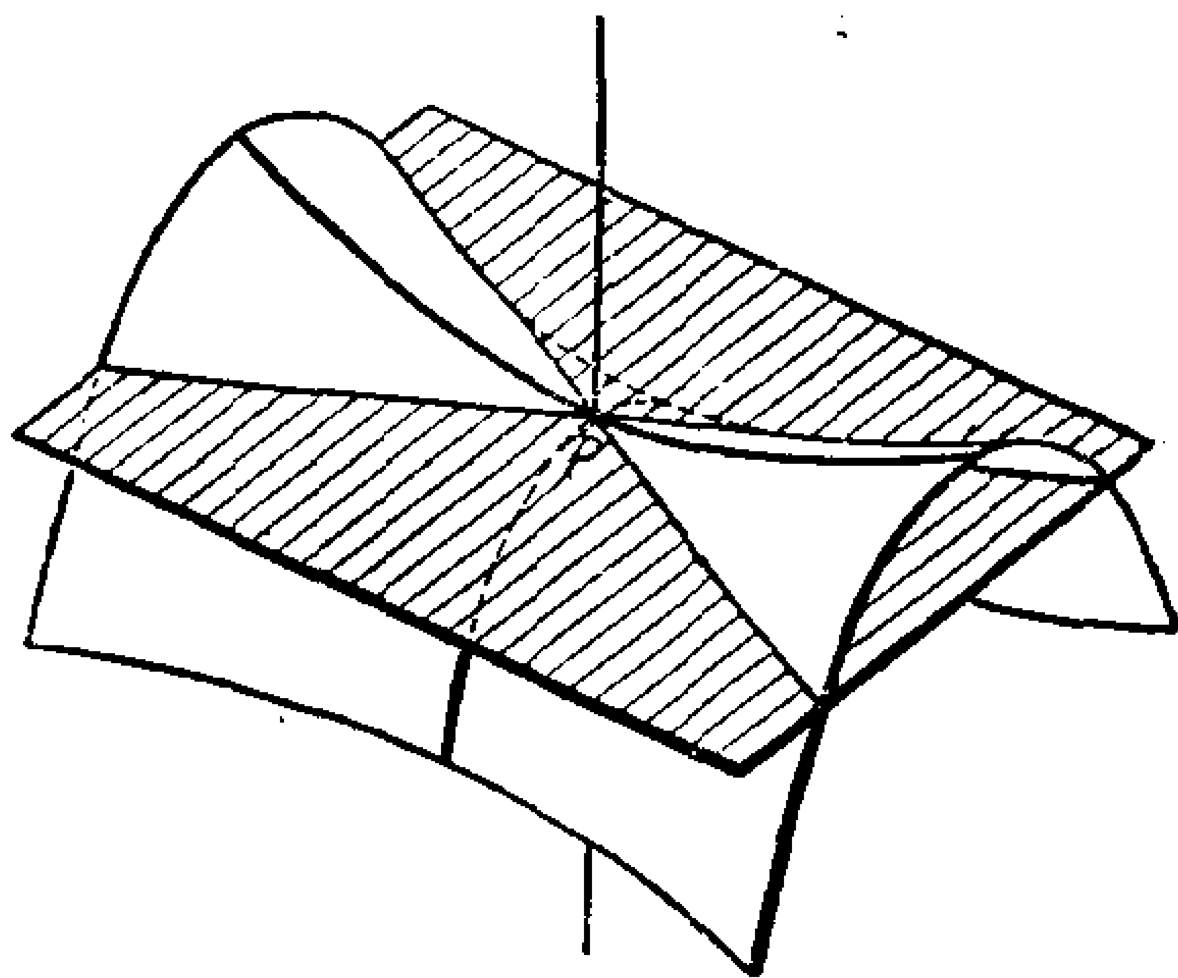


图 190

介于椭圆点和双曲点之間的还有一种过渡情形，这是**抛物点**。下面是求抛物点的一种方法：設F和G是相切于一点P(意指它們

在P点有同一切面）的两个曲面，并且在P点F是橢圓式的，G是双曲式的。如果把F經过連續变形而变成G，在这个过程中让P和过P的切面不动，那末将有一个时刻，这时在P点曲面变为抛物式的。举个例子，我們可以从图190开始，把山口P的两方的山头压低，低到山脊处处与水平切面相接触，这时P就是抛物点。因为如果再把左右两旁的路面继續往下压，那末从前的山口将变为峰頂，亦即变成曲面的橢圓点。不过，这个例子不能告訴我們所有可能类型的抛物点。除此之外，尙有好多其他类型的抛物点，这要等待以后再詳細研究（第201，203頁）。那些类型的抛物点是不能当作橢圓点和双曲点的过渡情形而簡单地作出来的。

为了用数值的关系来描写曲率，我們可以从曲面在一点P的正截口的曲率出发。在P点的正截口的曲率中心一定落在通过P点的曲面的法綫上，因为这条法綫是通过P点的所有正截口的法綫。把通过曲面法綫的一平面繞这法綫旋轉，得到所有的正截口。在旋轉过程中曲率中心沿法綫依一定方式运动，从而提供了描写曲面在給定点处的弯曲性质的一种方法。

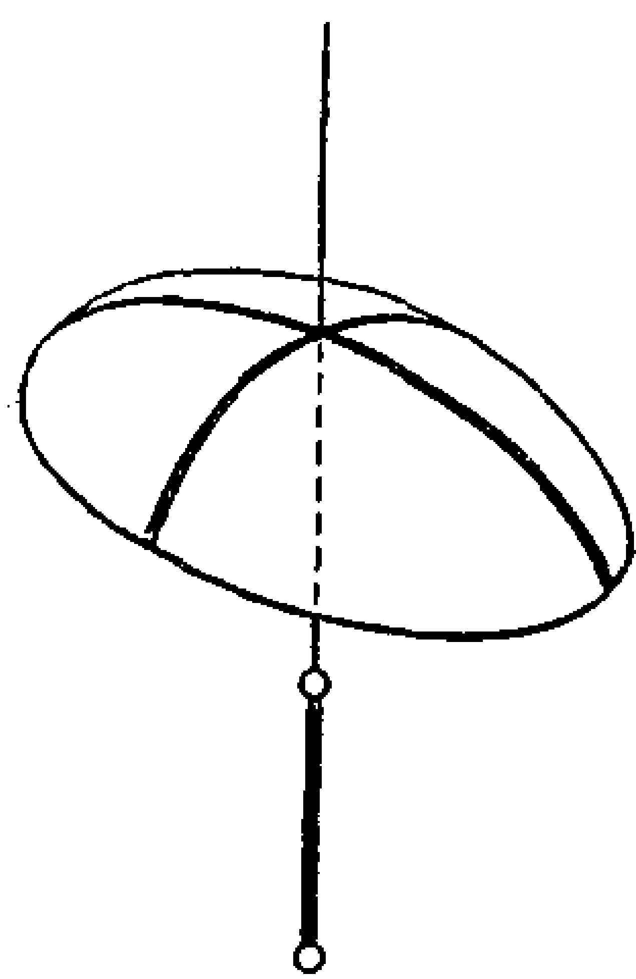


图 191

在橢圓点处（图191），曲率中心永远落在法綫被曲面分成的两側之一上。一般来讲，曲率半徑的值随法面旋轉而改变，它在某一定的正截口s_1上取得最大值r_1，在某另一正截口s_2上取得最小值r_2。r_1和r_2叫做曲面在点P的**主(法)曲率半徑**。主曲率半徑的倒数$k_1=\frac{1}{r_1}$和$k_2=\frac{1}{r_2}$叫做**主(法)曲率**。正截口s_1和s_2在点P的切綫方向，叫做曲面在点P的**主方向**。可以证明，在正則点处二主方向永远垂直。还可以证明，**每个**正截口的曲率由二主曲率和这

个正截口与二主方向所作成的角完全决定。

在双曲点处（图 192），曲率中心的軌迹不限定在曲面一側的法綫上。如果正截口通过曲面的两块高地（这里我們仍把曲面解釋成在P有一谿口的山脉），曲率中心都在点P的上方；如果正截口通过曲面的两块低地，曲率中心都在点P的下方。在那些曲率中心在点P的上方的正截口里面有一个，它的曲率k_1大于其他任何同一类型的正截口的曲率。当法面轉出这个位置以后，曲率漸減，曲率半徑則漸增。当法面接着轉到（如图 190 上所画的那样）通过P的两条水平道路之一的方向时曲率值就变为零，曲率中心朝上方退走到无穷远处。若旋轉仍继續进行，曲率中心便突然跳到法綫下方的射綫上来，从无穷远逐漸上升而趋于P；这时曲率半徑漸減，曲率则漸增。最后曲率达到一值k_2，它超过任何其他曲率中心在P点下方的正截口的曲率。和橢圆点的情形一样，k_1和k_2也叫做主曲率，与它們相当的正截口的方向也叫做主方向。同样，二主方向也是相互垂直的。此外，它們平分曲面与其切面的两支交綫所成的角及其补角。这两支交綫的方向称为曲面在P点的**漸近方向**。

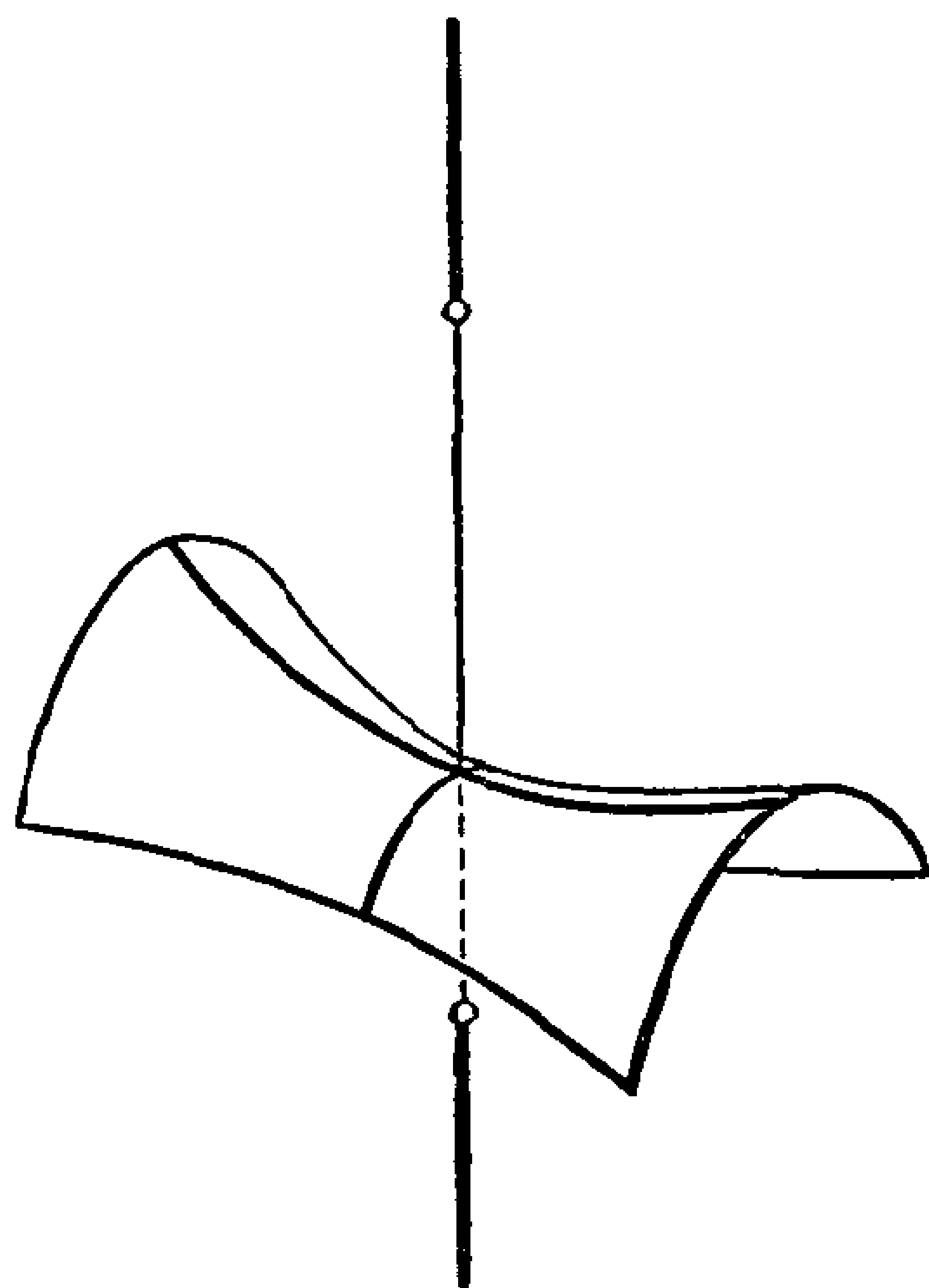
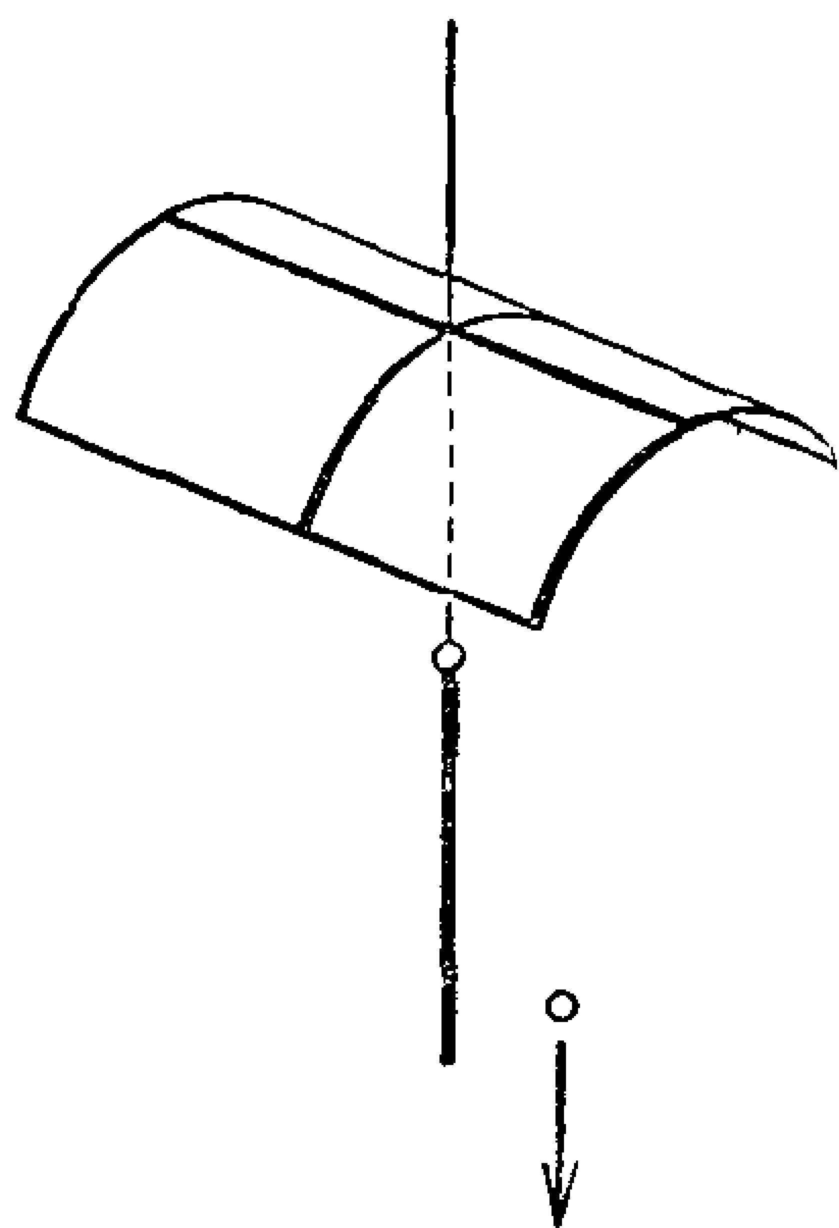


图 192

在抛物点上，一般也有两个相互垂直的主方向，与主方向对应的正截口的曲率值k_1和k_2分别大于和小于其他任何正截口的曲率值。抛物点的特征是两个主曲率之一为零，另一个一般不为零。不为零的曲率中心从与不为零的主曲率对应的位置开始，沿法綫的一条射綫退走到无穷远（图 193）。这样在抛物点上一般恰有一


图 193

个曲率为零的正截口。这正截口的方向是主方向之一，但同时須視为一个漸近方向。

給定了任意一片曲面，用解析方法可以在曲面上找到所有这样的曲綫，它們在曲面上每点的方向与二主方向之一重合，用这种方法我們可以找出曲面的曲綫“网”，即二曲綫族之組，每族曲綫都簡单而无空隙地盖滿曲面。这些曲綫叫做曲面的**曲率綫**。从以前的討論可知，过曲面上任一已知点P的二曲率綫在該点P相互垂直，因此曲率綫在曲面上形成正交曲綫网。

不过要知道，也有以前全部的討論不适用的情况。这是因为我們的論点是建立在正截口的曲率随着正截口的平面旋轉而改变的前提之上的。当然也可能在某一点所有的正截口的曲率都相同。这时二主方向不定，这类点叫做**臍点**。球面是曲面上全部点都是臍点的一个淺显的例子。事实上，球面和平面是曲面上的点全部是臍点的仅有的两种曲面。一般地讲，曲面的臍点是孤立点。曲率綫网仅在臍点处才可能有奇性。

关于曲率綫，这里有一个著名的定理，是杜潘（Dupin）得到的。在第5頁上曾經介紹过平面上正交曲綫网的概念。与此相仿，空間正交曲面网是指几族曲面，它們里面通过空間任一点的各曲面在該点的切面相互垂直。通过平面上的任一点，只能作两条相互垂直的直綫，但是通过空間的任一点，能作三个相互垂直的平面。由此我們自然会联想到三个相互正交的曲面族，在空間每一点处，每族各有一条代表。在第一章里讲过共焦二阶曲面网，就是这种正交系的一个例子。

在平面上（或者在曲面上）假定已給定任一曲綫族，我們能够

找到跟它正交的曲綫族。相仿地似乎这样的想法也合理：永远可以找到一个曲面族，它与空間任意两个曲面族正交。但是由杜潘定理知道，这种想法是不合理的。杜潘定理断言任意三重正交曲面网相交于曲率綫。据此，一族曲面跟两个正交曲面族正交的必要条件是这两个正交曲面族相交于曲率綫。不但如此，这个条件恰巧还是充分的。按照杜潘定理，在橢球面上的曲率綫是橢球面与共焦单叶双曲面与双叶双曲面的交綫（参看图 194）。如此构成的曲綫网（图 195），以橢球面与焦双曲綫的四个交点为奇点。事实上，这四点是橢球面的臍点。

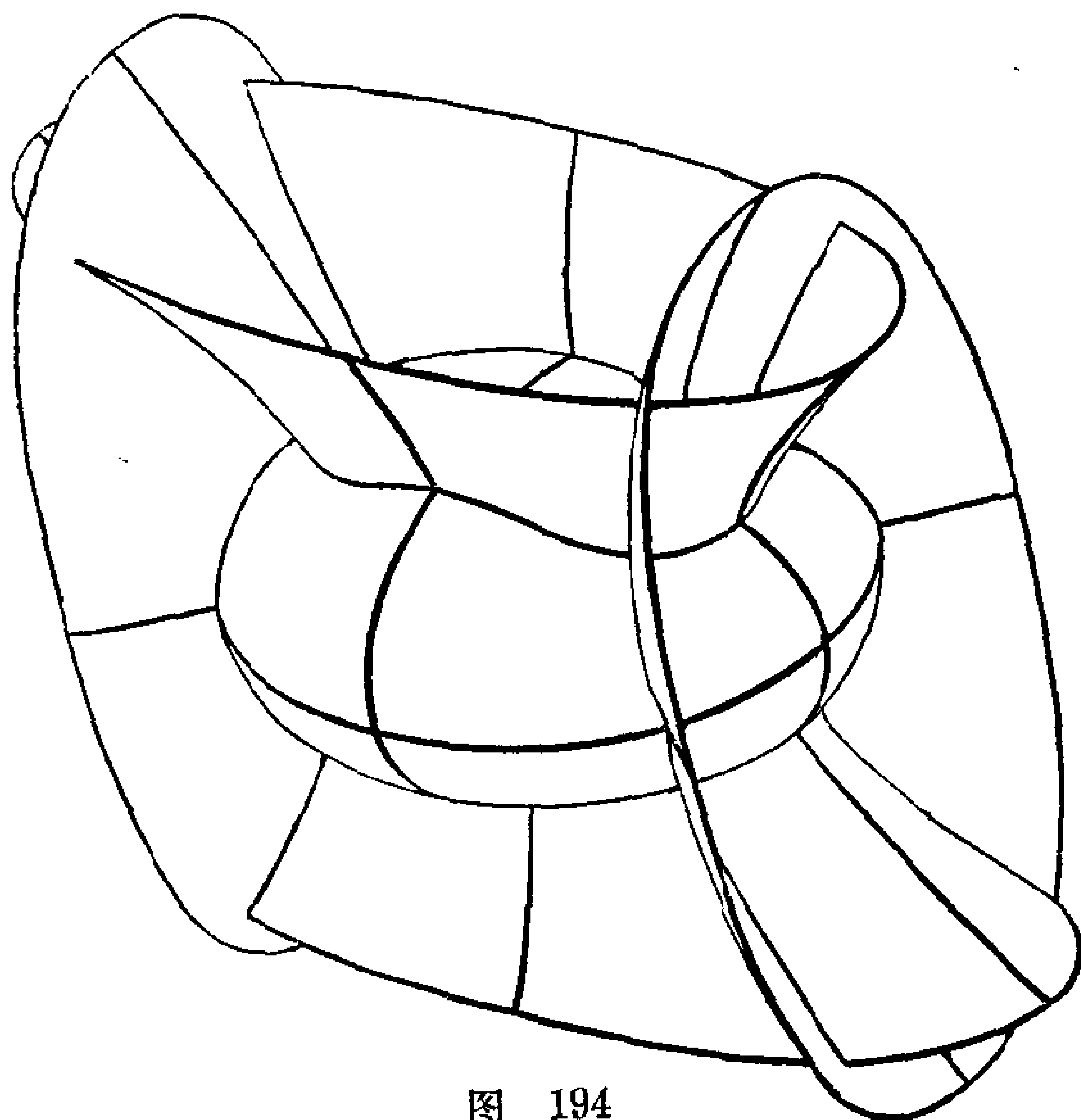


图 194

圍繞橢球面四个臍点的曲率綫的图象，类似平面上圍繞二公共焦点的共焦橢圓族和双曲綫族（参看第 5 頁图 6）。这个类似現象不是偶然的，这表示两族曲綫的內在联系。事实上，在橢球面上作曲率綫的方法可以仿照平面上橢圓的绳綫作图法，不过这里是以臍点代替了焦点。橢球面上的四个臍点分成两对对徑点，因而

两个非对徑点可以处于两种不同的相对位置（参看图 196）。現在假定我們已經选好了这样的一对点如 F_1 和 F_2，把一条适当长的绳綫两端系在这两点上，在 P 点綳紧，使整个绳綫自然地貼合在橢球面上。于是 P 点在橢球面上描繪一条曲率綫。多次改变绳綫之

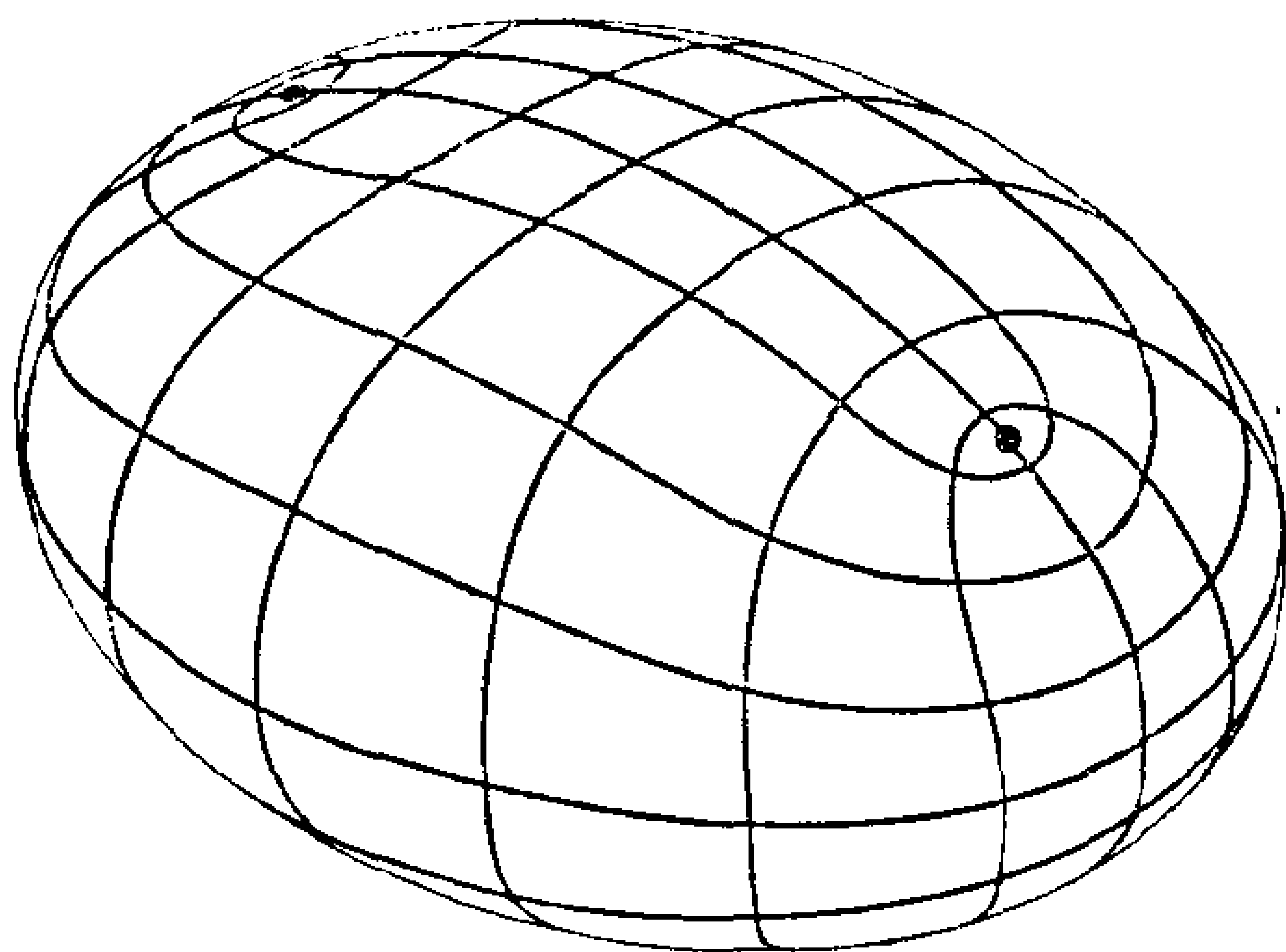


图 195

长，可得出一族曲率綫的全部。利用另一对臍点，同样可得出另一族曲率綫的全部。在平面上共焦二次曲綫系里有一橢圓族和一双曲綫族，而橢球面上的两族曲綫都可以看作广义的橢圓。

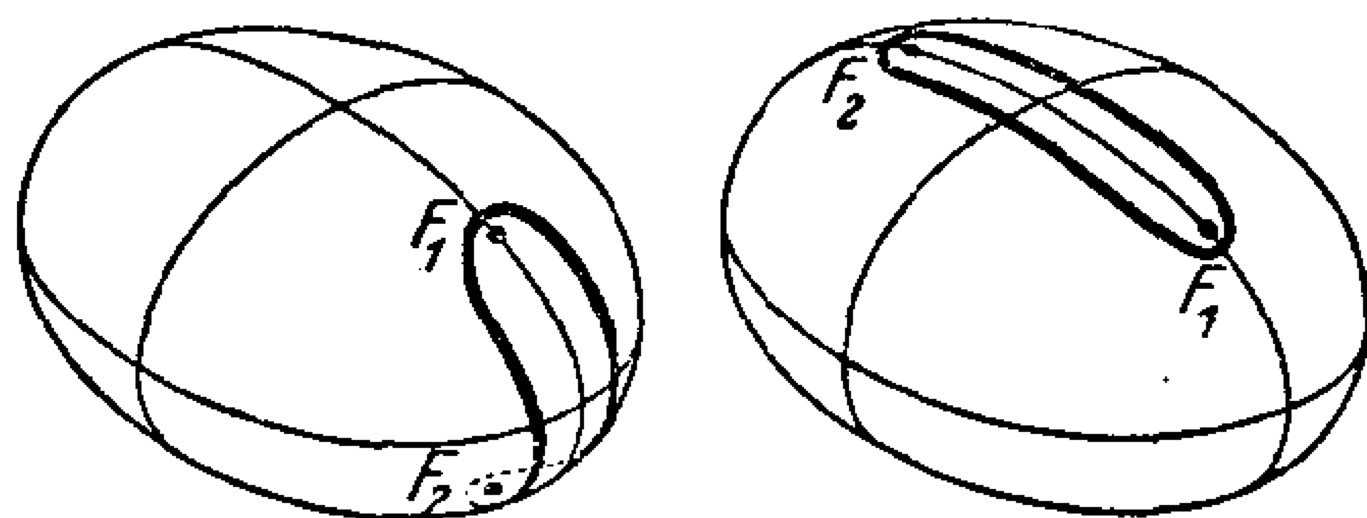


图 196

在橢球面的绳綫作图中，绳綫本身形成橢圓面的某些曲綫，相当于橢圓的二条焦半徑。这种曲綫类似平面上的直綫，它有这样的特征：它是連接曲面上任意两点最短的路徑。这种曲綫叫做曲面的測地綫（或短程綫）。关于它們的理論以后再行研究（第221—225頁）。

在双曲点处，除了主方向外，还有另外两个特别方向，即漸近

方向。和定义曲率綫的方式差不多，我們可以定义一种曲綫网，使曲綫在任一点的方向都是漸近方向。这样的一些曲綫叫做曲面的漸近綫。

在双曲点处的二主曲率之値也可以相等。发生这种情况的点，同臍点有些相同之处。如果一曲面的所有点都是这样的点，就称之为极小曲面。极小曲面又可用这句話来刻划：它的漸近綫构成一組正交网。虽說全由臍点构成的弯曲曲面只有球面，可是极小曲面的种类就多得很，这从下面列举的事实就可知道：把作成任意形状的金屬綫圈浸入肥皂溶液中，取出后即成极小曲面(参看第212頁图220a和b)。由于表面張力定律，肥皂膜的表面积将縮到最小。正因为这个原故，极小曲面可用純数学术語来刻划：在以已知的空間閉曲綫为边緣的一切曲面中，它的面积最小。这里很奇妙，用整片曲面的性质(大范圍內的性质)来刻划的曲面，跟先前讲的用曲面任一点貼近的性质(小范圍內的性质)来刻划的曲面是相同的。这种內在关系如用下法解釋或許容易理解。設已給以閉曲綫S为边緣的一片极小曲面，在这片曲面上选择一条很小的閉曲綫s。现在考虑在s内部区域的曲面。我們断言它的面积比任何其他以s为边緣的曲面的面积都小。假如不然，那么可以改变曲綫s内部曲面的形状，使其面积縮小；但是这样一来就惹起了以S为边緣的整个面积縮小，这跟极小曲面的定义矛盾。現在让小曲綫s一再縮小，小到成为极小曲面上的一点，那么就該有理由預料，运用极限过程将給出极小曲面的只与其一点紧密邻近有关的一些性质。

有关以极小性质来刻划曲綫和曲面的問題叫做变分法問題。我們上面表明了，极小曲面的全局性质，可用局部性质来代替，这一論据对于其他一切变分法問題也适用。在这里面所包含的极限过程，构成变分法的主題。这样說来，微分几何和变分法在两个相

反的方向上发展。在微分几何里，我們从只影响曲面上一点邻近的性质出发，由此推出支配所考虑图形的整体构造的性质；在变分法里，我們从有关整体构造的性质推出局部的性质。

变分法在理論物理中起着根本性的作用。因为出現在自然界里的平衡状态和运动状态，一概可以用某种极小性质来刻划。

利用肥皂膜还可以产生由多个边綠曲綫所圍成的极小曲面。比方說，可以取两个大小相同的圓形金屬綫圈，重合起来，然后浸入肥皂溶液中。取出后再分开，分开时要时时刻刻保持圓圈平面与它們的連心綫垂直。如此則两个綫圈中間的肥皂膜有类似双曲面的形状（图 197 和第 212 頁图 220 *b*)。由于对称关系，我們該想得到这曲面是一迴轉曲面。經过計算可以证实这句話；同时还可以证明，这个极小迴轉曲面的經綫是悬鏈綫。所謂悬鏈綫，是說两端系于二固定点的绳綫，在只受地心引力的影响下形成的曲綫。由于这个原因，上述曲面便称为**悬鏈面**。

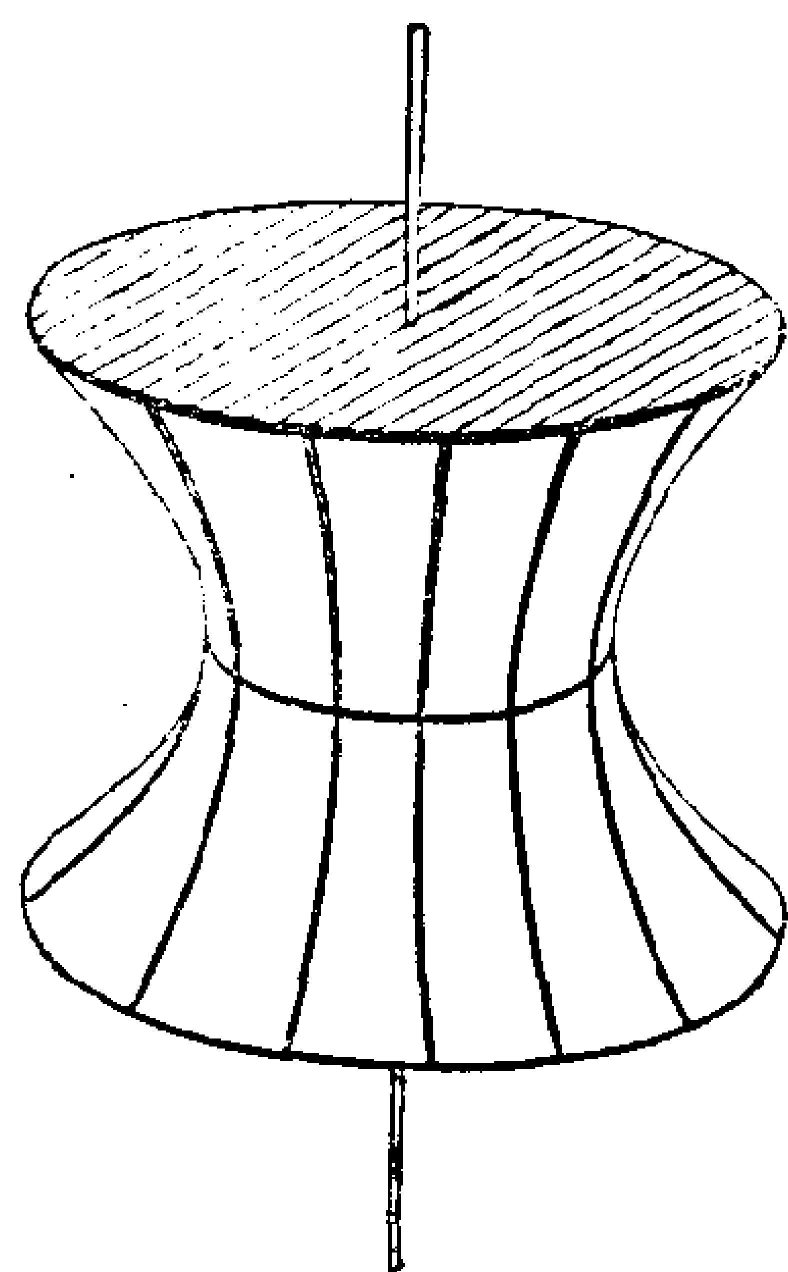


图 197

既有臍点性质又有极小曲面性质的点，是二主曲率都等于零的抛物点。在这样的点处所有正截口的曲率都等于零。平面上的全部点显然适合这个条件。反之，全部由抛物点組成的曲面仅有平面。具有孤立的抛物式臍点的实例不难仿照普通馬鞍面（参看第 187 頁图 190）而造出。办法是将馬鞍面上的二峰二谷換作三峰三谷，使曲面轉过$\frac{2\pi}{3}$的角时与自身重合（图 198)。显然每一峰立于一谷的对面，因此每一正截口有一拐点，所以每一正截口的曲率等于零。这类曲面叫做**猴鞍面**。猴鞍面名称的由来是这样：本

来人騎的馬鞍有两个兜子，可是給猴子騎的鞍子还要多一个兜子，为的是能够放下它的尾巴。

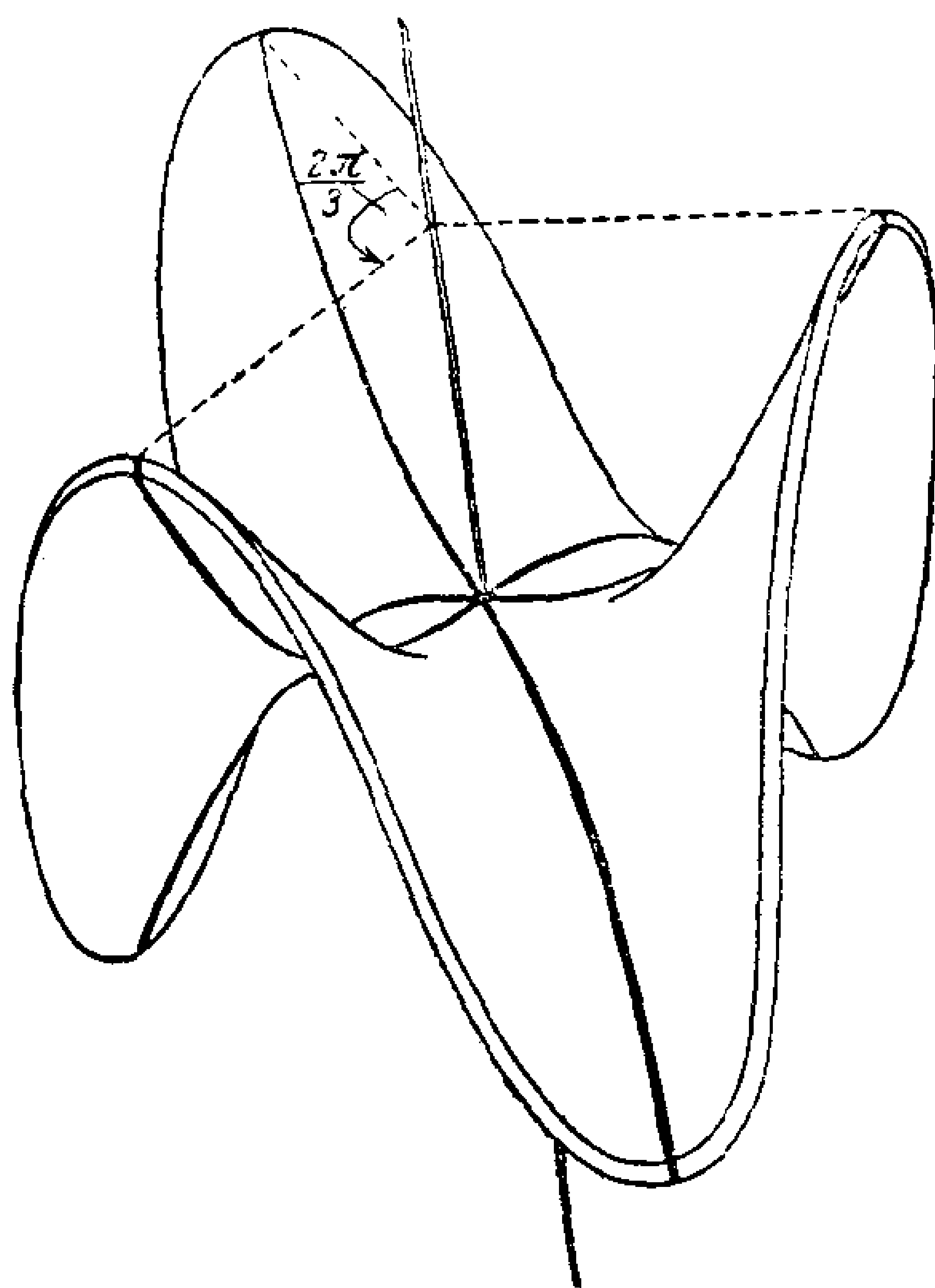


图 198

椭圓点和双曲点处曲面的形状的差别也可以用另一种方法来刻划。这方法同时又可以解釋“椭圓式”和“双曲式”二詞的意义。让我們貼近切面作一与之平行的平面，并考察这平面同曲面的交綫。在椭圓点处，只有在切面一側的平面和曲面有交綫。如果让平行平面和切面的距离趋近于零，則交綫将縮小而为切点。在距离趋近于零的过程中，若将交綫适当放大，画在比例尺不断增长的图紙上，那么可以看出，放大的交綫将趋近于在切面上的椭圓，这椭圓以切点为中心，以二主方向为軸。二軸长之比等于二主曲率半徑之比的平方根。

如果考虑在双曲点处和切面平行并且在它的同一側的平面，运用同样的极限过程，結果得出双曲綫，它的二軸方向和相对长，是和椭圓点情况下同样的主方向和主曲率的函数（图 199)。如果在切面的另一側也作平行平面，运用极限过程的結果，得到第二个双曲綫，它的二軸和漸近綫跟第一个的相同，两个双曲綫的漸近方向跟曲面在所考虑的点处的漸近方向一致。在曲面上任一椭圓点或双曲点处，用这种方法作出的椭圓或一对共軛双曲綫，叫做**杜潘标綫**。在抛物点处，用

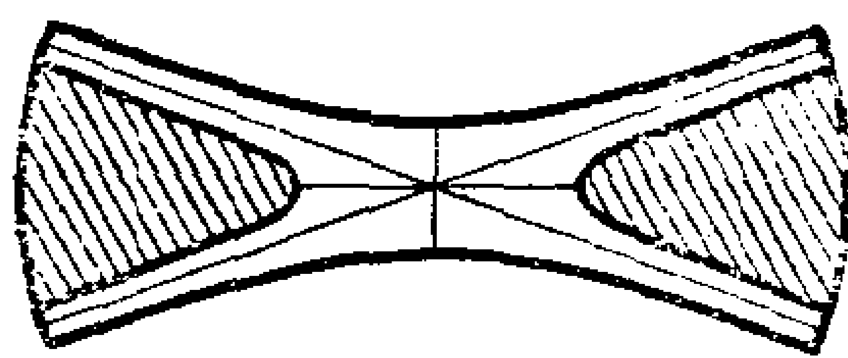
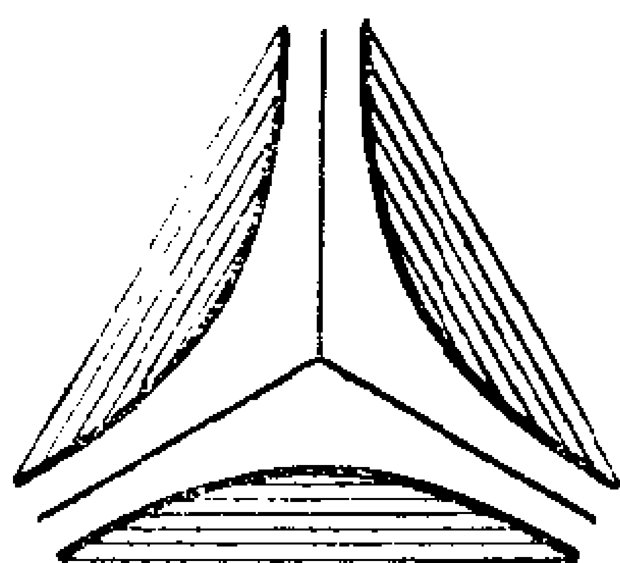


图 199


图 200

同样的过程可得出几种类型曲綫的任一种。在臍点处的杜潘标綫是圓，这在球面和橢球面的情况下不难证实。在猴鞍点处的杜潘标綫像图 200 那样的形状。

§29. 球面象与高斯曲率

直到目前为止，我們一向用两个数——二主曲率——来刻划曲面弯曲的性质。高斯創造了用一个数代表曲面上一点处弯曲性质的方法，这方法和我們以前对空間曲綫所作过的类似。这个数，自然依賴于曲面在該点处的主曲率。

經过单位球的中心作直徑，平行于我們研究中的曲面的不同法綫。在曲面的一点处任意选定法綫的两个方向中的一个，然后就以这个方向的取法为准，把它扩大到曲面在这一点邻近的所有点；这样一来，在所有法綫上都有了一定的指向。現在在单位球的直徑上选擇与法綫相同的指向，于是曲面上每一点都对应球面上的一定点——有向直徑的端点。采用这个方法能把曲面映成球面。这个方法是高斯发明的，叫做曲面的**球面表示**。由于球面的直徑垂直于过直徑端点的切面，因此按高斯表示法，曲面上每一点处的法綫方向，必与球面象的法綫方向一致，除此之外，二切面是平行的。正是由于这个原故，球面表示有时也叫做平行法綫映射或叫做平行切面映射。利用平行切面映射，不独可把一曲面映射成球面，也可映射成其他任何閉曲面。这种广义的映射方法在近代微分几何中有一定的用处。

在曲面的球面表示中，球面上一点可以对应曲面上几个点，这发生在而且仅在曲面上几个不同的法綫有相同方向的时候。容易从直观上看出来——以后經深入研究，就会理解——在曲面的橢圓点或双曲点的邻近，不存在不同的平行法綫（参看第 199 頁图

202, 203)。由此可推知，在这一类点的邻近，球面映射是一对一的。

設原曲面上任意一条閉曲綫 k, 在球面上表作一閉曲綫 k'。現在我們把球面上由 k' 所圍成的面积 G 除以曲面上由 k 所圍成的面积 F，然后让曲綫 k 縮小到曲面上的一点 P。如此 F 和 G 将趋近于零，而它們的商将趋近于一定极限值 K:

$$\lim_{F\to 0}\frac{G}{F}=K.$$

用这种方法定出的数値 K 叫做曲面在 P 点的高斯曲率（也叫总曲率或第二曲率）。借助解析方法可以证明：高斯曲率等于在这点上二主曲率的乘积：

$$K=k_1k_2.$$

高斯曲率有一个非常重要的性质：它不随曲面的弯曲而变。所謂弯曲，是这样的一种形变，它保持曲面上随意画出的曲綫弧长和角不变。我們可以拿几乎沒有什么伸縮性的材料，如紙和錫箔做成的曲面，来举例說明什么是弯曲。因为高斯曲率經弯曲不变，所以它必然跟曲面上只依賴于曲綫的弧长和角的某些性质有內在联系。由于这种理由，高斯曲率及其高維类似，在相对論里占着特别重要的地位，因为相对論所研究的正是高維弯曲流形的“內在”性质。

这里难免令人怀疑，既然高斯曲率按定义实质上同曲面在空間的位置有关，为什么又能經弯曲不变呢？下面一段叙述，可以答复这个問題。

設有由几块剛性三角板拼成的一个立体角(图 201 中是用四块三角板 a, b, c, d 拼成的)，立体角的每两个相邻的面可以繞其公共棱作相对旋轉。假定立体角有三个以上的面，則立体角的外形容許改变；这种改变应該看作是弯曲，因为这时画在立体角表面上的所有曲綫，它們的弧长和角都不改变。現在作各个面的法綫(l,

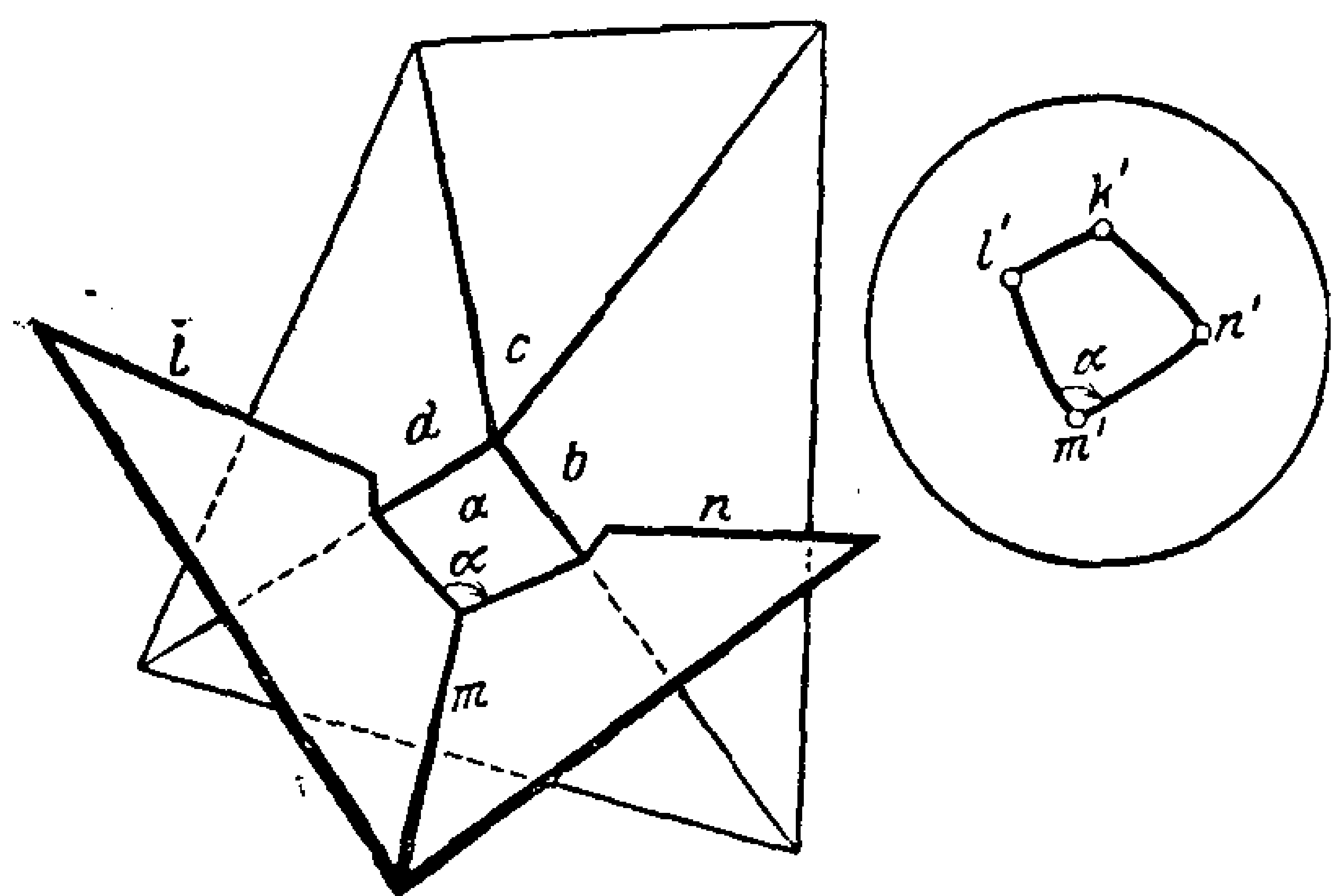


图 201

m, n 等等),幷假定法綫的方向是朝外的，于是就可得到立体角的球面象，它由球面上几个孤立点 (l', m', n' 等等) 組成。要想建立这一作法与曲面的球面表示的关系，我們用大圓弧連接球面上各对代表立体角相邻二面的点，由此便得球面多边形。下面就会看到，球面多边形的面积經弯曲不变。这个事实，显然与曲面的高斯曲率經弯曲不变相当。

上述断言根据球面三角学的一些初等定理容易推出。大家知道，球面三角形的面积以及由任意多个大圓弧构成的多边形的面积，仅依賴于其內角和。据此我們只要能证明代表立体角的球面多边形的內角和經弯曲不变就够了。从图 201 上甚易看出，每个这样的角是立体角两个邻棱夹角的补角，遵从我們的假設，知道这些角不变。

加添极限过程于上面的論述，可以推出高斯曲率的不变性，至少对于凸曲面总是对的。为了达到这个目的，应該首先用以小三角形为面的內接多面体去接近曲面，然后再应用上面的論点于凸多面体的每个立体角。

現在让我們看一看，曲面上的橢圓点、双曲点和抛物点的区别是怎样用球面象和高斯曲率的語言表达的。如果橢圓点沿曲面上一条沒有重点的小閉曲綫运动，它在球面上的象也是一条沒有重点的閉曲綫(图 202)，幷且这条曲綫的指向与原曲綫的相同。如果

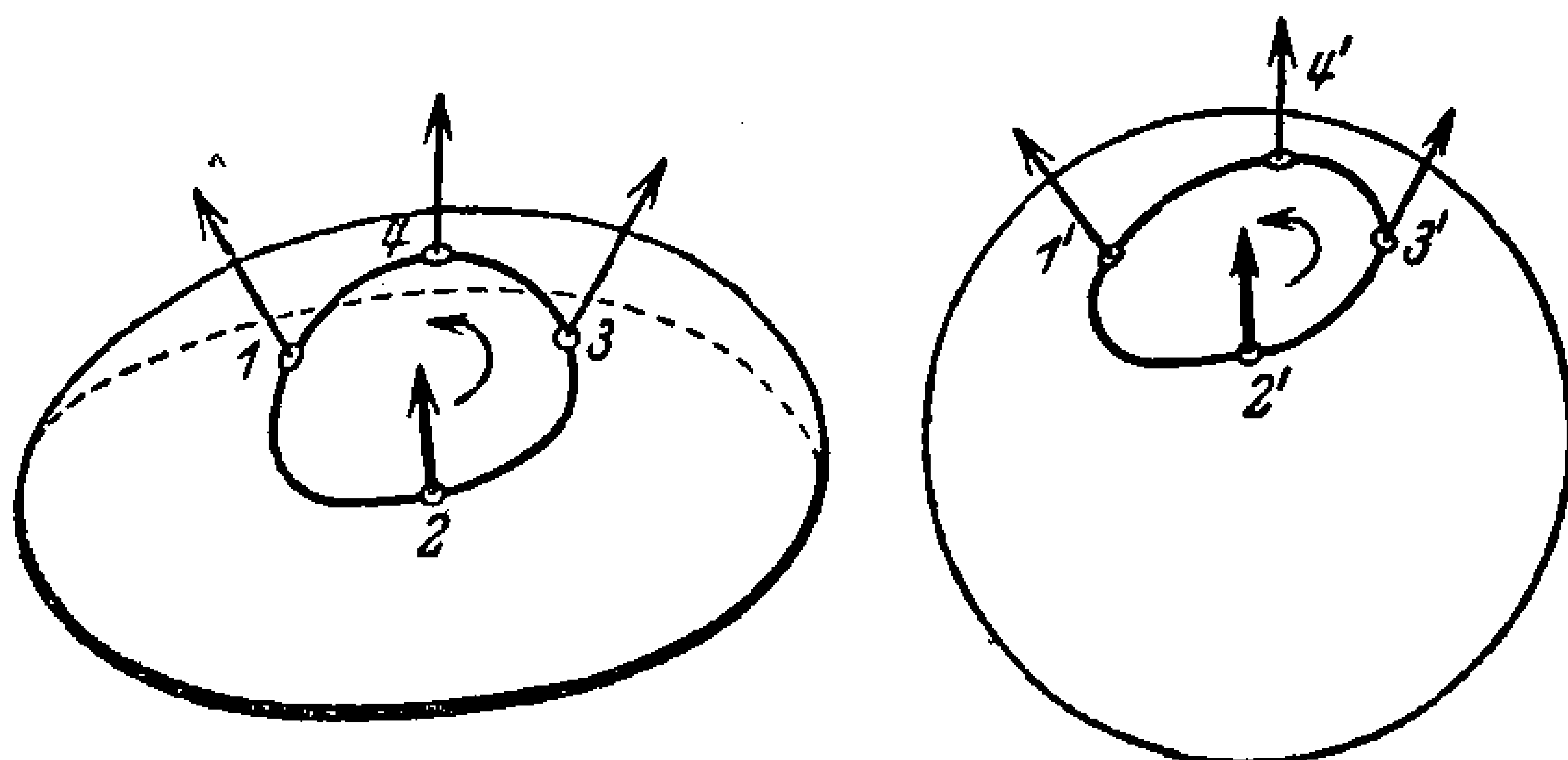


图 202

是双曲点沿一条沒有重点的小閉曲綫运动，其球面象也是沒有重点的閉曲綫，不过它的指向与原曲綫的相反（图 203）。在解析几何里，两片曲面面积有相同符号与否通常是按照它們的边緣曲綫

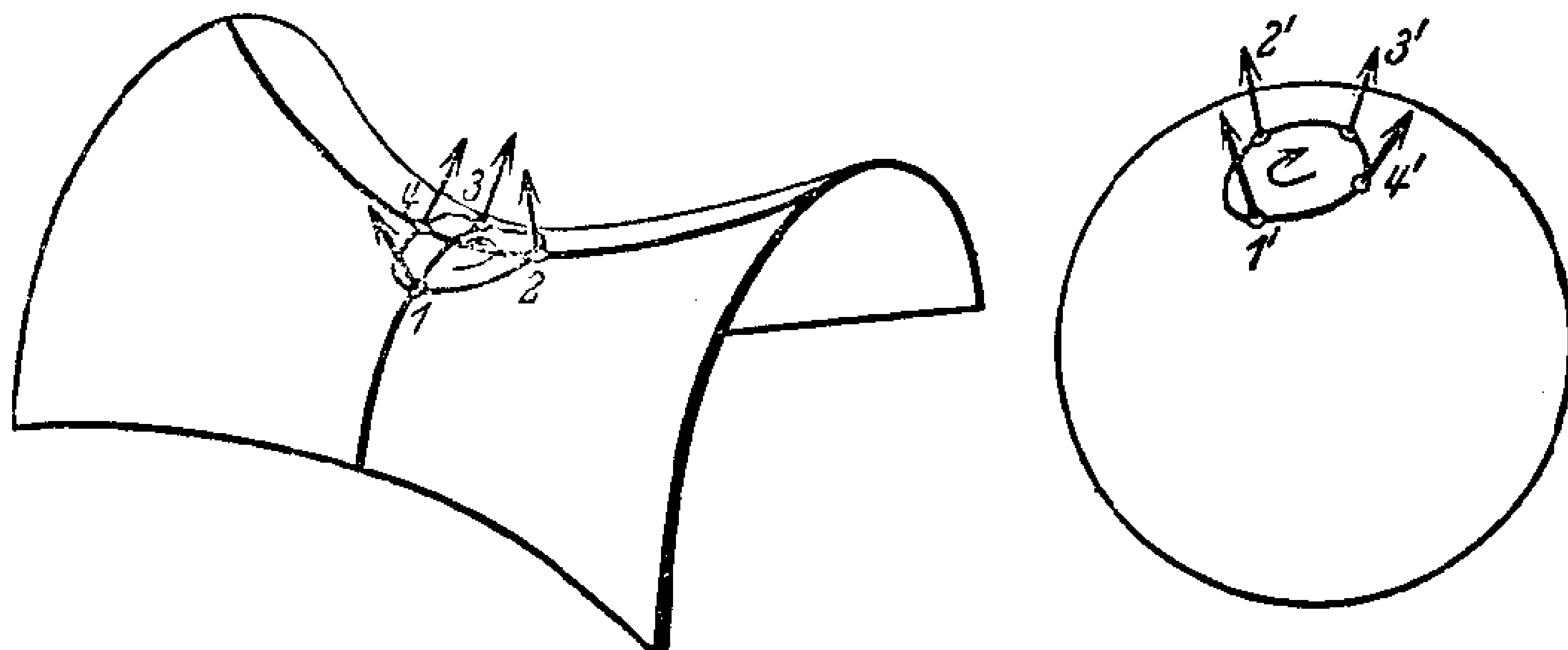


图 203

的指向相同或相反而定。遵循这个原則，在凸曲面上的高斯曲率就算作正的，在鞍面上的，算作負的。采用这种方法，跟用主曲率表示高斯曲率的方法，得出同样的符号。事实上，在橢圓点处两个主曲率中心都在法綫的同一射綫上；在双曲点处，則分別在法綫的两条射綫上。所以，如果一条射綫的方向认为是正的，其余一条，就該是負的。因此可知两个主曲率半徑之积——从而两个主曲率之积，即高斯曲率——在橢圓点处是正的，在双曲点处是負的。因为沒有重点的充分小的閉曲綫的象也沒有重点，所以一片充分小的、到处是杯形的曲面(叫做正曲率曲面)，或者到处是鞍形的曲面

(叫做負曲率曲面)，它們的球面表示必然是一对一的。

抛物点所占的地位在椭圓点和双曲点之間，因而我們可以預料到抛物点的高斯曲率等于零。引用抛物点的定义，立刻可以証实这句話。事实上，抛物点的特征(参看第 189 頁)乃是这点上的主曲率之一等于零，因此二主曲率之积，即高斯曲率，等于零。

平面是全部由抛物点組成的曲面。由于高斯曲率經弯曲不变，因此可知一張平坦的紙，永远不能貼合在正曲率的曲面上或負曲率的曲面上。如果勉强貼上去的話，那么不是把紙弄皺了，就是把紙撕破了。

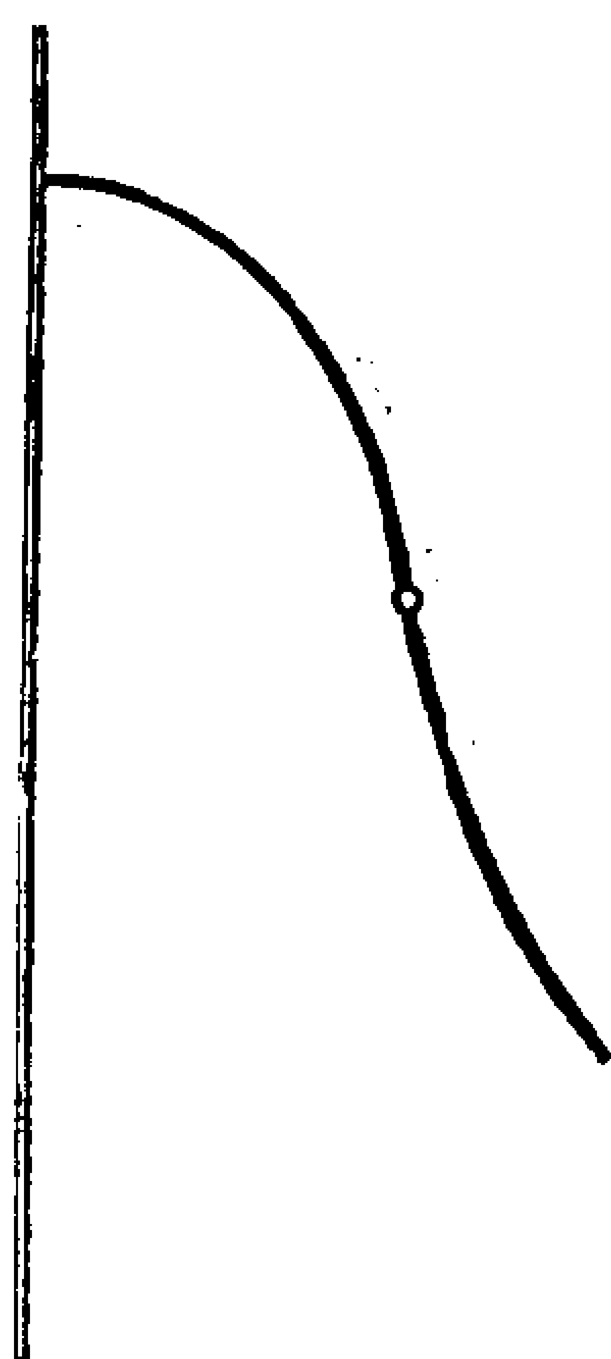


图 204

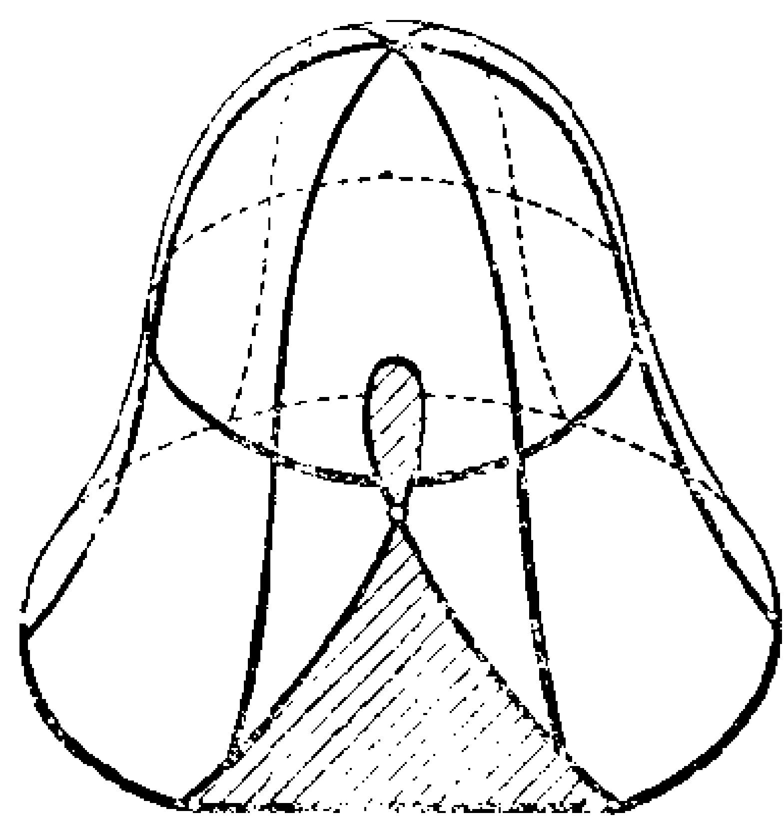
让我們再来考察不全由抛物点組成的曲面，并假定在給定的曲面上，旣有正的又有負的高斯曲率。因为曲面上高斯曲率的变化是連續的，所以在曲面上必有高斯曲率等于零的点，而且这些点一定构成一連續曲綫，它是正負高斯曲率的分界。这些由抛物点构成的曲綫，叫做曲面的**抛物曲綫**[1]。当然，曲面

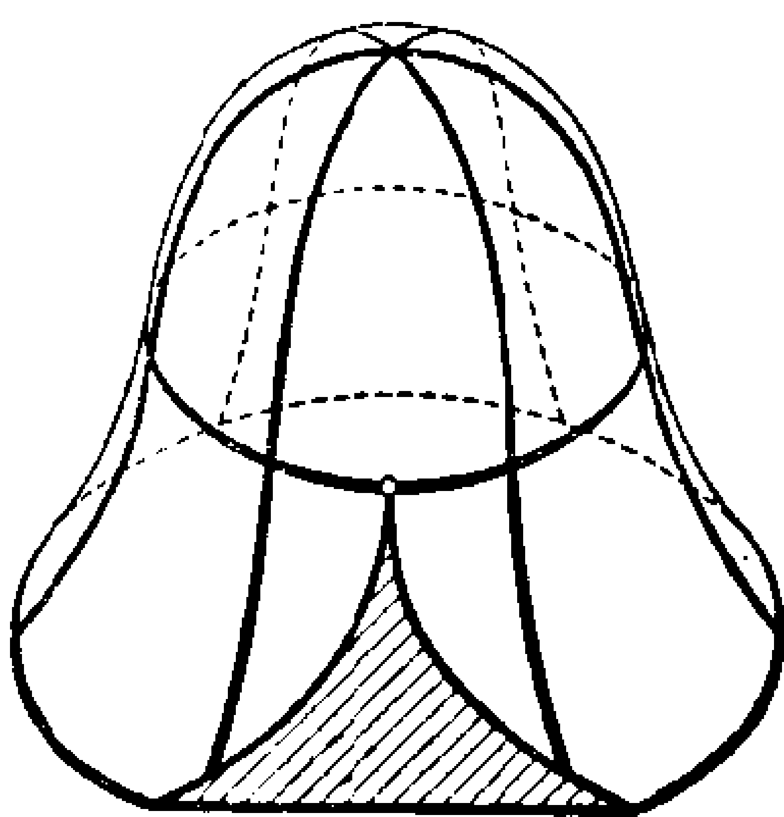
[1] 克来因曾用抛物曲綫作过独特的研究。为了試驗他所作的关于相貌的艺术美应依据某种数学上的关系的假說，他在著名的、富有高度古典美的貝尔維得的阿波罗神的塑象上标出所有的抛物曲綫。但是，那些曲綫旣沒有簡单的形狀，也沒有可以識別的一般規律(参看图 204)。

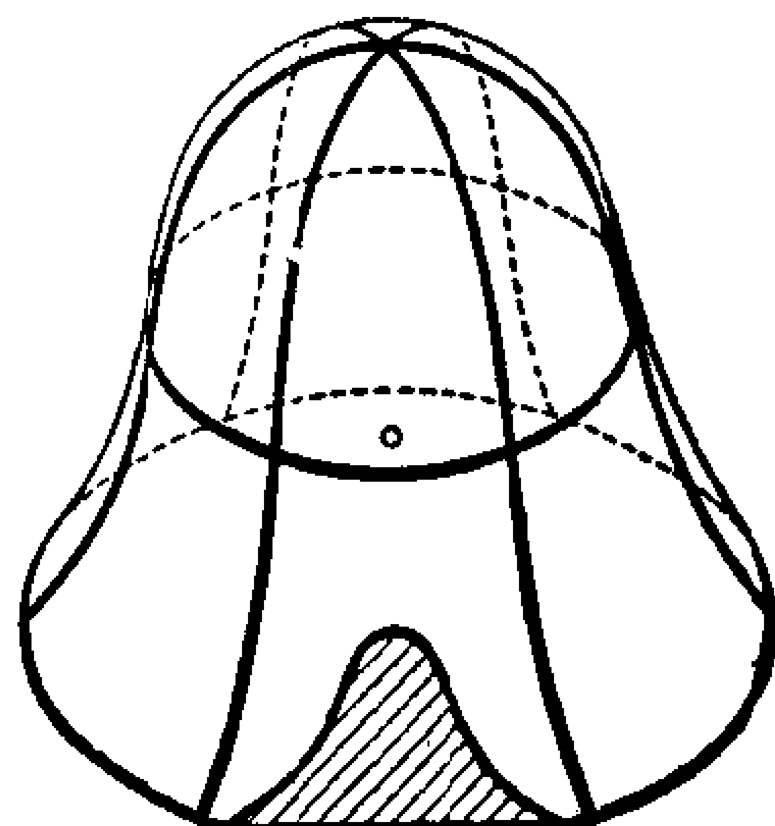
上只要有正負高斯曲率，拋物曲綫的存在是不可避免的。前此我們討論过的曲面，从来沒有一个适合这样条件的。只討論过在任何二阶曲面上，曲率或者到处是正的，例如椭球面；或者到处是負的，例如单叶双曲面；或者到处等于零，例如柱面和錐面。后两种曲面可用紙片做出。此外，在极小曲面上，沒有一点处的曲率是正的。


图 205

現在举几个具有拋物曲綫的曲面作例子，并試作出它們的球面象。一个非常簡单的例子是钟形(曲)面。钟形面是一条带有拐点的平面曲綫圍繞在曲綫平面上的一根軸旋轉而成的(图205)。今以竪綫为回轉軸，就图205看，拐点上部的曲綫产生所有点都是椭圓式的曲面，拐点下部的曲綫产生所有点都是双曲式的曲面。因此拐点本身产生的是钟形面的拋物曲綫，它是曲面上一个緯圓。这一点也可以由切面的性质得知。在双曲点处的切面与钟形面交于一条带有弧圈的曲綫，曲綫的二支都通过切点(图206)。当切点从下方趋近于拋物曲綫时，弧圈愈来愈小，同时交于切点的二支綫的夹角愈来愈尖銳。最后，当切点恰好移到拋物曲綫上时(图207)，弧圈縮为切点，而交綫在这点形成尖点。如果切点继續前移，移到曲面


图 206


图 207


图 208

的橢圓部分（图 208），則交綫变为位于切点的孤立点和具有連續曲率且完全位于曲面的双曲部分的曲綫。在第 178 頁上我們列举过平面曲綫的几种奇点，这里也算附带地給出了所列举的几类奇点的例子。

下面我們研究在由抛物点組成的緯圓邻近的那部分钟形面的球面象（图 209）。在抛物曲綫上任取一点，圍繞这一点作一小閉曲綫 *123456781*。設点 *1* 和 *5* 分别是这曲綫圍成的区域 F 的最高点和最低点。又設点 *3* 和 *7* 是这曲綫与抛物曲綫的交点。生成钟形的經綫，在拐点邻近有平行切綫（参看第178頁）。显然钟形面在相当的点有平行法綫，因此这些点有相同的球面象。这样对于貼近抛物曲綫而位于其上方的每一緯圓，应有貼近抛物曲綫而位于其下方的某一緯圓与之对应，它們在球面上的象相同。因此显然区域 F 的球面映射不是一对一的。

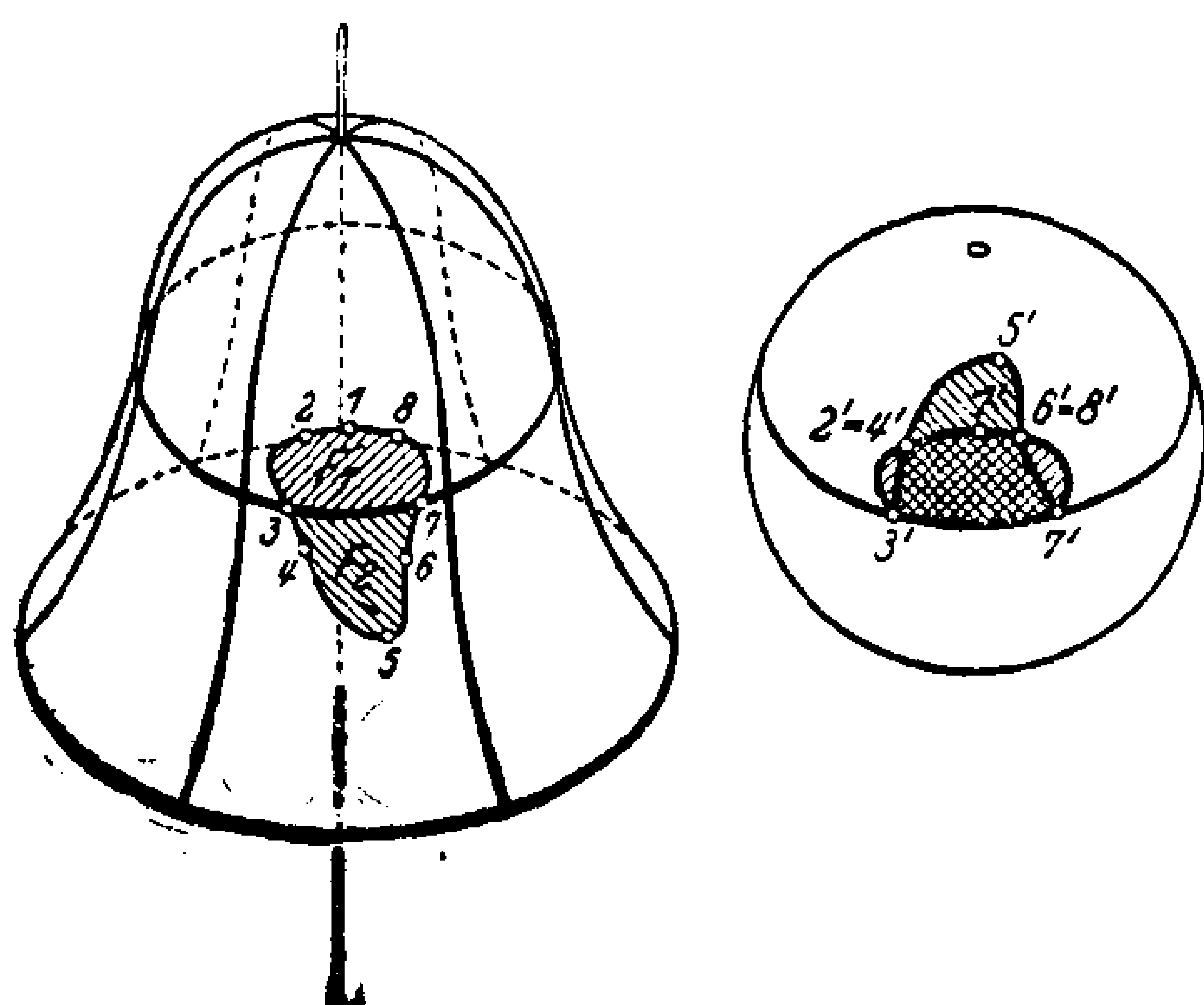


图 209

为了把这事說得更具体些，兹选擇 2, 4, 6, 8 諸点，使过 2, 4 两点的法綫平行，过 6, 8 两点的法綫平行。抛物曲綫划分 F 成两个区域 F_1 和 F_2，这两个区域的內部一个完全由橢圓点組成，一个完全由双曲点組成，因此它們都是一对一地映到球面上的两个区域。这两个区域的边緣是抛物曲綫，而抛物曲綫在球面上的象，显然是在水平平面上的圓。但是虽然 F_1 和 F_2 分列在抛物曲綫的两側，它們在球面上的象区域却都在象圓的上方，以象圓为边緣，因此象区域必有重合部分。F 的边緣映成曲綫 $1'2'3'4'5'6'7'8'1'$，它自交于

两点：$2'=4'$，$6'=8'$。

这样看来，钟形的球面象必然沿抛物曲綫的象折迭起来。其实沿曲面任何抛物綫(如果存在的話)的象的折迭現象乃是一般的現象。然而也有典型性的例外，今用第二个例子来說明。

在一直立的平面上作一圓，并作一不与該圓相交的直立軸。繞軸将該圓旋轉，得一回轉曲面，叫做环面(图 210)。圓周上的最高点 A 和最低点 B 划分此圓为两个半圓 I 和 II。显然由 I 生成的部分环面具有正的高斯曲率，由 II 生成的部分环面具有負的高斯曲率。这两部分的分界綫是点 A 和点 B 所描繪的圓。这两个圓是我們曲面的抛物曲綫。通过二圓之一的一点作环面的任一切面，必与环面交于通过切点的单支曲綫，因为很明显，这个切面沿整个圓周切于环面，不再与曲面交于別处。这样，我們已經找到了一个有关抛物点的例子，在这里切面与曲面的交綫沒有尖点。图 211 表示通过抛物曲綫邻近的一个双曲点的切面与环面的交綫。至于在橢圓点处

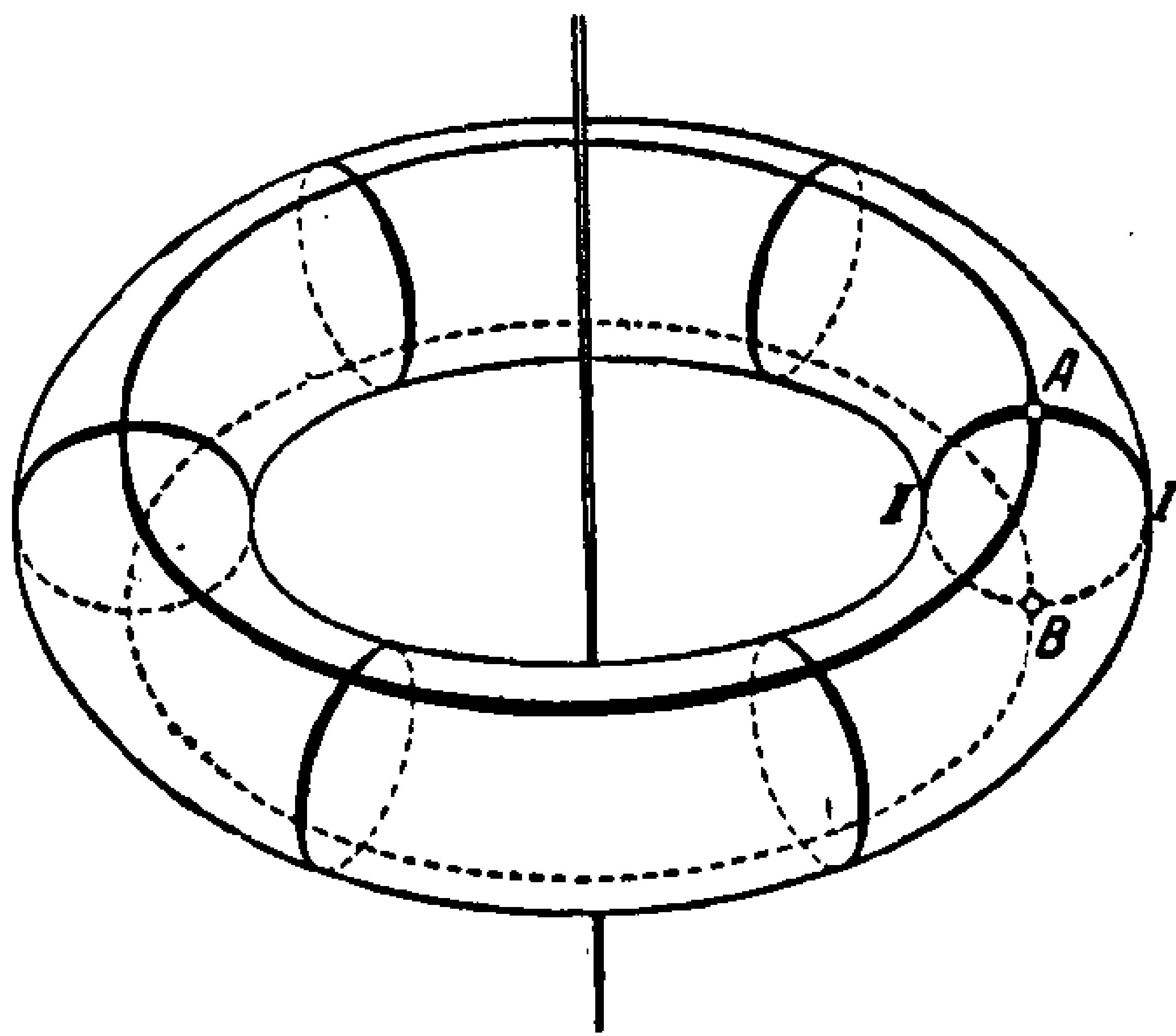
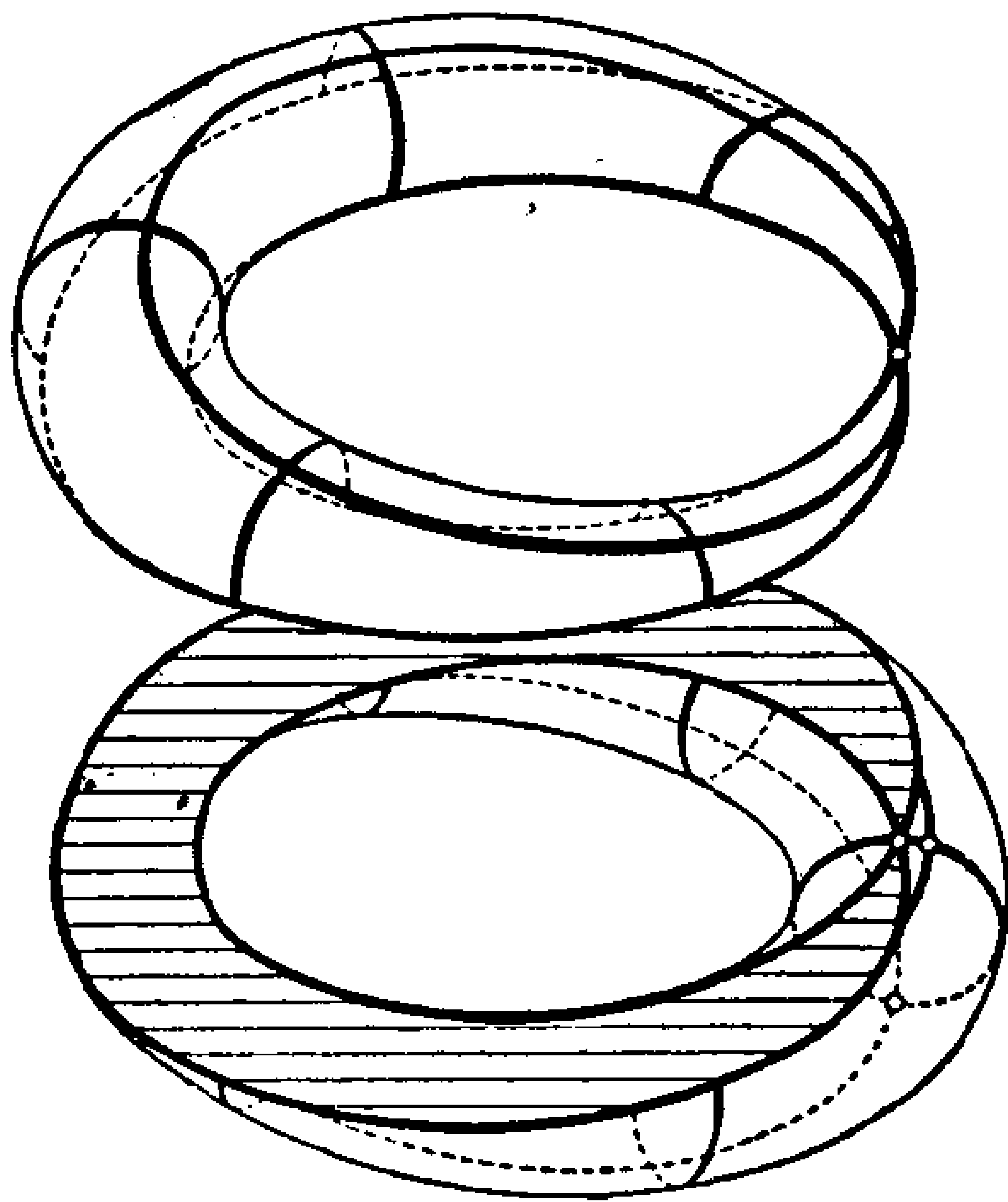


图 210


图 211

的切面，只有切点才是它与环面的公共点。

让我們来研究环面的球面象。在所有的法綫上我們选好方向，比方說朝外的方向。两个抛物圓上的所有法綫都平行，因此每个抛物圓映到球面上单独一个点，这两点就是球面的最高点和最低点。环面的橢圓部分沒有平行法綫。而且容易看出，它的象点恰好无空隙地复盖球面一次，但是最高和最低点例外。同样的話对于双曲部分也成立。由此可知，全环面的所有象点恰好复盖整个球面二次，但最高和最低点例外，并且两层点在这两个例外点处連在一起。为了看清楚两层点是如何連通的，我們也仿照上例的办法，圍繞抛物点作无重点的一条小閉曲綫 *12341*。在图 212 上画出的环面和球面是从上往下斜看的，原曲綫上的点和其象点的对应关系，从图上看一目了然，不必多說。至于球面象为什么呈 8 字形，这是由于橢圓部分的象保持原方向，但双曲部分的象反轉方向的原故。

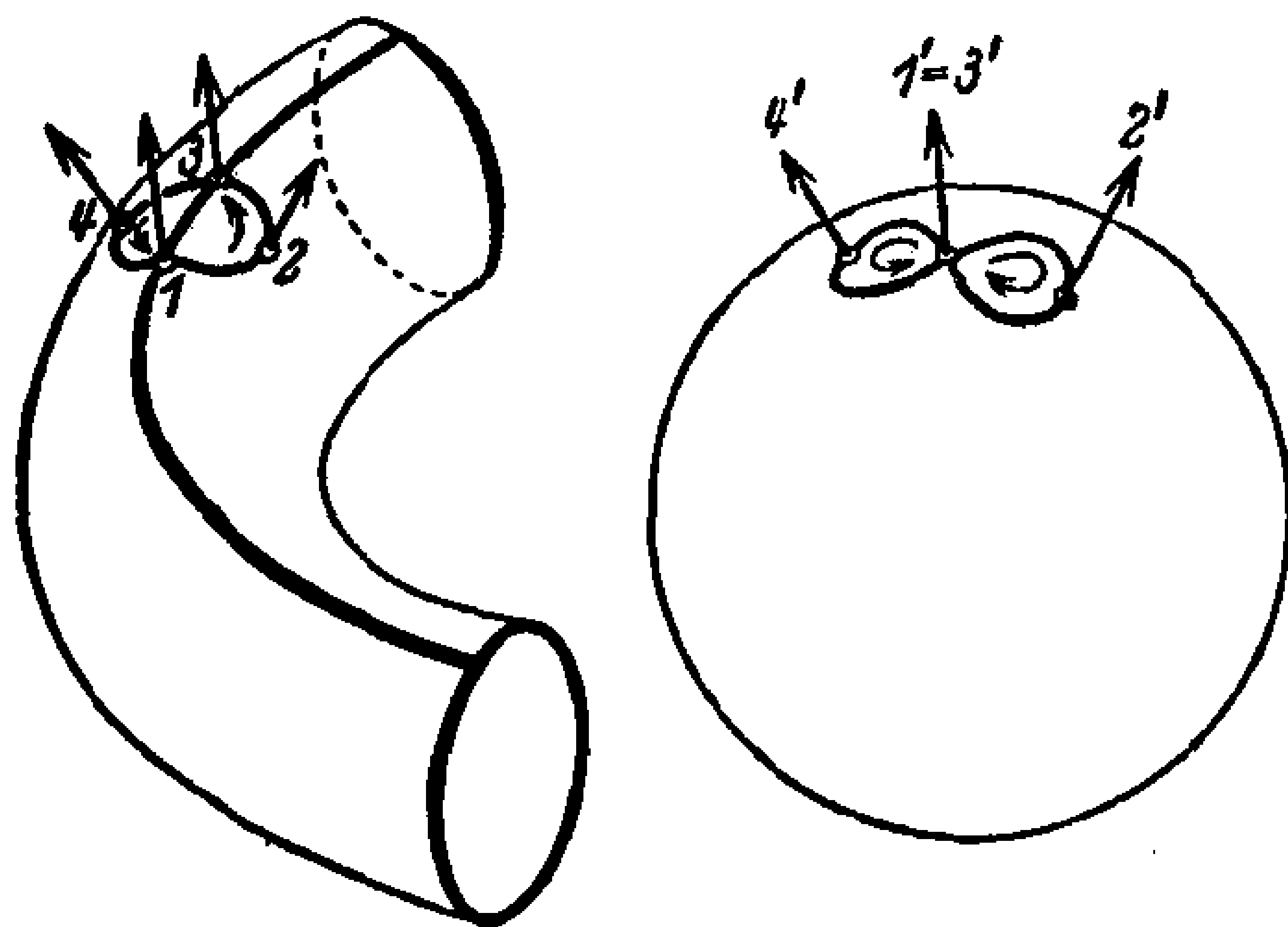


图 212

这个例子对于曲面沿整个曲綫（必然是抛物曲綫）和同一平面相切的情况来說是典型的。另一方面，钟形曲面說明了切面沿着抛物曲綫改变的情形。在这两个例子里，抛物曲綫都划分曲面为两个区域，一个是正高斯曲率的，一个是負高斯曲率的。

我們再考慮具有被負曲率区域包圍的孤立抛物点的曲面（图 213），作为最后一个例子。这是在第 194 頁上讲过的猴鞍面。显然，曲面上有平行法綫的那些点就是对于抛物点而言的对徑点。因此凡包圍抛物点而无重点的閉曲綫，它的球面象，便是圍繞抛物点

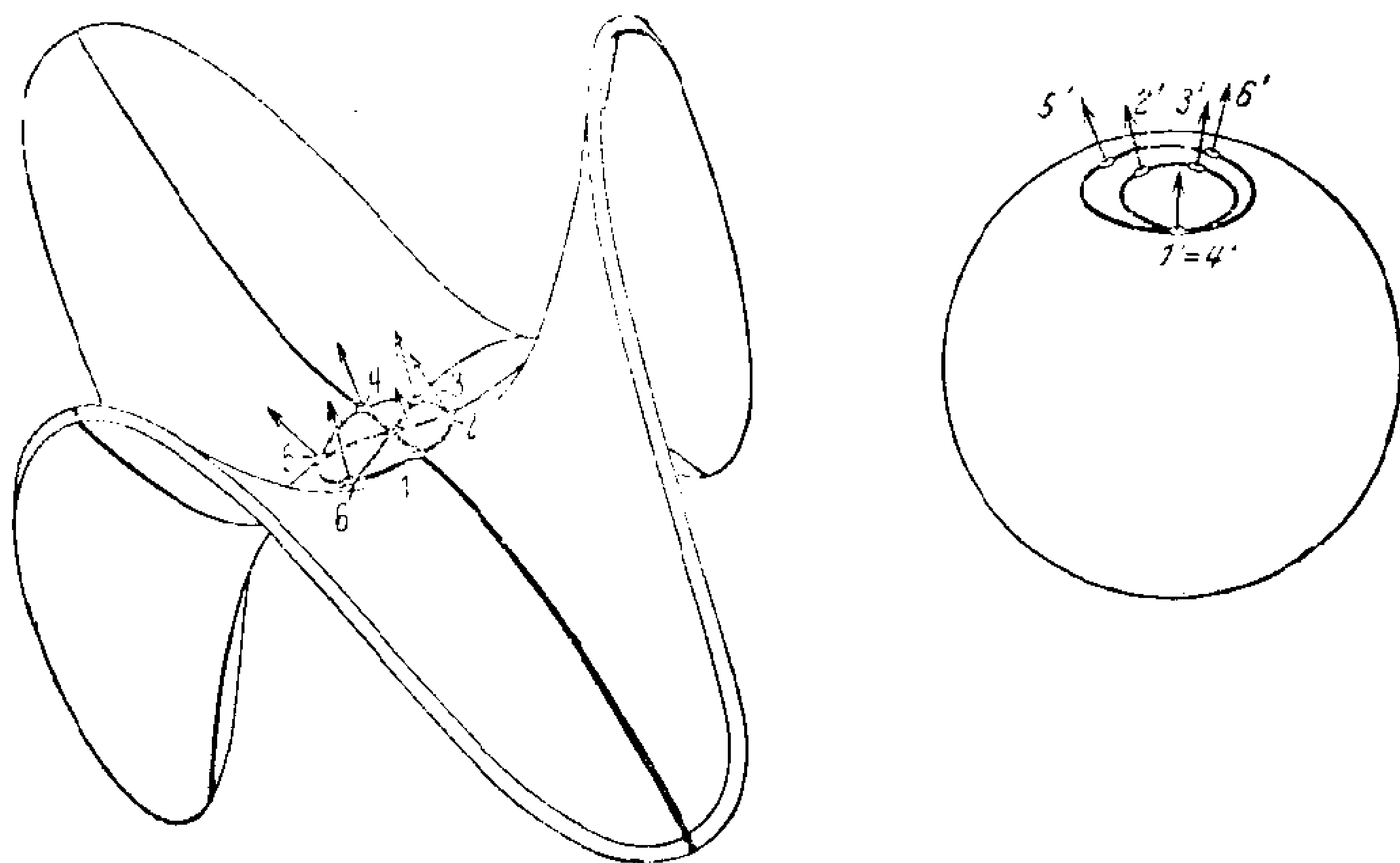


图 213

的象点两次的閉曲綫[①]。同样，显然也可以作一个以鞍面形为邻域的孤立抛物点，使得圍繞它的无重点的閉曲綫的球面象为圍繞象点三次、四次或任意多次的閉曲綫。另一方面，对于被正曲率区域包圍的孤立抛物点，可以证明，它的球面表示就象原曲面的曲率到处是正的，而抛物点不存在一样。

在結束本节之前，我們說說曲面的曲率綫和漸近綫在球面映射之下的性质。主方向的特征是它乃是平行于象方向的唯一方向。只有在臍点处这个准則不成立。这时每一方向都平行于其象方向。其次，我們要注意，在橢圓点的情况，或者两个主方向的指向跟其象方向一致，或者相反，这要看法綫的指向最初如何选擇而定。在双曲点的情况，一个主方向的指向跟其象一致，另一个相反。

这个准則告訴我們一个很簡单的办法去找任何回轉曲面的曲率綫。我們断言，回轉曲面的曲率綫就是它的經綫和緯綫，因为这

① 这样一来猴鞍面的球面象是带有支点的黎曼曲面，这支点代表抛物点(参看第 269 頁)。注意在图 213 中指向是反轉的。

些曲綫的球面象显然是球面上的經綫和緯綫，而且这些曲綫在每一点处的方向都与其球面象在对应点处的方向相同。由此可見，一个凸閉回轉曲面的两极，必然是臍点。

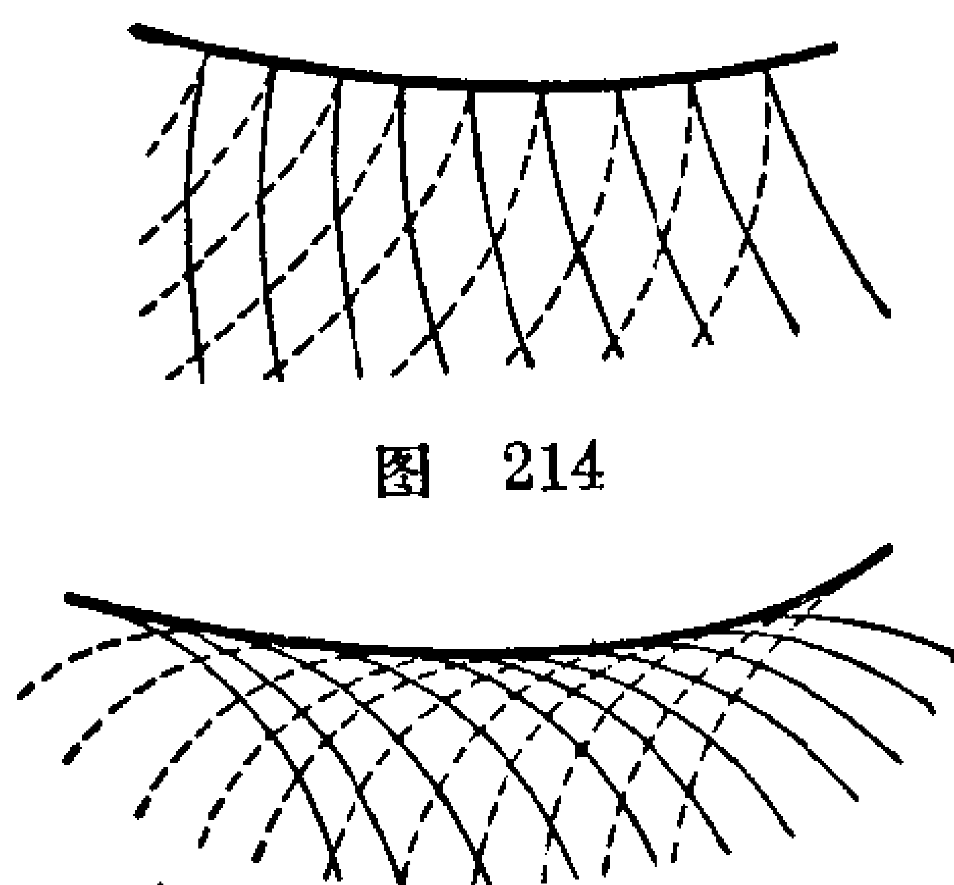


图 214

图 215

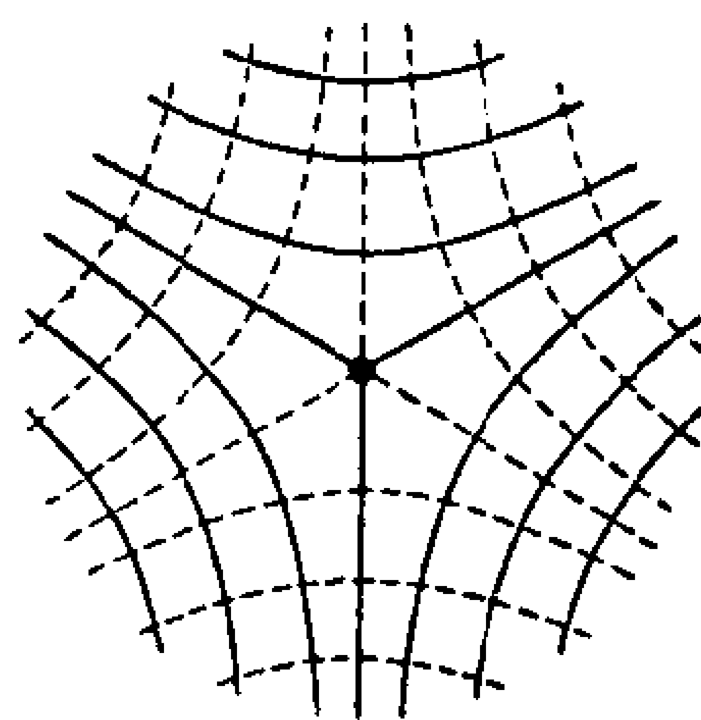


图 216

漸近綫的方向有一个不同的特征：它們垂直于其球面象，并且它們是具备这个性质的仅有的方向。为了得出象的方向，漸近綫須在切面上旋轉，这种旋轉的指向，对于两个漸近方向总是不同的：一个順时針，另一个反时針。这是因为負曲率曲面上的指向永远与其球面象上的指向相反的原故。

由于漸近綫只复盖曲面的双曲部分，因此它們在拋物曲綫的邻近必呈現奇性。如果沿拋物曲綫切面是变动的，比如象钟形面的情形，則諸漸近綫在拋物曲綫上有尖点(图 214)，但是如果在拋物曲綫上的所有点处都有同一切面，比如象环面的情形，則拋物曲綫包絡漸近綫，亦即拋物曲綫在每一点处与一条漸近綫相切(图 215)。在猴鞍面上漸近綫的形象如图 216 所示。如果圍繞猴鞍点的一条簡单閉曲綫在球面上的象轉了 $n-1$ 圈，則通过这个点的漸近綫恰好有 n 条。

§ 30. 可展曲面。直紋曲面

从前我們研究曲面上拋物点的时候，对于只由拋物点組成而

不含别类点的曲面略而不談。由于这类曲面特別重要，現在詳細研究之。

从前我們就遇到过这类曲面的例子，它們是由平面片弯曲而成的曲面。这里有一个一般性的定理：一片具有常数高斯曲率的曲面能够經弯曲而变为任何另一片具有相同常数高斯曲率的曲面。①

从这个定理可以推知，在每一点处曲率等于零的任何曲面片，能够經弯曲变为平面片。这正是为什么要把这一类的曲面叫做可展曲面的理由。

还有与第一种方法完全不同的另外两种求可展曲面的方法。首先，我們說由任何一个单参数平面族包絡的曲面都是可展曲面。变动着的平面与这样的曲面沿着一整条直綫相切，而这条直綫是作为二相邻平面的交綫的极限位置得到的。因为曲面在这条直綫上的所有点都有同一切面，所以这直綫是由曲面上的抛物点所組成的。又因为这些直綫的集合复盖整片曲面（由于这种原因所以称它們为曲面的母綫），因此曲面上的一切点都是抛物点。值得注意的是，这个定理的逆定理也眞：每一个可展曲面都可以用这种方法得出。由此可知，一切可展曲面是直紋面。②

因为三个平面总有一交点。③ 那么是不是由此可以推想，一个可展曲面的任意两条相邻母綫应該有一公共点呢？这个推想是对的，可以用解析方法来证明。利用上面的事实，我們得出作可展曲面的第三种方法。相继直綫的交点描繪一曲綫。从直观上看，我

① 对于高斯曲率为变数的曲面，不存在象这样簡单的充分条件，足以保证两片曲面能够經弯曲互变。必需的条件是二曲面在对应点处的高斯曲率相等。但是这个条件不是充分的，这可以从一些回轉曲面的反例立刻看出来。

② 不过在四維空間里，有的可展曲面并非直紋面（参考第四章附录2）。

③ 假定二平行平面看作是相交于无穷远直綫的平面。

們自然想到諸母綫不与这一空間曲綫相交，而与它相切，这一点确实可以证明。这样，我們可以規定可展曲面为任意空間曲綫的切綫所构成的曲面（这时可展曲面称为此曲綫的切綫曲面）。同时，这曲面也是曲綫的密切面族的包絡面。只有錐面和柱面不适用这种表示法。但前述方法显然仍能适用。

从第二种表示方法立刻可以找出所有可展曲面的球面象，但平面除外。因为可展曲面的包絡平面形成曲面的切面集合，因此所有的切面，以及所有切面的法綫，各形成只依賴于一个变参数的族。因此可展曲面的球面象永远是一曲綫；更精确地說，它是一条空間曲綫的副法綫象，此曲綫的切綫即形成所給可展曲面。至于曲率等于零的曲面的球面象之所以退化为曲綫，也可以从高斯曲率原来的定义推导出来，因为任何这样的曲面片的球面象，它所包圍的面积等于零。

让我們把任意空間曲綫的切綫曲面攤在平面上。于是空間曲綫变为平面曲綫，曲面的母綫变为平面曲綫的切綫，空間曲綫的任意一段弧对应平面曲綫的一段等长弧。除此之外，还可以证明，二曲綫在对应点处的曲率相同。①

反过来，如果从一段平面凸弧 s 出发，挖掉弧的凹側的部分平面，那么可把平面其余的部分弯曲，使得从 s 变成的空間曲綫在每一点的曲率都等于 s 在对应点的曲率。用解析方法可以证明，我們可以同时賦予所得空間曲綫以任何所希望的撓率。空間曲綫的这种变换，即弧长和第一曲率不变但撓率（第二曲率）有所改变的形变，簡称所論曲綫的扭轉（撓曲）。

在上述部分平面的弯曲过程中，所有切于 s 的直綫显然还是

① 这是很明显的。因为二切綫的夹角經弯曲不变，而曲率規定为这角与其对应弧之比的极限。

直綫，但所有其他直綫都变成了曲綫。[①] 不过应該指出，通过部分平面的弯曲，得不到从 s 产生的空間曲綫 t 的整个切綫曲面。因为这样作出的曲面，仅仅包含从 t 的切点出发的每条切綫的一支射綫。若将射綫延长使成为整条切綫，又得到第二曲面。这二曲面合在一起构成 t 的切綫曲面。它們相交于 t，沿 t 作成尖銳的棱，叫做曲綫的脊綫或尖棱（图 217）。如果把 t 連續扭轉使它仍变成 s，則这二曲面漸漸靠攏，直到最后它們合在一起作成 s 的平面。t 的整个切綫曲面可以这样得出：把具有曲綫 s 外側部分平面形状的两片紙片沿 s 縫合在一起，然后一面将 s 扭轉一面又把两片紙片拉开。在这个过程中重要的一点是 s 的曲率須处处不等于零。另一方面，如果曲綫 s 有一拐点，那末一般地在拐点处有四片切綫曲面相交，其中有两片沿 s 在拐点的切綫相連。

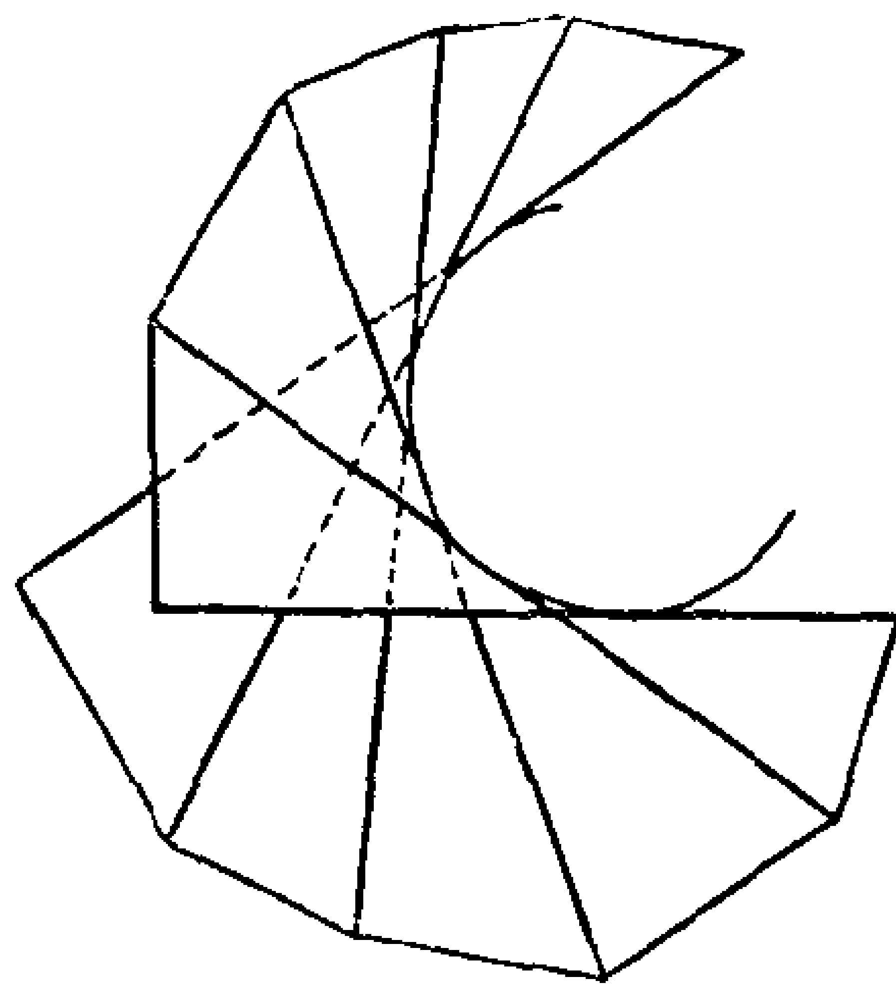


图 217

現在来研究不可展的直紋面。根据前面的討論，它們是那种直紋面，其上相邻两条母綫相互攲斜；因为，我們在以前看到过，曲面当且仅当相邻母綫相交的場合才是可展的。

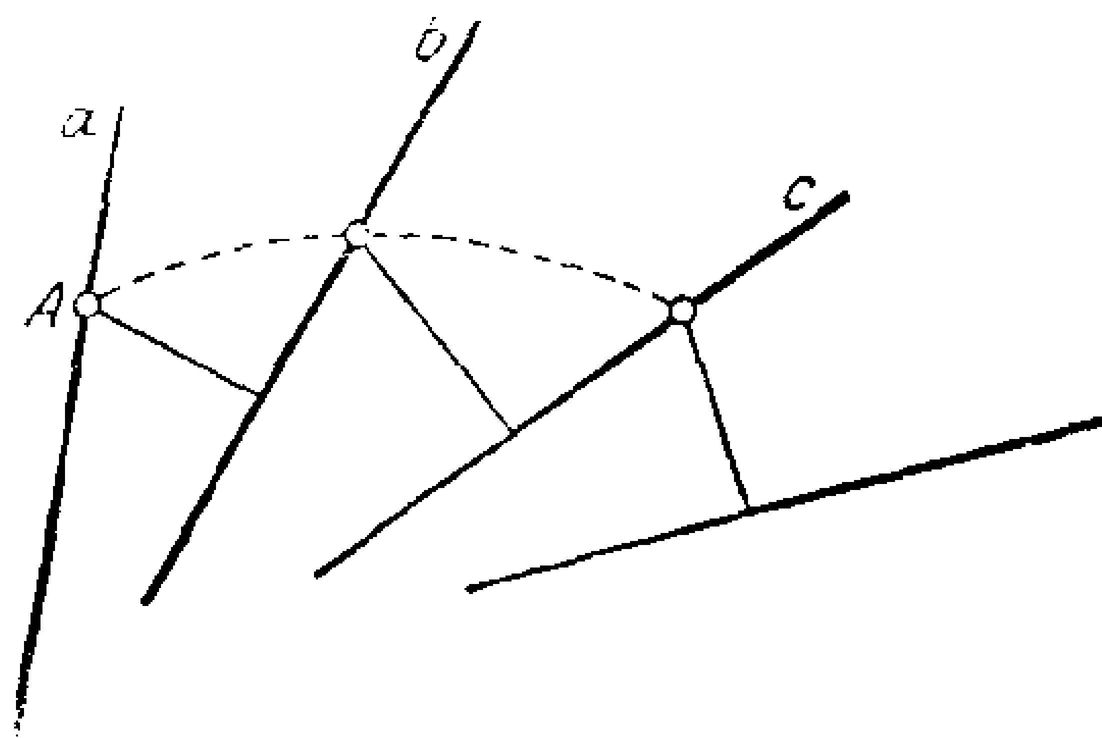


图 218

每一可展曲面有一条所謂脊綫的空間曲綫。我們可以把这个概念推广到其他的直紋面上，便得到所謂腰曲綫的概念。为了这个

① 若部分平面的弯曲是完全任意的，s 的曲率当然可以改变。要使 s 的曲率保持不变，必需和充分的条件是 s 的切綫仍为直綫。因此若是把一張紙剪成上述部分平面，并用細杆貼于紙上以增加切于 s 的射綫的强度，可得一有用的模型。

目的，我們从曲面的母綫族中选好两条母綫 a 和 b，并作它們的公共垂綫(图 218)。如所周知，这条垂綫是連結 a 和 b 的最短直綫。命 A 是公垂綫同 a 的交点。如让 b 历經母綫族中的直綫而趋近 a，則 A 将趋近一极限位置，叫做 a 的腰点(或名窄点)。腰点相当于可展曲面上相邻母綫交于脊綫上的点。

腰曲綫是当直綫 a 历經曲面的所有母綫时腰点的軌迹。不过若以为腰曲綫必然同所有的母綫正交，就錯誤了。因为設 a, b, c 是三条相邻母綫(图 218)，則 b 和 c 的公垂綫在 b 上的垂足，一般不是 a 和 b 的公垂綫在 b 上的垂足。由此可知，連結腰点的綫不一定同公垂綫有相同的方向，因之也就不一定同母綫正交。例如，在单叶回轉双曲面上，腰曲綫是赤道圓；很明显它不同任何母綫正交。

直紋面是单参数直綫流形。由于这个原故，直紋曲面同作为单参数点流形的空間曲綫有某些相似之处。例如，与曲率概念相当，可以引进直紋曲面的所謂窄度这个概念。直紋面的窄度是指二母綫的夹角除以二母綫的最短距离所得的商，当二母綫趋于同一位置时的极限(窄度的倒数叫做直紋面的分布参数)。

窄度表征切面沿直紋曲面母綫的变化。如果切点沿一母綫移动，显然切面只能繞母綫旋轉，因为它必須包含这条直綫。可以用解析方法证明，在母綫 a 上一点 P 的切面所取的位置由下面三个条件唯一决定：母綫 a 上腰点 A 处的切面的位置；距离 PA；母綫 a 上直紋母綫的窄度。切面的分布状况可描述如下：假如 P 在 a 上移动，順着一个方向从 A 到无穷远，则过点 P 的切面与过点 A 的切面之間的夹角逐渐增大，并且在极限时成为直角。在点 A 的其他一側，切面的性质相似，并且关于腰点对称。如果在点 A 的两側有两点 P 和 Q 与 A 的距离相等，則过 A 的切面必平分过 P 和 Q 的切面的夹角。

从此推出：如果二直紋面各在它們的某一母綫上有相同的窄度，便可以把这二曲面放在一起，使得二母綫重合，并使得二曲面沿这条共同母綫相切，要做到这一点，只須設法使二腰点本身重合以及过此二腰点的切面重合，可能还須再将二曲面之一繞另一曲面旋轉两个直角，但不改变腰点与过腰点的切面的重合关系即可。两片曲面可以如此合攏这件事在运动学中甚为重要(参看第284—285 頁)。

可展曲面可借助窄度这个概念分为几种类型。例如，柱面显然是窄度等于零的曲面，因为二相邻母綫的夹角等于零；另一方面，錐面与空間曲綫的切綫曲面的窄度是无穷大，因为二相邻母綫的距离等于零。

我們已經找到了可展曲面的球面象。对于窄度是有限数的直紋曲面而言，它們的球面象也有一个簡单的性质：在一已給的直紋母綫上的所有点的法綫都平行于一个定平面，即母綫的法面。因此我們看出：首先，一直紋母綫的球面象必然是一大圓的一弧；其次，当一点沿直紋母綫的两个方向之一从腰点走向无穷远时，这点处的法綫就随着連續轉动一直角。因此母綫的球面象是一半圓弧。半圓弧二端点对应母綫上的二无穷远点，并且腰点的象平分半圓弧。

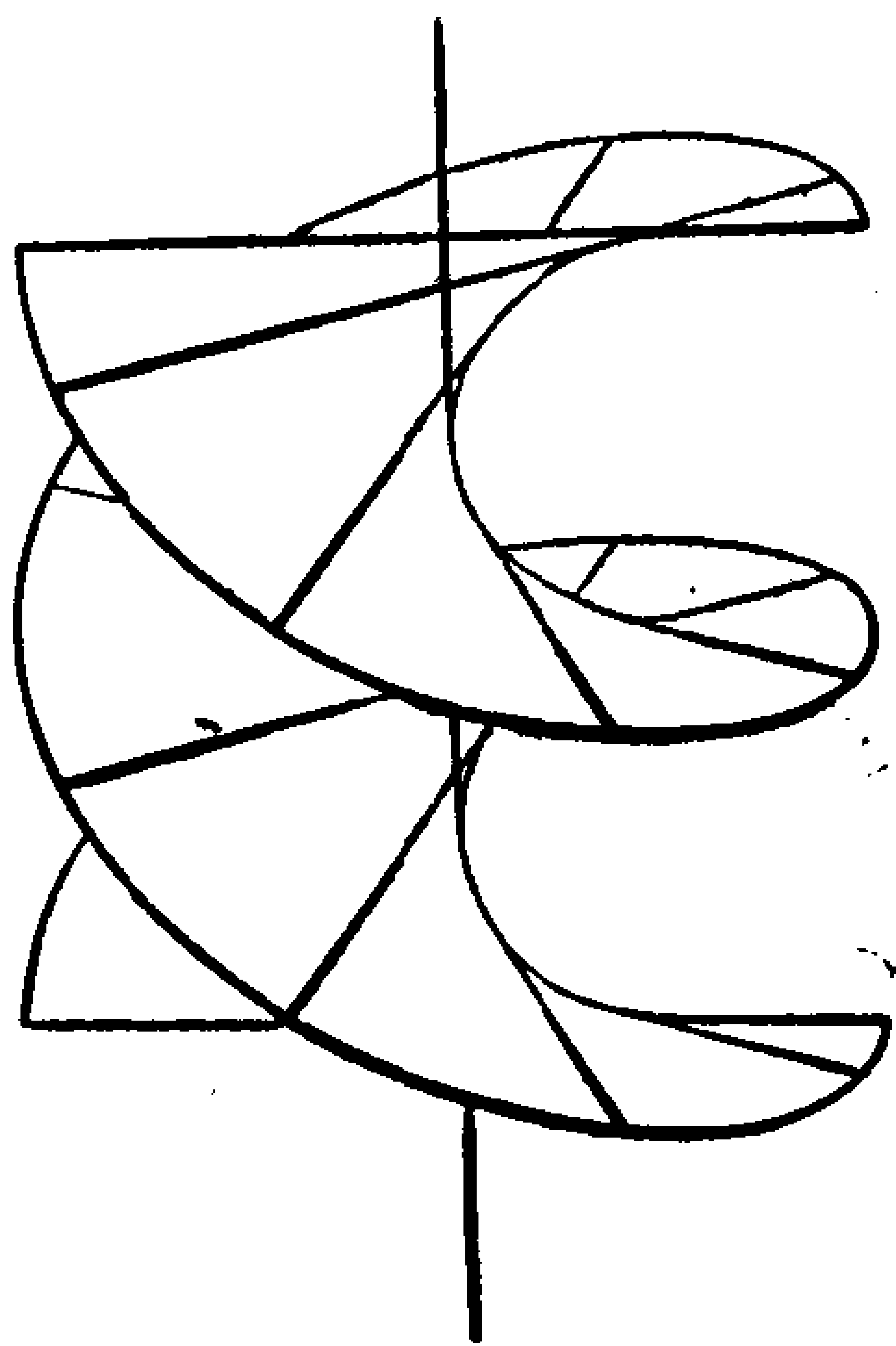


图 219

作为本节的結尾，我們来制造一个异常簡单的常数窄度直紋曲面（图 219)。我們自然要选擇与曲面的所有母綫都垂直的直綫作为腰曲綫。設 d 是曲面的(常数)窄度。設 a 和 b 是二母綫，它們的夹角是 α，并設 A 和 B

分别是腰曲綫与 a 和 b 的交点，則

$$\alpha = AB\cdot d.$$

由此可知，如果这个曲面以腰曲綫为軸作螺距为 $\frac{2\pi}{d}$ 的螺旋运动，則它将变換成它自己。基于这个性质，这样的曲面叫做**螺旋面**。最一般的螺旋面乃是任意空間曲綫圍繞一固定軸作匀速螺旋运动所扫过的曲面。这样說来，我們作得的特别直紋螺旋面是以与軸正交的直綫为母綫的。这个曲面叫做正螺旋面。

用解析方法可以证实正螺旋面是极小曲面(图 220 a)。在第 194 頁上我們曾經看見过一个极小曲面的例子——悬鏈面(图 220 b)。悬鏈面与正螺旋面之間有密切的关系：正螺旋面可以經过弯曲变成悬鏈面。办法是把螺旋面包裹悬鏈面无穷多次，正象用一平面包裹一圓柱的情形那样。这时腰曲綫必然复盖悬鏈面的赤道（即最小圓截口)，而母綫变为經綫①。

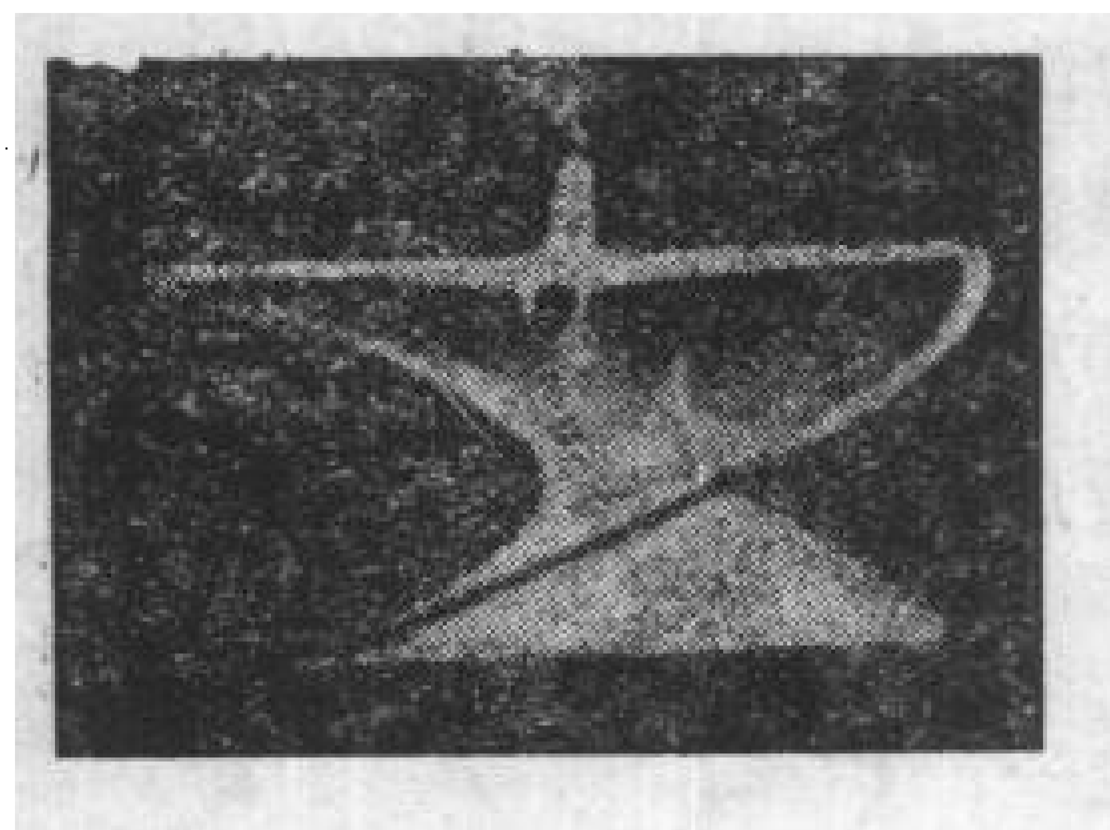


图　220 a

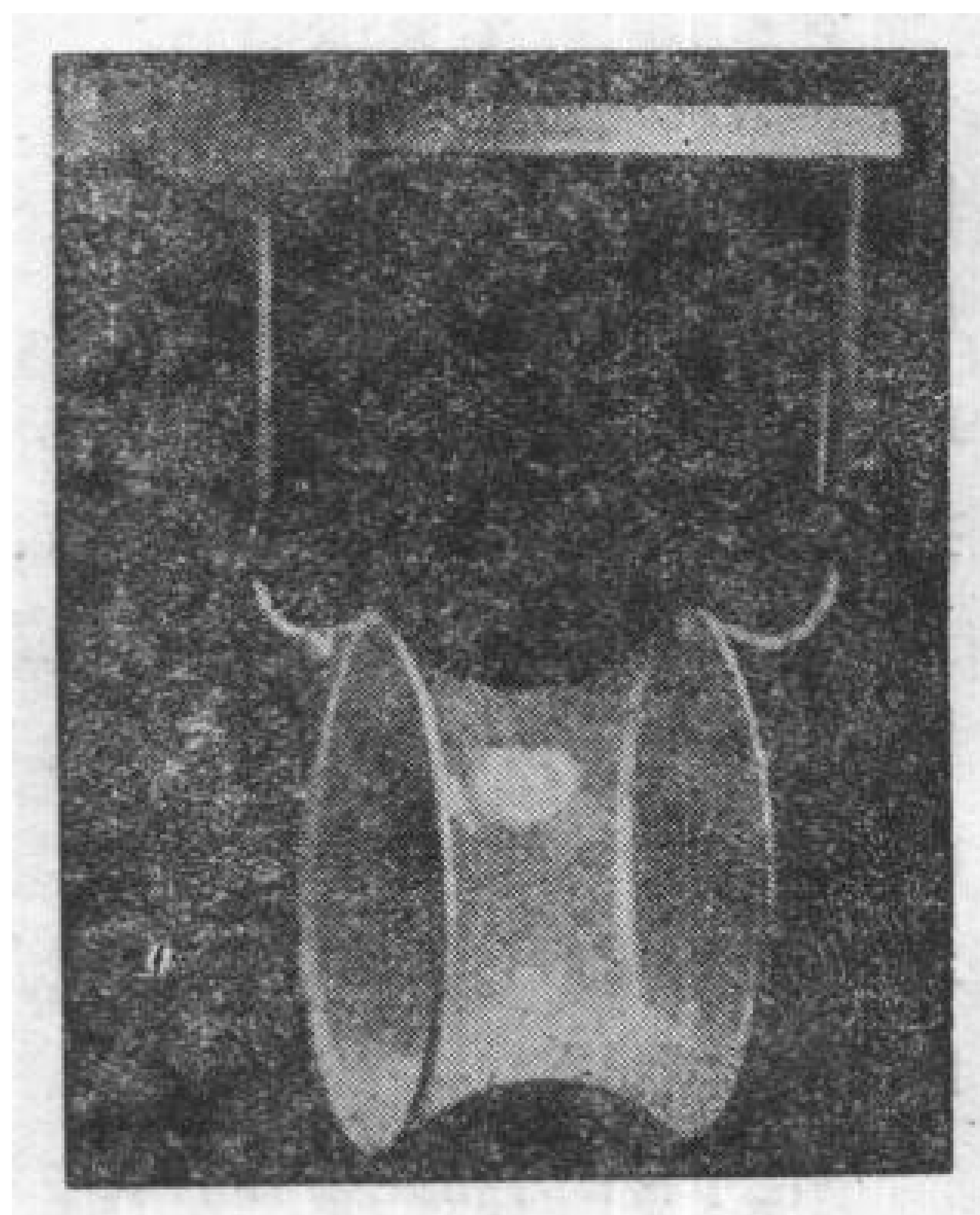


图　220 b

① 应該注意，螺旋面經过弯曲，它的軸不变成旋轉軸，但变成垂直于它的圓。这就是为什么在图 220 a 和 220 b 上螺旋面的軸取为鉛直的，而悬鏈面的軸取为水平的原故。

螺旋面的一般討論以及它們同回轉曲面的关系，容以后再讲。

§31. 空間曲綫的扭轉

可展曲面的理論告訴我們一个办法，用这个办法可以这样变换空間曲綫：保持曲綫的弧长和曲率不变，只改变其撓率。空間曲綫的这种形变叫做扭轉(撓曲)。其特别情形，每条空間曲綫 t 都可以經过扭轉而变为平面曲綫 s；s 的形状由 t 的形状唯一决定，因为 s 的曲率是弧长的已知函数，根据 §26，它完全决定了 s 的形状。s 和 t 有一个很突出的关系，正是下面所要讲的。

从短程曲率的理論——短程曲率的概念下面再讲——可得出以下要用的一个簡单不等式(参看图 221a 和 221b)：假定 t 在可展

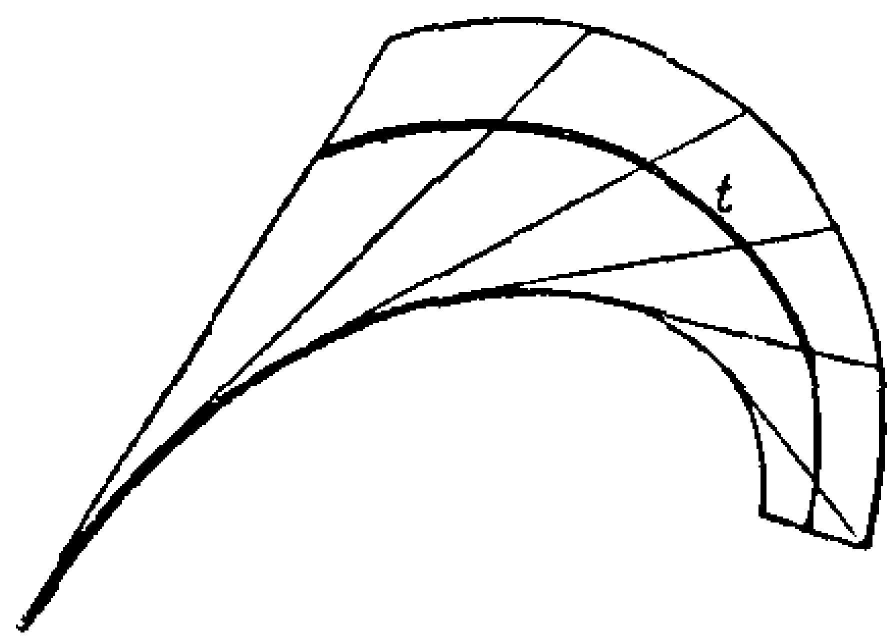


图 221 a

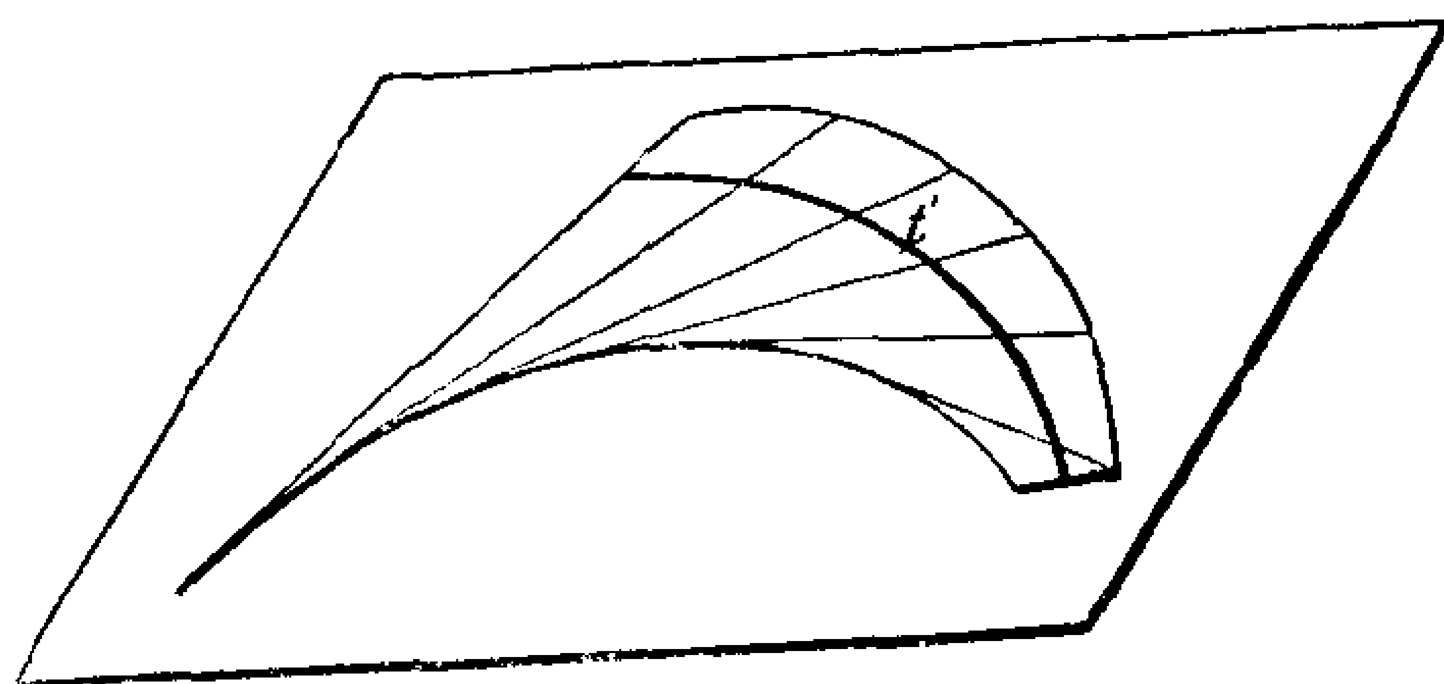


图 221 b

曲面上，又假定曲面在平面上攤平后 t 变为平面曲綫 t'，那么 t' 的曲率 k' 永远不会大于 t 在对应点的曲率 k。一般来讲，反而小了。事实上，假定 α 表示 t 的密切面和可展曲面相当的切面的夹角，则

$$k'=k\cos\alpha.$$

从这个引理可推得下面的别致的定理：一个凸的平面弧經过扭轉以后，所有的弦都变长了。

为了证明这个定理，我們考虑一凸的平面弧 s，其端点为 A, B (看图 222a)。假設 s 經过扭轉后成为空間曲綫 t，其端点为 C,

D。現在要证明直綫段 CD 大于綫段 AB。为此目的，我們作一个以 C 为頂点包含弧 t 的錐面（图 222b）并将此錐面在 s 的平面上攤平。于是 t 成为一条以 E，F（比如說）为端点的平面曲綫 t'（图 222c）。直綫段 CD 是在錐面一条母綫上的，所以把錐面攤成平面之后，它不但仍是直綫段，而且其长也不变。綫段 EF 和 CD 旣然相等，因此只要证明 EF 大于 AB 就够了。当然曲綫 s 和 t' 的长度是相等的，又由我們的引理知道，t' 上的每一点处的曲率必小于 t 的相当点处的曲率，因此也就小于 s 的曲率。所以 s 可以在保留 A 不动并使 s 的所有点处曲率减小而弧长不变的条件下变成 t'。因为 s 是凸曲綫，直观上容易知道，图 222 c 这样的形变将使 B 点离开 A 点更远些。用解析方法也不难证明这一点。这就完成

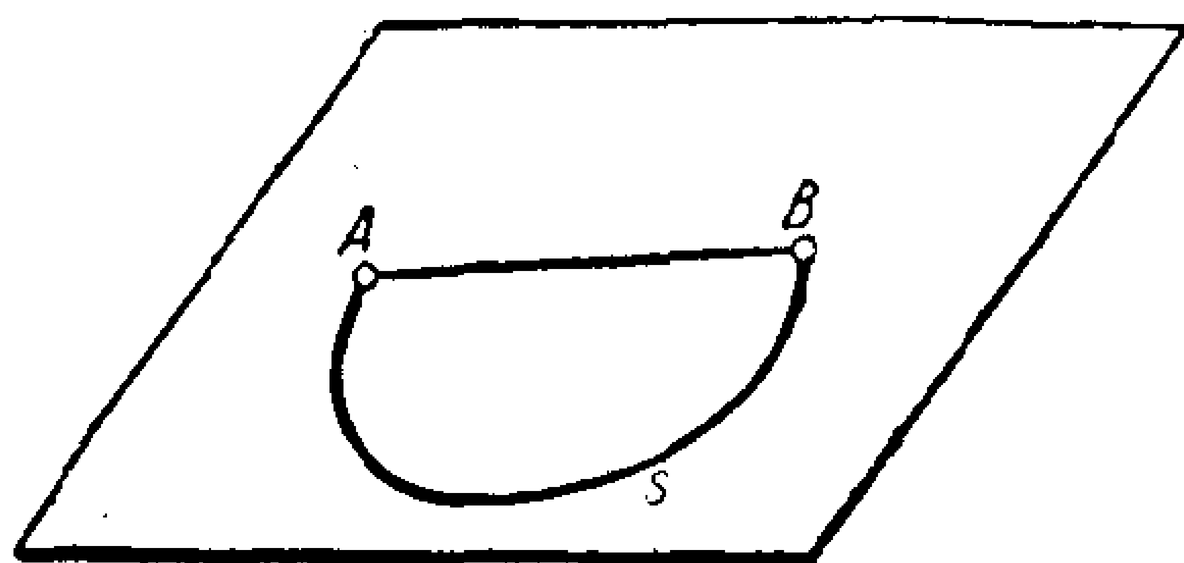


图 222 a



图 222 b

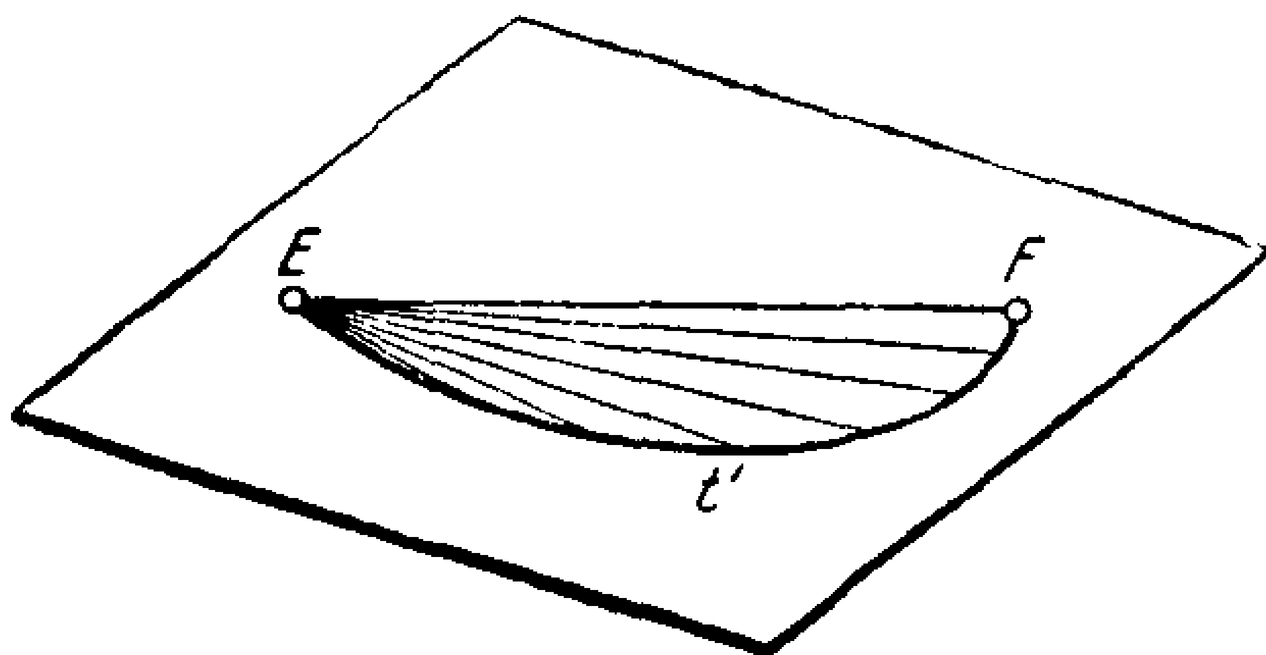


图 222 c

了不等式 $EF>AB$ 的证明，因而我們的断語也就证明了。

現在我們把上面的結果应用于由扭轉圓弧而得到的最簡单的曲綫——空間常数曲率曲綫。图形經过放大或縮小总可以使它的曲率值等于一，因此我們只考虑通过二固定点 A，B 且曲率等于一的所有空間曲綫的情况。为了保证确实有圓弧通过 A，B，我們假定

A, B 的距离小于 2。这样就足以保证通过 A, B 确有可能作单位圆了。A, B 两点划分圆周为二不等弧，今分别以 I, II 表之，其中的 I 表劣弧（图 223）。下面的事实虽然乍眼看来难以令人置信，但是毕竟是对的：劣弧 I 大于其族中一切邻弧，优弧 II 小于其族中一切邻弧；唯一的例外是繞 AB 旋轉 I 和 II 所得的一切弧，此时它們的弧长显然还是分別等于 I 和 II 的。因此，我們要解决的是把 I 和 II 經过扭轉而得的曲綫問題。

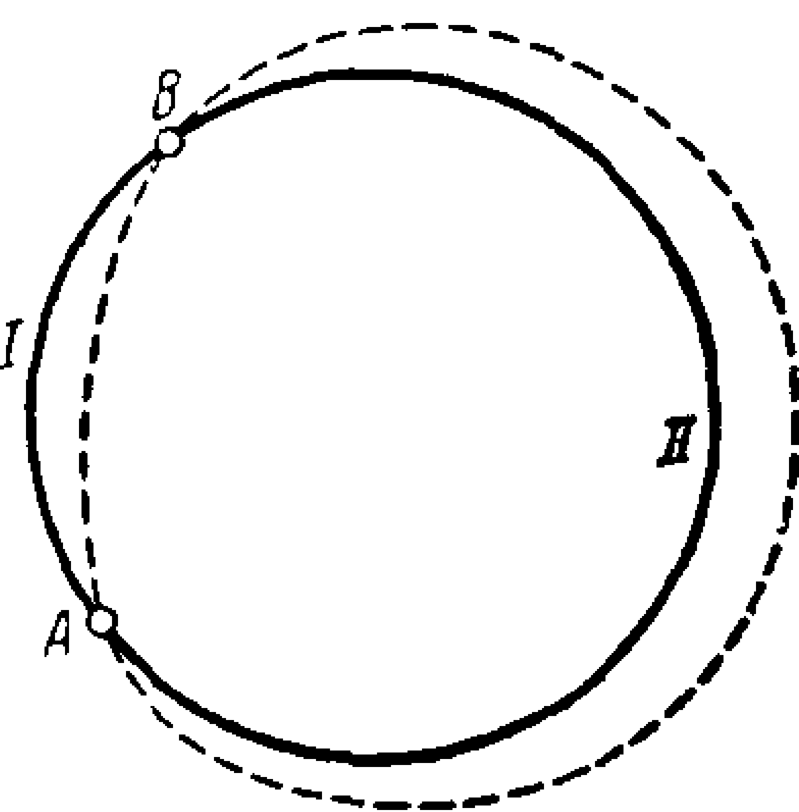


图 223

現在证明更一般的命題：如果連結 A, B 两点，常数曲率为一的空間曲綫的弧 t 不大于 II，它就小于 I。假定弧 t 經过扭轉变为圓弧 s，那么我們把 s 放在通过 A 和 B 的圓周上，使 s 的一端重合于 A（图 224）。則 s 的其他一端将重合于圓周上的某一点 B'。按照刚才证过的定理，弦 AB' 一定小于弦 AB。但弧 t 的长必須等于被弦 AB' 所划分的二圓弧之一。其中的一圓弧大于 II，因此根据假設应該除掉。所以 t 等于另一圓弧，因而小于 I。

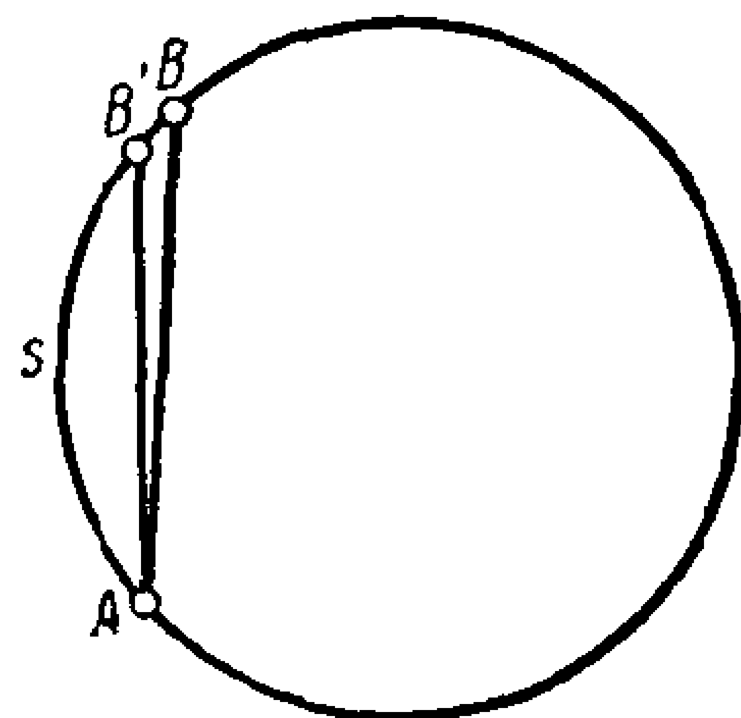


图 224

由此看来，我們证明了沒有一条連結 A, B 两点、曲率等于一同时弧长在 I 和 II 之間的空間曲綫。試問对这样曲綫的弧长是否还有別的限制？

首先，不难知道，弧可以任意地长。因为，常数曲率曲綫包括圓柱螺旋綫作为特例（参看第 186 頁）。这样螺旋綫的螺距可以取得任意地短。因此在两点 A, B 的一段距离中，螺旋綫的轉数可以任意加多。但是对于充分小的螺距，曲率等于一的螺旋綫的每轉的长将近似地等于单位圓的圓周长。因此很显然，連接 A 和 B 的曲綫，其弧长的确可以任意地长（参看图 225）。

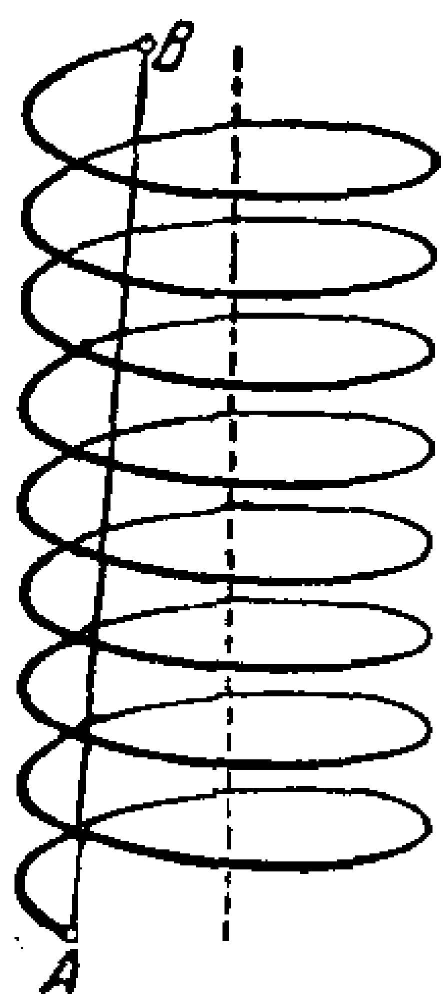


图 225

另一方面,这样的弧不能无限制地短,因为它的长必須超过直綫綫段 AB,不过可以使之与这个下界任意地接近。因为如果我們取螺距非常大的单位曲率的螺旋綫,則螺旋綫的切綫将几乎平行于其軸,同时从軸到螺旋綫的距离可取成任意地小。这样一来,这种螺旋綫的弧就可以取成与其弦任意地接近(参看图 226),于是我們的断語证明了。由此看来,連結两个定点的最短单位曲率曲綫問題是沒有解的。我們前面看見过,通过一个外表上相像的极小条件可以刻划极小曲面。相仿地,黎曼指出,函数論里某些重要的定理可以归結到极小性质。現在的例子表明,每个极小問題有解的假定,虽然好像是显而易見,但是在某些情况下是不正确的,因此需要对每个具体情况加以驗证。在今天,证明这类的存在問題,是数学分析上最麻煩的問題(参看 § 38, 39)。

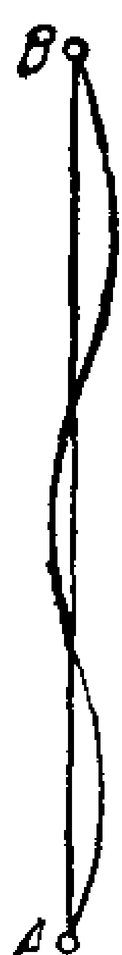


图 226

这里有一个很簡单的例子,說明沒有解的极小問題。問題是:試用最短曲綫連結 A, B 两点,要求曲綫和直綫 AB 在 A 作成直角。这里,也同前面一样,我們可以任意接近綫段 AB,但是不能达到它,因为綫段本身不适合我們的条件(图 227)。

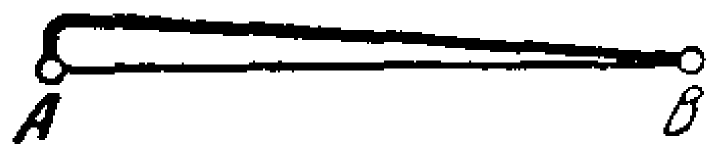


图 227

最后,我們提一提一个极小問題,对于它的解是否存在,有过長时間的爭論。問題是:将一根棍子 AB 在平面上移动,使得結果是經过二直角的轉动,要求在轉动过程中棍子扫过的面积为最小。这个問題直到最近才被貝西科維奇(Besicovitch)证明为无解(参考 Math. Zeitschrift, 第 27 期, 1928)。用一种鋸齿状的运动可使扫过的面积随意地小(参看第 279 頁)。

§32. 球面的十一个性質

我們已經熟悉了不少高斯曲率等于零的曲面。現在来考察正或負常数曲率的曲面。在这一类曲面里以球面为最簡单而又最重要。关于球可讲的材料很多，若深入研究，可写成一本专书。下面这里我們仅挑选直观性特强的十一个性质来讲讲。在讲解的过程中，我們同时熟悉一些新的概念；这些概念，不仅对于球面的几何学是重要的，对于曲面的一般理論，也是重要的。在說到球面的每个性质时，我們要追問：它所决定的球面是唯一的呢，或者还有其他的曲面，也具有所論性质？

1. 球面上各点到一定点等远。又，球面上各点同二定点距离之比是一常数。

第一个性质是球面的初等定义，因此这个定义唯一决定球面。至于第二个性质最容易用解析方法证明。此外，第二个性质不仅可以决定球面，也可以决定平面。事实上，当且仅当常数比等于1的时候才是平面。这平面是二定点的对称平面。

2. 球面的廓緣和平面截口是圓。

在研究二阶曲面时，我們讲过这样的定理：二阶曲面的所有平面截口和廓緣是二阶曲綫。在球面的情形，所有的二阶曲綫是圓。这个性质唯一地决定了球面。因而，从月蝕的阴影永远是圓形这个观察結果，就可以推知地球是球形的。

3. 球面有常宽幷有常廓。

常宽这个术語意指一个立体有这样的性质：在任何两个平行切面之間的距离是常数。这样，一个球就可以在二平行切面間自由滚动。或許有人认为球面被这个性质唯一决定。但是，事实上有許許多多的凸閉曲面，其中有的幷无奇性，它們也是有常宽的，因此它們也可以在切于曲面的二固定平行面之間自由滚动。图

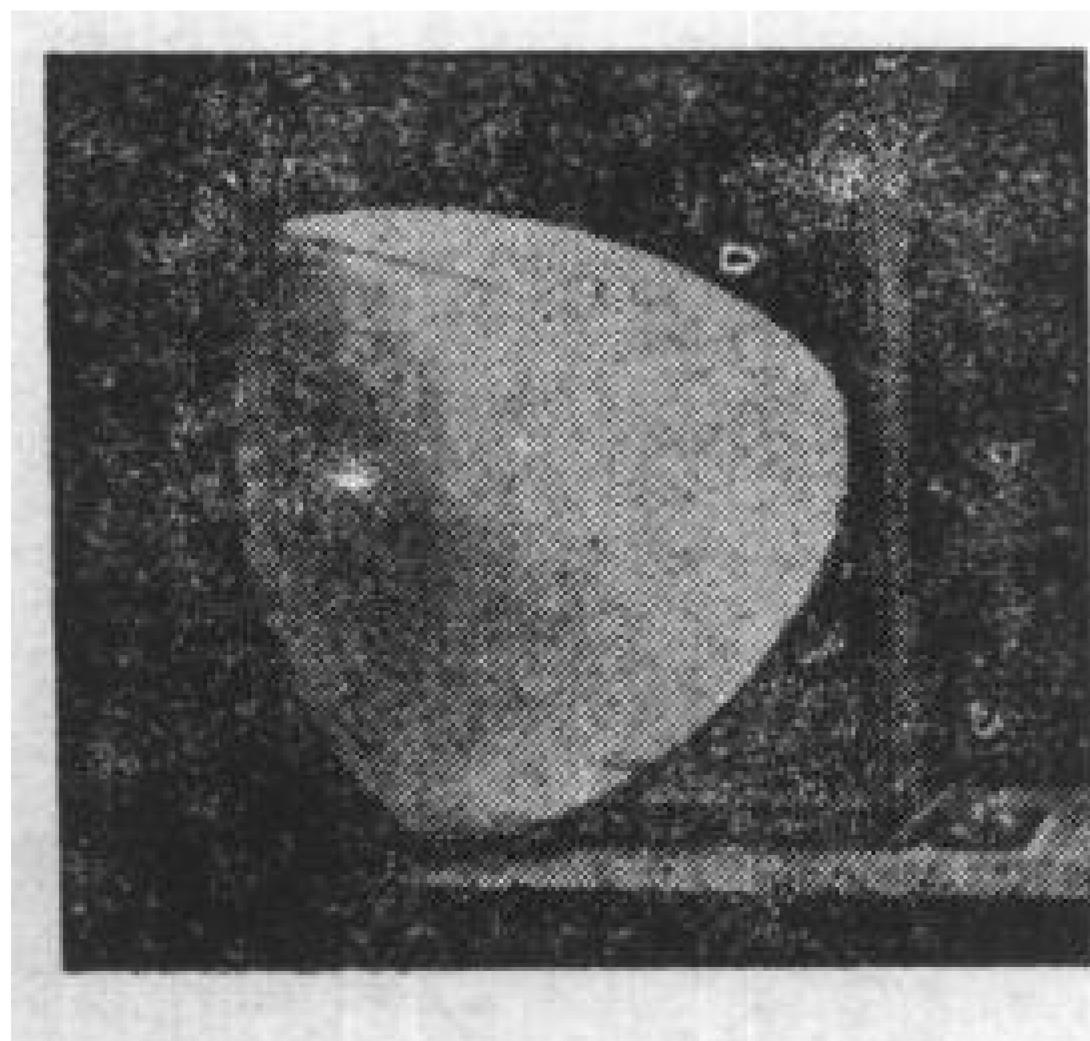


图　228 *a*

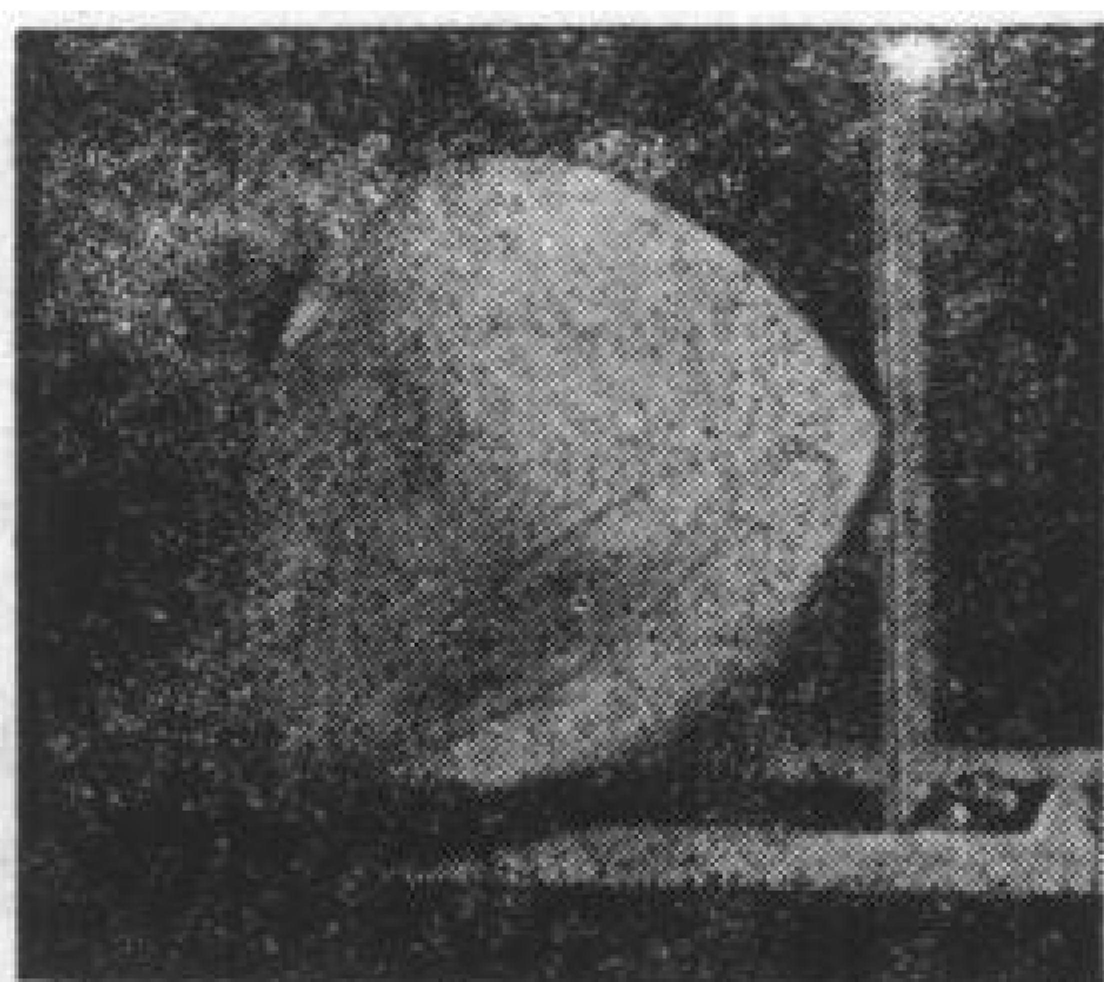


图　228 *b*

228表示这样的一种曲面的两个不同的位置。

常宽这个概念也适用于曲綫。一条平面凸閉曲綫如果介于任意二平行切綫間的距离相等，就說它有常宽。圓是具有这个性质的曲綫，但这个性质并非圓所独有。一个具有常宽的凸閉曲綫，被介于二平行切綫之間的二切点分为二弧，其中的一弧可以随意选取，于是总能唯一地决定其余的一弧，使常宽条件对整个曲綫适合。这一点只要指点一下就能使人相信得过了。事实上，給定弧的諸切綫唯一决定第二弧的諸切綫，因为在一定側以一定距离作已給切綫的平行綫，就得到第二弧的切綫。由此可知，第二弧无非是这一直綫族的包絡。

具有常宽的立体显然可以由这个性质来刻划：在平行正投影之下，立体的所有廓圍是有同一常宽的曲綫。这里有一个定理：一切具有同一常宽的曲綫，其周长相等。又因为一个立体的廓圍，按定义是它的平行正投影之一的周长，因此根据上面的定理，可知具有常宽的立体同时也有常廓。所以如把任何有常宽的立体紧紧裹在紙做的圓筒內，它还能够随便滚来滚去而不会变得松动了，也不会把圓筒挤破。

反过来，明科夫斯基证明了所有有常廓的凸曲面也是有常宽

的。因此这两个性质互相蕴含①。

4. 球面上所有的点都是臍点。

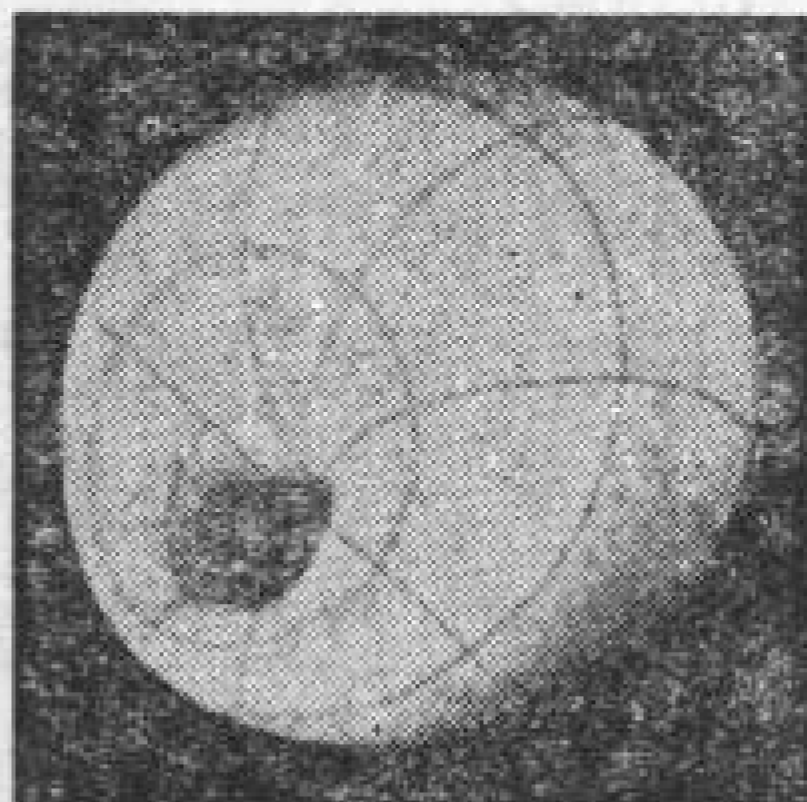
我們从前提过这个性质，并且指出了这个性质除球面外，只有平面才有(参看第 190 頁)，一种判定球面上的所有点都是臍点的办法是根据球面的任一平面截口都是圓这个事实。将一个与球面相交的平面移动，移动时保持平面与原位置平行，一直到平面与球面相切于一点 P 为止；于是我們看到在点 P 的杜潘标綫是一圓(参看第 195 頁)。因此 P 是一臍点。

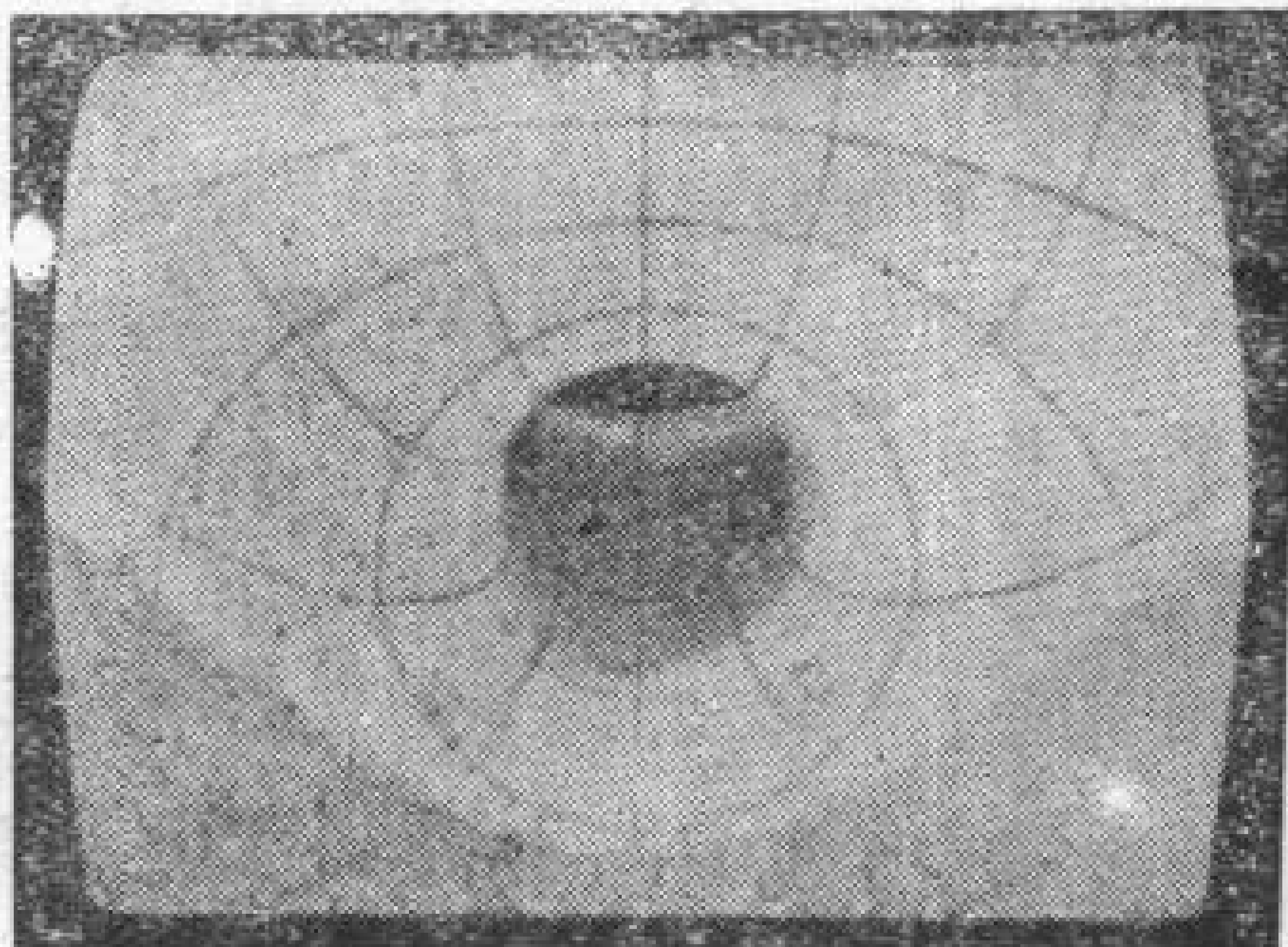
5. 球面沒有焦曲面(中心曲面)

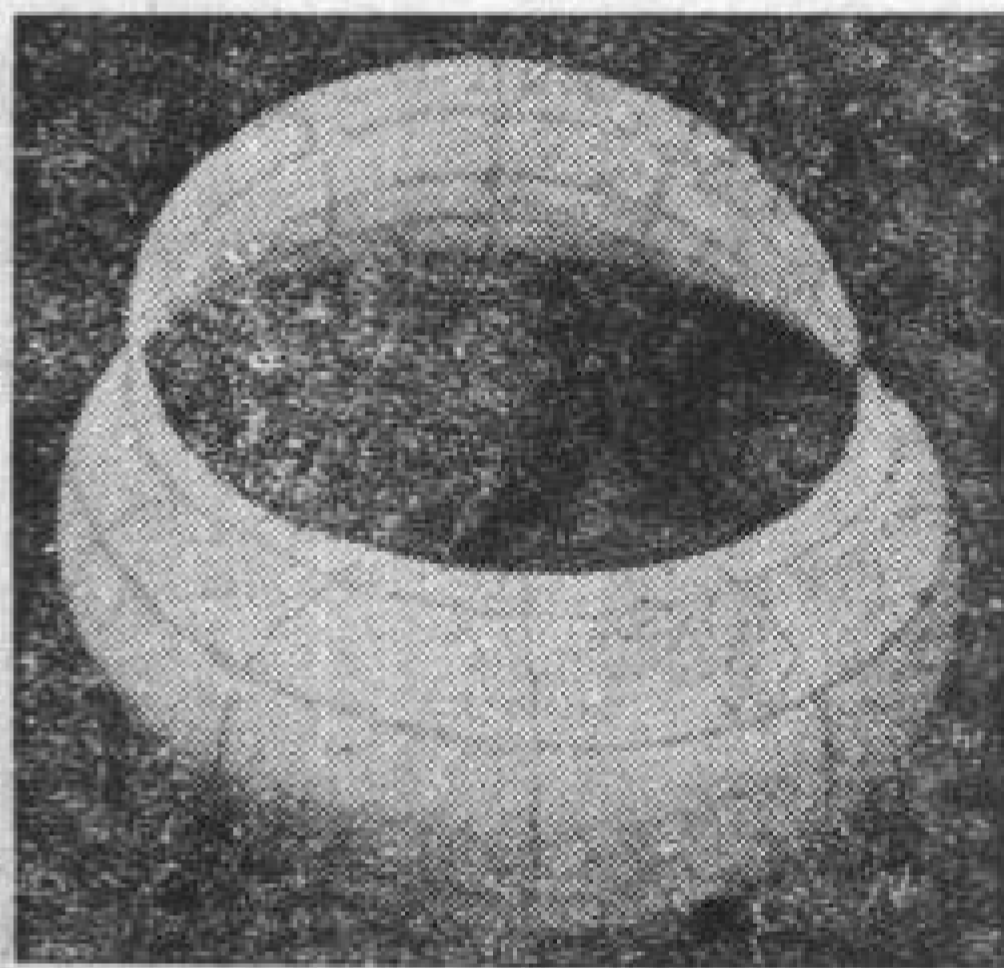
我們早已讲过(第 187 頁及以后)，在曲面上一点处所有正截口的曲率中心一般地塡滿这点上法綫的一段。这一段的两个端点是屬于主方向的曲率中心。这两点有时叫做法綫的焦点。两焦点重合当且仅当曲面的点是臍点的时候。一焦点在无穷远当且仅当曲面在对应点的高斯曲率等于零。

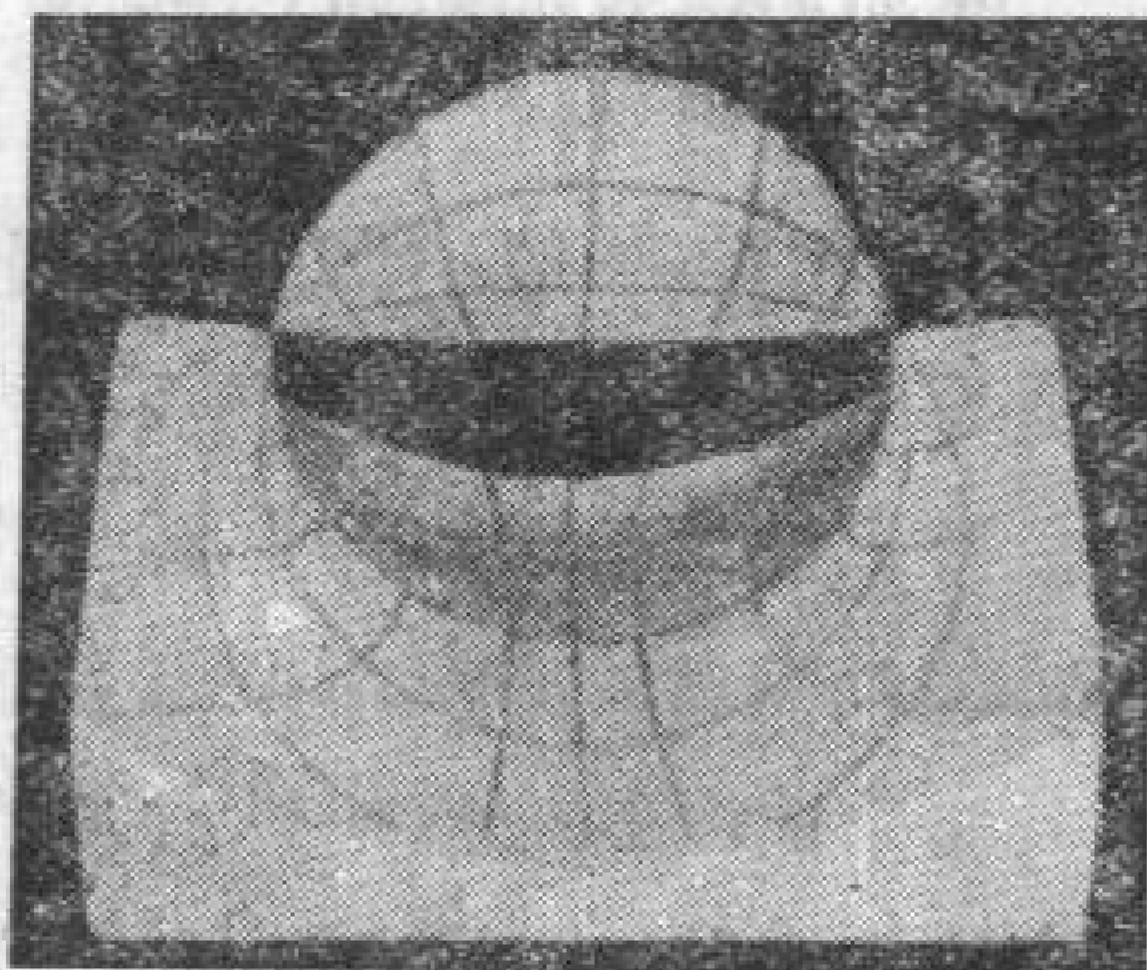
如果曲面的一点跑过曲面的所有位置，則其法綫上的二焦点一般地盖滿某一对曲面，它們叫做原曲面的焦曲面(或漸屈面，也叫中心曲面)。球面的焦曲面仅有球心一个点，因为二焦点都汇聚在这点。球面是一叶焦曲面退化为一点的唯一曲面。让我們看看两叶焦曲面都退化为曲綫的有哪些曲面。已經证明，只有所謂杜潘圓紋曲面这一类(这是杜氏发現的，其中有几种已画在图 229 上)。这类曲面也可以定义为切于三个定球的球族的包絡面。此外，杜潘圓紋曲面是所有曲率綫都是圓的仅有的一类曲面。图 229 所表示的五种石膏模型上刻出了一些曲率綫。还有，在包絡一圓紋曲面的球族中的每一球都沿一曲率綫和这圓紋曲面相切，而且一圓

① 如果我們不要求立体的所有投影有相等的周长，而要求有相等的面积，則得到另外一种曲面，叫做等照度曲面。球是这种曲面的一个例子，但是并不只是球。(参看 W. Blaschke, Kreis und Kugel 第 151 頁，萊比錫，1916)


图 229 *a*


图 229 *b*


图 229 *c*

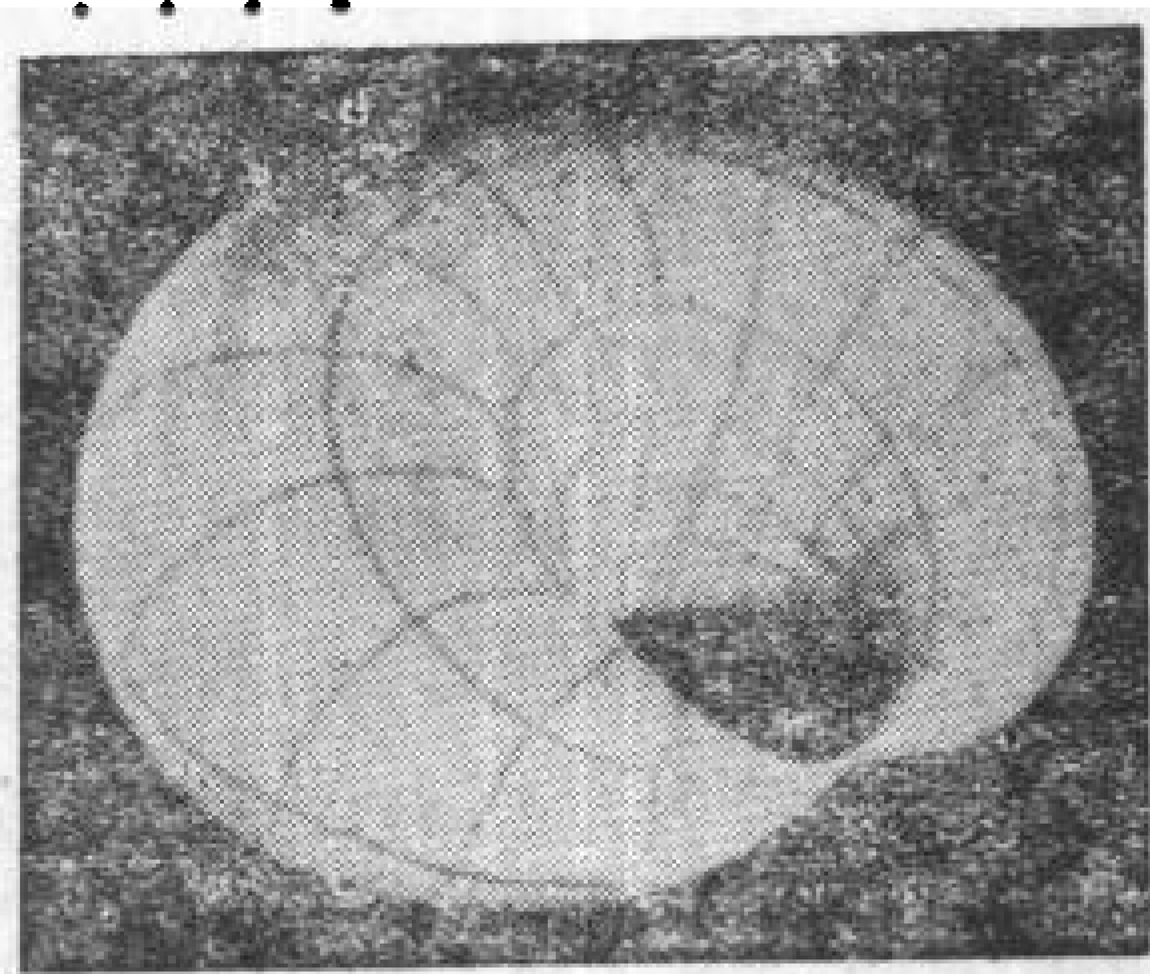

图 229 *d*

紋曲面上的每一曲率綫皆可用这种方法得出。环面是圓紋曲面中我們所熟悉的一例。环面的焦曲面是由旋轉軸和在旋轉过程中母圓心产生的圓組成的。此外，所有回轉錐面和回轉柱面是圓紋曲面；它們的一叶焦曲面是旋轉軸，另一叶在无穷远。至于其他的圓紋曲面，它們的焦曲面是两条圓錐曲綫，一般是一橢圓和一双曲綫，其相对位置和二阶曲面的焦曲綫一样[①]。

---

① 图 229 *a* 和 229 *b* 上的二曲面系由环面在空間反演而来（参看第 266 頁）。图 229 *b* 的反演中心在环面上，图 229 *a* 不在。图 229 *c* 和 229 *d* 上的二曲面系由圓錐面反演而来，图 229 *d* 的反演中心在錐面上。图 229 *e* 表示由圓柱面反演而得的曲面，其反演中心不在柱面上。

若是只要求一叶焦曲面退化为曲綫，得到的曲面类型更多得多。每一回轉曲面都有这个性质；一叶焦曲面常是旋轉軸。适合我們的条件的最一般形式的曲面是管道曲面。所謂管道曲面是說半徑在变化的一族球的包絡，各球心在某一定曲綫上。这曲綫永远构成管道曲面的一叶焦曲面。其特例，当曲綫是直綫时，結果便得一回轉曲面。因此回轉曲面即是管道曲面的特別情形。和回轉曲面一样，在每个管道曲面上，二族曲率綫之一是由圓組成的。这些圓是二邻球交出的圓的极限位置(它們叫做这族球的特征綫。)


图 229 *e*

对于其他的弯曲曲面，它們的焦曲面是由两叶曲面組成的。可以证明，在它們的焦点处，任何法綫不同这两叶曲面相交，而总是相切。这样一来，如果曲面的二叶焦曲面为已知，則曲面的諸法綫可以刻划为二叶焦曲面的公共切綫。这里发生一問題：在什么条件下可以将推演的次序顚倒过来？我們从任意二曲面开始，并考虑所有同二曲面相切的直綫族 S。那么問題便是，有沒有一个曲面(漸伸面)，它的諸法綫是直綫族 S？换句話說，二已知曲面能否为另一曲面的焦曲面？要使这样的情况实現，有一个很簡单的充要条件：过直綫族 S 中任一直綫在二曲面上的二切点所作二曲面的切面，必須相互垂直。共焦二阶曲面族可作为这种曲面的实例，因为可以证明，任意一对不同类的共焦二阶曲面适合我們的条件。

6. 球面的所有測地綫是閉曲綫。

曲面的測地綫是平面上直綫的推广。正像直綫一样，測地綫賦有几个与曲面上别种曲綫不同的重要性质。因此測地綫可以有

种种不同的定义。我們只討論这三种定义：作为最短的綫，作为向前的綫，作为最直的綫。

第一个性质是說，每一充分小的測地綫弧是曲面上連接这弧二端点的最短道路。由此可推知，曲面的測地綫在曲面經受彎曲时依然是測地綫。所以測地綫对于曲面的內在性质具有基本的意义(参考第197頁)，同时曲面的所有內在性质(例如高斯曲率)都可以通过画測地綫和測量它們的弧长来决定。这个事实跟平面的几何完全可由画直綫和測量直綫长来决定是类似的。相当于平面上通过两点有且仅有一条直綫这件事的是通过曲面上不太远的两点有且仅有一条測地綫。显然，把經过曲面上二点的一根绳綫拉紧即可得到測地綫①。

測地綫的第二个性质是，它是向前的。这也是曲面的一个內在性质。事实上，測地綫可以由这个条件来定义：它把曲面上一段无穷小弧永远"笔直向前"移动。設有一段小弧AB在曲面上移动，移动时A走的路程和B走的相等，而且两条路綫始終同AB垂直，则AB中点的軌迹即近似于測地綫；只要弧AB取得充分小，可以达到任何近似程度。从这个定义容易理解，通过曲面上任一点在任一方向上恰有一条測地綫。此外，这个定义还告訴我們实际作測地綫的一种近似方法。让一辆特别小的双輪車在曲面上移动，輪子要在它們的公共軸上釘牢，以便保持二輪轉动的速度相等。因为汽車司机不希望汽車仅能沿地球的測地綫行駛，而且还希望避免輪子滑行(为了保护輪胎和别种原因)，因而制造汽車时必須如此設計，使两个后輪能按不同速度自由轉动。

測地綫的第三个定义——測地綫作为"最直的"綫——不是曲面的內在性质，而与曲面如何安装在空間有关。过曲面上每一

① 在凸曲面的外部，绳綫当然在曲面上。如为别的曲面，必須保证绳綫不离开曲面。

点的测地綫跟在这点和测地綫有共同切綫的所有曲綫比較起来，前者有最小的曲率。如果測地綫上的一点和它在这点的方向为已知，那么测地綫的整个路綫完全被决定了。实际上測地綫可如此得出：把一根直而富有彈性的織針按已知方向插在已知点上，然后将它弯曲，使它貼合于曲面上，且使它只能沿曲面移动。这样，織針即呈測地綫形状，因为織針的彈性能阻止它作任何别种形式的弯曲。

最直的綫也可以用几何的条件来描写：在曲綫各点处曲綫的密切面都包含曲面的法綫。假如这条件已适合，直观上容易了解，在曲綫上二邻点的切綫的夹角，对于不离开曲面的所有曲綫来說，乃是最小的。但这正符合最小曲率的条件。測地綫这一名称的来历，就是因为測地綫的密切面有如此特征。在地球表面上大地测量中打最短綫的桩子，就是利用这个准則的。

球面的測地綫就是大圆。事实上，大圓平面与球面交于直角，并且过球面上任一点在任意方向上都可作大圓。如此球面的所有測地綫都是閉曲綫。不过这不是球面独有的特征，此外还有大量的其他凸閉曲面，它們的測地綫也是閉曲綫①。

我們自然会联想到在别的曲面上寻找閉測地綫的問題。在回轉曲面上，簡单得很，所有的經綫就是測地綫，因为經綫平面通过旋轉軸，故而同曲面正交。(以前证明过，經綫也是曲率綫。)由此可知，每一回轉閉曲面有一单参数族的閉測地綫。在别种曲面上，閉測地綫只是弧立的曲綫。例如，可以证明，一般橢球面只有它同三个对称平面相交所成的橢圆才是閉測地綫。

另一方面，在每一凸閉曲面上至少有三条閉測地綫。这个定理很早就有人推测出来，不过直到最近(1930年)方为柳斯捷尔尼

① 此处及以后，凡說到閉測地綫，意思是說曲綫回到出发点以前，沒有隅角，也不自交。

克(Л. А. Люстерник 和什尼列利曼(Л. Г. Шнирельман)证实。①

测地綫在物理学上甚为重要。一个质点在一定曲面上运动，如不受外力影响，它走的軌迹就是曲面的测地綫。我們前面給出的每个测地綫的定义，都与点的力学定律接近。比如，作为最短的綫的定义，相当于力学中的雅可比原理。作为最直的綫的定义，出現在高斯-赫斯的最小約束原理中。密切面与测地綫的关系在第一种拉格朗日方程中起作用。

测地綫同焦曲面、曲率綫的理論有一特殊关系。我們从前讲过任一曲面的諸法綫与其焦曲面相切。因而焦曲面上的每一点对应这焦曲面上的某一方向，即在这点处同焦曲面相切的原曲面法綫的方向。就像主方向和漸近方向的情形一样，焦曲面上的方向場也是可积的，就是說，可以找出一族曲綫，使在每一点处具有給定的方向。这个曲綫族正是测地綫族。自然，这些测地綫的切綫曲面是由原曲面的法綫产生的。但此外，切綫曲面与原曲面的交綫就是后者的曲率綫。还有，每叶焦曲面对应两族曲率綫之一。

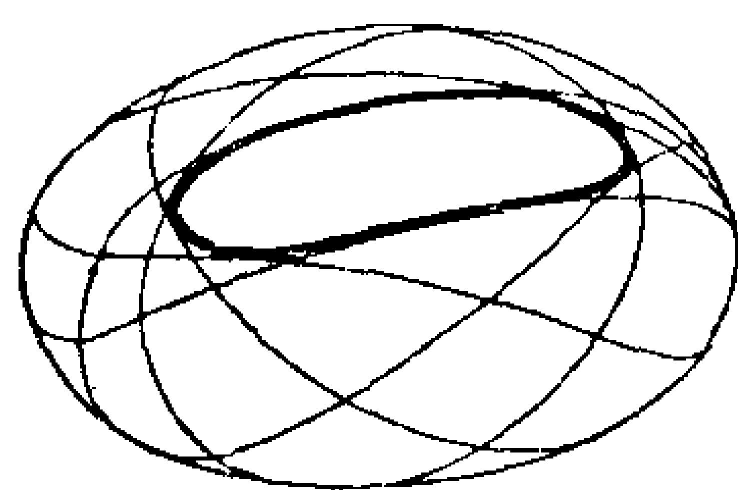


图 230

我們从前讲过，共焦二阶曲面族中的每对不同类的曲面，可以解釋作某一曲面的二焦曲面。这一事实給我們提供了在一般橢球面上寻找所有测地綫的一种方法。設 E 是給定的橢球面。选擇与 E 共焦点的

① Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман, Топологические методы в вариационных задачах, Труды института математики и механики при МГУ, 1930, Переработанное изложение, —— 俄譯者注。

Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман, Топологические методы в вариационных и ихбриложения к дифференциальной геометрии поверхностей, Успехи математических наук, т. 11 выб. 1(17), 1947. 再参考 Л. А. Люстерник, Топология и вариационное исчисление, Успехи математических наук, т. 1 вып. 1(11) 1946。——俄譯者注。

某一双曲面H。E和H的公切綫决定E上的一个方向場。根据上面的定理，这場的所有积分曲綫都是測地綫。但这并不包罗E上的一切測地綫，因为通过曲面上任一点，在任何方向上都有測地綫，而我們所找出的測地綫，仅是在确定的方向上的。不难刻划在E上如此找出的測地綫族；因为，可以证明，它們是E上所有那些，而且仅仅那些与E和H的交綫相切的測地綫（参看图230）。它們复盖櫧球面的情形，恰恰同橢圓的切綫复盖平面的情形一样。E和H的交綫（順便說說，它是E的曲率綫，这一点已經讲过了），划分橢球面为两部分。一部分沒有族中的曲綫通过，另一部分的每一点处皆有族中的二曲綫通过。

为了得到E的所有測地綫，只須使双曲面H取遍为E所决定的共焦系的所有单叶双曲面和双叶双曲面。这里还应該把焦双曲綫看作是双曲面的极限情形，而且要把跟焦双曲綫相交的所有直綫当作这个退化曲面的切綫。焦双曲綫与E交于四个臍点。运用极限过程于上述論证，可知E上屬于焦双曲綫的測地綫族是由通过E的一个臍点的所有那些測地綫，而且仅仅是那些測地綫組成的①。其次，可以证明，通过一个臍点的每条測地綫必定通过这点的对徑点。

在球面上，所有通过已知点P的測地綫也必通过另一定点，即P的对徑点。通过橢球面一臍点的測地綫也有类似的性质。此外还可证明，通过橢球面的任何其他定点的測地綫，不全都有第二个公共点。

我們不禁要問：球面是不是所有通过它上面任意一定点的測地綫必通过第二个公共点的唯一的曲面呢？这个問題迄今尙未解决。

① 在第191頁讲的绳綫作图法与此事密切相关。

7. 一定体积的立体，以球的表面积为最小；一定表面积的立体，以球的体积为最大。

这两个性质(其中每一个是另一个的推論)，唯一地决定了球。这个問題的证明要引到变分法的一个問題上去，而且证明非常繁瑣。不过，自由飄浮着的肥皂泡，提供最簡单的实驗证明。我們以前在談到极小曲面时讲过，肥皂泡由于表面張力的作用，尽可能将表面积收縮到最小；因为肥皂泡里含有一定量的空气，由此可知，肥皂泡在一定容积之下，将成为表面积最小的曲面。由观察知道，自由飄浮的肥皂泡恒呈球形，如果泡上肥皂液所受的輕微的重力影响略而不計的話。

8. 在所有一定表面积的凸体中，以球面的总(全)平均曲率为最小。

曲面上一点的平均曲率H定义为在这点的二主曲率的算术平均值:

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2).$$

在这个公式中，橢圓点的二主曲率的符号須取成相同的；鞍点上的，須取成相反的。跟高斯曲率不同，平均曲率一般地因曲面弯曲而变。这样說来，平均曲率主要告訴我們同曲面安装在空間的方式有关的某些东西。

平均曲率概念的重要性在极小曲面中已經見过了。按极小曲面的定义乃是在曲面上任意一点处二主曲率值相等，但符号相反。換句話說，极小曲面的平均曲率，到处为零。

为了求得曲面的总平均曲率，可如下进行。設想曲面有一定的质量，质量分布的状况是，在每一点的密度等于在該点的平均曲率。那么在曲面上如此分布的总质量就叫做曲面的总平均曲率。

要决定有一定表面积又有最小总平均曲率的閉曲面这个問

题，也像上述的球面的性质一样，要涉及变分法上的問題。在这里，还是一样，可以证明球面是适合所給条件的唯一曲面。

上面說的关于球面的两个性质，可从凸体的一般理論中的某些不等式推导出来。我們重点地讲讲其中包含的原理。半徑为 r 的球面表面积为 $S=4\pi r^2$，体积为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$。要得到相等的維数，須把表面积的立方跟体积的平方相比較。这就得出关系式

$$S^3=36\pi V^2,$$

这式对于任何半徑的球都成立。由于在所有的表面积相等的曲面中，以球的体积为最大，所以对于所有别的曲面，应有

$$S^3\geqslant 36\pi V^2.$$

設M为曲面的总平均曲率，則对于一切凸体而言，可以证明下面两个重要不等式：

$$1.\quad S^2-3VM\geqslant 0,$$

$$2.\quad M^2-4\pi S\geqslant 0.$$

在第二公式中的等号只对于球面成立。这就是說，在所有表面积一定的凸体中，球面，且只有球面，給出M的最小值。由公式 1 和 2 消去M，得到前面的連系表面积和体积的不等式。并且容易看出，等号仅仅对于球面成立。上面的論证原是对于凸体而言的，其实这个連系表面积和体积的不等式不仅对于凸体成立，对于不是到处是凸的立体也成立。

9. 球面具有常数平均曲率。

这是因为球面所有的正截口有相同的曲率半徑，即球的半徑。但球面不是有常数平均曲率的唯一曲面。例如任一极小曲面，在任意点处的平均曲率为零，因之也是常数平均曲率曲面。如同球面和极小曲面一样，任何其他常数平均曲率曲面均可借助于肥皂泡来实現。假定在空間給定了任意閉曲綫，以这曲綫为边緣作

一定的曲面，然后把肥皂膜伸張在曲綫上。实际上可以这样来作：把一根管子的上部的边緣作成所需要的曲綫形状，利用管子吹一个肥皂泡，然后密封管口，不使透气。于是肥皂膜和管壁內部將形成一密閉室，容納一定量的空气。在表面張力作用之下，肥皂膜所取的形状在已知条件下使表面积成为最小。借助变分法可以证明，用这种办法作出来的任何曲面都是常数平均曲率曲面。常数平均曲率的特定值取决于管內空气的压强（压强当然又要取决于吹入管內的空气量）。特別地，当密閉室內的空气压强等于外界的大气压强时，我們又回到极小曲面的情形。

从上面的例子可以看出，肥皂膜能供給我們大量的要寻求的曲面。不过所有这些曲面都有这种性质：它們会在空間曲綫处突然中断，这是說，它們以空間曲綫为边緣。那么就发生这样的問題：除球外有沒有其他的既无边緣又无任何別的奇性的常数平均曲率曲面呢？可以证明，答案是否定的，因而球面是被我們的附加条件唯一决定的曲面。这个事实仍可借用肥皂泡来帮助了解。我們已經知道，飄浮在空中的肥皂泡总是呈球形的。假如用越来越小的曲綫为边緣产生大小一定的肥皂泡，那么可以想像——也可以借用实驗证实——边緣曲綫的形状对于肥皂泡形状的影响將越来越小。在极限情形下，肥皂泡沒有边緣，因而变成了球形①。

① 容易誤认为肥皂泡的平均曲率随吹入管內空气的增加而增大。在开始的时候，平均曲率确实从极小曲面的零値开始逐漸增大，但如果我們用力吹（假定吹不破），根据正文所述，肥皂泡將近似地成为球形，其半徑单調增大，因此半徑的倒数的平均曲率將单調減小，趋近于零。設給定一边緣曲綫和任一充分小的数 c，我們知道，至少应該有两个綳在已給曲綫上，并有常数平均曲率 c 的曲面。这种現象与許多其他变分問題显著地相抵触，在这些問題中，綳在已給曲綫上的极値曲面只能得出一个。假如不計平均曲率的符号，那么我們还可得出另外两个綳在同一曲綫上，并有同一常数平均曲率的曲面。这些曲面也可以借助肥皂泡来实現，此时要从另一边去吹原来的极小曲面。

10. 球面具有正常数高斯曲率。

通过这个性质来刻划球面，跟通过平均曲率来刻划球面有同样的情况：单凭常数高斯曲率絕不能唯一地决定球面。事实上，所有由部分球面弯曲而得的曲面也有这个性质，因为高斯曲率經弯曲不变。让我們把曲面上沒有边緣也沒有其他的奇性这个条件也加进来，然后問：除了球面之外，有沒有别的正常数高斯曲率曲面也适合这个附加条件？可以证明，答案是否定的。由此可推出，整个的球面不能弯曲成别的曲面。首先，可以证明，沒有奇性也沒有边緣曲綫的正常数高斯曲率曲面不能像平面那样伸展到无穷远，而必然像球面那样是一閉曲面。其次，經过簡单的計算发現，除了球面和平面之外，再沒有两个主曲率都是常数的其他曲面。因此我們只須考虑两个主曲率都是变数的閉曲面，这里二变数的乘积应保持不变，即等于已給定的常数高斯曲率的値。在这样的曲面上，至少应該有一个正则点，在这点上的一个主曲率取得最大値。然而可以用解析方法证明，在正常数高斯曲面上沒有这样的一点存在。换句話說，在正常数曲率曲面(球面除外)的有界区域上，主曲率有极大的所有点都在边緣上。因为球面沒有边緣，所以整个的球面不能弯曲，而且除了球面之外，再沒有别的无奇性的正常数高斯曲率閉曲面了。

另一方面，显然存在可弯曲的部分球面。于是发生这样的問題：究竟要开多大的洞，剩下来的部分球面才能弯曲？可能有人这样想，这个洞必須大到一定程度，比方說，有半个球那么大。但是，可以证明，这种想法是不对的。其实只要开一个极小的洞，无論多么小都可以，就可以把球面弯曲。事实上，只要沿大圓随便开一个小細縫也就足够了。不过，要是只挖掉一个或几个孤立点，能不能把球面弯曲呢？現在还不知道。

挖过小洞的球面就可以把它弯曲这种事实和肥皂泡的性质間

有一种特殊的連系。这是根据下面容易用解析方法证明的事实:設F是一个有常数平均曲率c的曲面，在F的某一定側的諸法綫上作与曲面的距离为$\frac{1}{2c}$的諸点。这些点作成一曲面G。可以证明，G不是常数平均曲率曲面,而是有常数高斯曲率$4c^2$的曲面。G叫做按距离$\frac{1}{2c}$平行于F的曲面。如果F是球面的一部分，則G是与F同心的球面的一部分。反之,除非F是球面的一部分,G就不能是球面的一部分。因为可以证明，F的法綫也是G在对应点处的法綫。我們从F的哪一側去量法綫的距离,并不是可以任意的,而是有一定的規則。这个規則容易借助肥皂泡来給出明确的叙述,假如F是用管子吹起来的肥皂泡的話:法綫的方向必須指向密閉室的內部。

設想有一个半徑为$\frac{1}{c}$的球面——因而其平均曲率为c——在球面上有一小閉曲綫R。让我們把曲綫連續变形，使变形后的諸曲綫不在球面上。可以理解,只要变形不太大,我們总能够找到以經过变形的曲綫为边緣且有常数平均曲率c的肥皂泡。因为若把肥皂膜伸張于原来的曲綫R之上,吹入适量的空气,确能使它成为有常数平均曲率c的曲面。其所以可能，是因为原来R所在的球面就是这样的曲面，并且在吹(从适当的一側)肥皂泡的某一阶段中，我們得到被R划分出来的两部分球面中的較大者。考虑到連續性,可以推想而知,在R变形的过程中,适当地增加管內的空气,能够保证肥皂泡的形状——原来本是球形的——起連續的变化,同时保持平均曲率不变;但是变形后的肥皂泡不再是球形的,因为由于我們的作法，变形后的諸曲綫不在球面上。現在在所有的这些肥皂泡的內部按距离$\frac{1}{2c}$作一些平行曲面。于是得到一个連續曲面族,并且，根据上面引证的定理，知道它們都是具有常数高斯曲

率 $4c^2$ 的曲面。这些曲面当中第一个是半徑为 $\frac{1}{2c}$ 的球面，球面上有一个洞，洞的边緣曲綫与 R 相似而且在空間的位置也相似。族中其他的曲面經过連續弯曲都可以变到第一个。但是它們不能是球形的，因为我們已經讲过，否則的話，那些肥皂泡本身也将是球形的。这样說来，有任意一个小洞的球面的确是能够弯曲的。

一个有边緣的或无边緣的曲面是否可以弯曲这个問題已經在甚为一般的情况下研究出来了。所有凸閉曲面，比如橢球面，不能弯曲。同样，任何有边緣曲綫的凸曲面也不能弯曲，如果在每一边緣曲綫的所有点处有同一切面的話。环面（第 203 頁图 210）的凸部（有两条边緣曲綫）就是一例。

在凸閉曲面上挖去一个随便多么小的洞，曲面便可弯曲。但仅仅除去几个孤立点或切开，曲面是否能够弯曲，至今还不知道。

11. 球面由一个三参数剛体运动族变到自己。

使球面与本身重合的剛体运动的集合显然是繞着球心的旋轉。这些旋轉的集合实际上依賴于三个参数。因为决定旋轉軸的位置需要两个参数（旋轉軸必須通过球心，其他方面却是任意的），决定旋轉角需要第三个参数。参数的个数还可根据另一种观点得出：球面上任一点显然可以通过屬于旋轉族的一个旋轉，变到其他一点；同时，通过球面上原来的点的任一方向可以变到通过象点的任一方向。这两个条件唯一地决定我們族中的一个变換。决定这个变換恰好需要三个参数；因为自由选擇已知点的象点依賴两个参数，而球面上通过这一象点的方向組成另一个单参数族。

第二种計算参数的方法不独适用于球面，也适用于平面；因此平面同球面一样，有一个三参数剛体运动族。另一方面，屬于这类的曲面再沒有别的了，因而这个性质表現了球面和平面的特征。

让我們看看一般地具有剛体运动族的还有哪些曲面。这个族

必須是双参数或单参数族。具有恰含两个参数的运动族的是圓柱面。圓柱面經过繞其軸作任意的旋轉和沿軸作任意的平移能够变为与自己重合。这类的剛体运动群作成双参数族，并且再沒有别的剛体运动能把圓柱面搬到与自己重合的了。这一类的运动能把柱面上的任一点搬到柱面上其他任一点。但方向可不能任意地搬，因为产生柱面的任一母綫經过上述剛体运动永远变换成另一母綫。

回轉曲面可作为有单参数剛体运动族的曲面的一个淺显的例子。所有这类的曲面經过繞軸的旋轉能变回到自己，而且只有經过这种运动才回到自己(不算球面、平面和圓柱面)。因此任一給定点可以搬到同一緯圓的任何其他一点，而且只要給出一点的位移，运动就完全确定了。

虽然如此，回轉曲面并不代表全部的有单参数剛体运动族的曲面。事实上，用这个性质来刻划的曲面包括所有的螺旋面。这类曲面的极限情形是回轉曲面或柱面。在第212頁上指出过，每一螺旋面可如此得出：将任一空間曲綫以一定直綫为軸作匀速旋轉，同时沿此直綫的方向作匀速平移。从这个定义可知，每一螺旋面有将它变回自己的单参数运动族，即能够从空間曲綫产生曲面的那一运动族。令角速度等于零或平移速度等于零便分别得到上述极限情形。第一种情形螺旋运动变为平移，空間曲綫扫过一柱面；第二种情形得出旋轉，空間曲綫扫过一回轉曲面①。

除极限情形外，母綫上任一点描繪一螺旋綫。由此可見，螺旋面的单参数运动族把螺旋面上每一点搬到其相当的螺旋綫上任一点。在极限情况下，螺旋綫退化为柱面的母綫或回轉曲面的緯圓。

---

① 螺旋面是有单参数剛体运动群的唯一曲面，这是由于将曲面搬到本身的剛体运动作成一群。可是有定軸和定螺距的螺旋运动組成最一般的单参数空間运动群，如果繞軸的旋轉和沿軸的平移仍視为极限情形的話。

§33. 保持曲面不变的弯曲

球面的第十一个性质引起我們提出这样的問題：經过剛体运动变换到本身的，究竟都有哪些曲面？現在把这个問題一般化，考虑經过某一弯曲变换到本身的曲面。假定我們有这样一个曲面的模型，并有一块容易弯曲但不能伸縮的銅箔片，把它做成能貼合在模型某处的形状。那么一定能够用某种适当的方式沿模型推动箔片，使它始終貼合在曲面上而不被撕破，虽然它的形状可以改变。

尽管曲面經剛体运动变到本身的可能性要依靠曲面安裝在空間的方式，但曲面是否可能經弯曲变到本身則屬于內在性質，它不因曲面的弯曲而消失或显現。

由于剛体运动是弯曲的特殊情况，因此我們所要研究的曲面类必然包括上一节列举出来的曲面。現在指出，上一节所列举的曲面以及从这些曲面經弯曲而产生的曲面是能够經弯曲变到本身的最一般的曲面。換句話說，問題一般化了之后实质上沒有得到什么新曲面。不过前面所建立的各种曲面类型現在有了另外的意义。比方說，显然我們应該把柱面看作同平面本质上是沒有区別的，因为每一柱面經过弯曲都可产生平面。同样螺旋面的第二种极限情形——回轉曲面，也失掉它的特殊性。因为任意螺旋面的一部分永远能够弯曲成为回轉曲面的一部分，这只要把螺旋面弯曲使得曲面上的螺旋綫之一变为圓即可办到。当然由于螺旋綫是无限长的，它必須繞曲面无穷多次。此时其他的螺旋綫自然也都变成了圓，并且这些圓有同一的軸，因而所得的曲面确实是一回轉曲面，它的緯圓系原曲面上螺旋綫的象。为了证实这句話，我們举一个在第212頁讲过的例子：正螺旋面可以裹在悬鏈面上。

撇开解析的证明不談，从直观上并不难說明为什么所有具有单参数弯曲族的曲面能够轉变成螺旋面和回轉曲面，为什么螺旋

綫和緯圓相互对应。

直观的說法如下。通过具有单参数弯曲族的一曲面上的每一点必有一曲綫，它代表已知点在族中所有的弯曲下的所有象点的集合。因此曲面被經过上述弯曲能变成自身的一族曲綫簡单而无空隙地盖满。若从族中任选二曲綫，則在一条曲綫上的所有点必同另一曲綫有相等的(最)短程距，因为短程距經弯曲不变。由此可知，与族中的一条曲綫正交的每一測地綫也必与族中的其他曲綫正交，因为从曲面上一点沿曲面到曲面上一曲綫的最短距离为通过这点并与曲綫正交的測地綫。这样說来，在所考慮的曲面上必有一个正交曲綫网，其中一族曲綫是方才讲过的，另一族是由測地綫組成的。另外，沿着第一族的每条曲綫高斯曲率必为常数，因为曲綫上任一点經弯曲能够移到同一曲綫上的其他任一点，但弯曲是保持高斯曲率不变的。因此要想描写在我們整个曲面上的高斯曲率值分布的情况，只要把这曲率沿第二族的一条測地綫表为弧长的函数。

但是容易作出高斯曲率为經綫弧长的已知函数的一些回轉曲面。由于回轉曲面的經綫是跟緯圓正交的測地綫，那么可以理解，也不难通过計算证实，所研究的已給曲面經过弯曲可变成所有的那些回轉曲面，而且在曲面上所作的正交曲綫网此时变为經綫和緯圓网。

在螺旋面上，螺旋綫显然和回轉曲面的緯圓有相同的性质：每一螺旋綫是在曲面到本身的保长(等距)变换之下一点的軌迹。因此，如果螺旋面和回轉曲面能够經过弯曲相互轉变，那么螺旋綫和緯圓相互对应。

計算表明，任一螺旋面可以經过弯曲而产生一个双参数螺旋面族和一个单参数回轉曲面族。

現在考慮在含两个或两个以上参数的弯曲族之下不变的曲

面。弯曲族至少有两个参数，意味着曲面上任一点可迁到曲面上的任意邻点。由此得知这样的曲面，其高斯曲率必为常数。因为所有的正常数高斯曲率曲面(假定只考虑曲面的充分小的一部分)都可以摊在球面上(第 207 頁)，所以必然象球面一样，它們在一个含三个参数(而不是只含两个参数)的弯曲族之下不变。同样的話对于高斯曲率为零的曲面也成立，因为这类曲面可以摊在平面上。用解析方法可以证明，負常数高斯曲面也具有三参数弯曲族。

由以上所述，可知一切常数高斯曲率曲面都与平面有共同的重要的內在性质。这一点以后还要詳細研究。我們也可以这样建立平面几何学，使它的基础和最一般的命题，不仅对于平面成立，对于所有的常数曲率曲面也成立。而平面同正和負常数高斯曲率曲面的区别只有在后面的推演过程中才出現，在那里几何学分为欧氏几何学和两种"非欧"几何学。

§34. 椭圓几何学

弯曲曲面上的測地綫应該看作平面上的直綫的类似。現在我們較为細致地探討像这样的类似关系。平面几何里最簡单的作图建立在引直綫、迁移綫段和角的基础上。但是如果把这三种作图法搬到弯曲曲面上，一开始就碰到一个原則上的分歧：在平面作图中使用整个的平面，但在弯曲曲面中我們总考虑一小片区域，以符合微分几何学的观点。因此在这种作图中，必須限制作图的范圍不得超出小片区域的边緣，这跟只容許限于在一小片平面区域內作图相类似。

在弯曲曲面的一片充分小的区域內，通过离边緣不太近的两点恰恰可引一条測地綫，这同在平面上任何区域內通过离边緣不太近的两点恰恰可引一条直綫相类似。[①]

① 除了边緣处处朝外凸的区域外，連接充分靠近边緣的两点的綫段可能有一部分出界。

迁移任一小片弯曲曲面上以二测地綫为边的角，其方式与迁移一平面上在任一区域内以二直綫为边的角相类似。

迁移一定长的测地綫段和在平面上迁移一定长的直綫段，依照相同的規則。

尽管如上所述,可是即使由这三种运算(連接两点、迁移綫段和角)构成的最簡单的作图,例如作合同三角形,并不一定保持类似。所謂二平面三角形合同,是說二三角形的頂点可如此配对,使对应边分别相等，对应角也分别相等。这个概念显然可移用于弯曲曲面片的短程（测地）三角形。假定在平面区域上給定了一三角形 $A_0B_0C_0$ 和一点 A。取二点 B, C,使 $AB = A_0B_0$, $AC = A_0C_0$, $\angle BAC = \angle B_0A_0C_0$, 那么按三角形合同公理，三角形 ABC 将合同于三角形 $A_0B_0C_0$。在这里还应該假定 A 点离区域的边緣足够远，以保证在区域内作图有效。

然而,假如把上面的作图法用于弯曲曲面上，一般地讲，测地弧长 BC 就不等于测地弧长 B_0C_0,因而三角形 ABC 就不合同于三角形 $A_0B_0C_0$。

不过也有三角形合同公理能够用于测地作图的情况，即曲面是常数高斯曲率曲面。此时我們可以把曲面片如此弯曲,使 A_0 与 A 重合,角 $B_0A_0C_0$ 的二测地綫边与角 BAC 的分别重合①。由于长度和角經弯曲不变,所以三角形 $A_0B_0C_0$ 与三角形 ABC 合同。

平面几何作图的公理分析表明，所有关于图形的合同定理都是上述合同公理的邏輯結論。因此要是只就本节开头所讲的几种作图而論，則常数曲率曲面上的几何学与平面片的几何学完全类似。

① 这不是总可以經过連續变换做到的,不論在曲面上或平面上都是如此。我們知道,平面上图形的合同变换包括反射。对于有不等于零的常数曲率的曲面，也有和反射相当的等距(保长)映射(参看第 256 頁脚注)。

为了证明三角形合同公理对于任何常数曲率曲面都成立，我們利用了这类曲面的三参数弯曲群，但是它們之間的邏輯关系也可以倒轉。如果三角形合同公理对于已給曲面的短程三角形成立，則由此可以推出这个曲面具有含三个参数的等距(保长)映射族,因此它的高斯曲率应該等于常数。为了证明这句話,可如下进行:首先，根据上述三角形的作图，对充分小的短程三角形总可以作 ∞^3 个与之合同的三角形。但如一三角形为已知，則在曲面上的一切度量都可以由迁移綫段和角以及重复应用三角形合同公理来决定，这与大地測量所遵循的原則一致。因此对于基础三角形的任何合同迁移,都对应着曲面片的某一个保长映射。

这样，我們证明了常数高斯曲率曲面是三角形合同公理适用于短程三角形的仅有的曲面。

要想更进一步探求常数高斯曲率曲面与平面的类似关系，我們試解除局限于曲面一小部分的規定。先从正常数高斯曲率曲面开始。这种曲面最明显的例子是球面。但是，假如把整个的球面作为考慮的对象,則将在决定性的一点上破坏同平面的类似关系。我們讲过球面的测地綫是大圓；但通过球面上对徑两点有无穷多的大圓,而通过平面上两点只能作一直綫。其次,平面上二直綫最多交于一点,球面上二大圓交于二对徑点。虽然如此,除了球面之外，再沒有其他的正常数曲率曲面可以看作平面的类似。这即使只要記得所有的其他正常数曲率曲面都有边緣或者有奇点(参看第229頁)就能明白了。

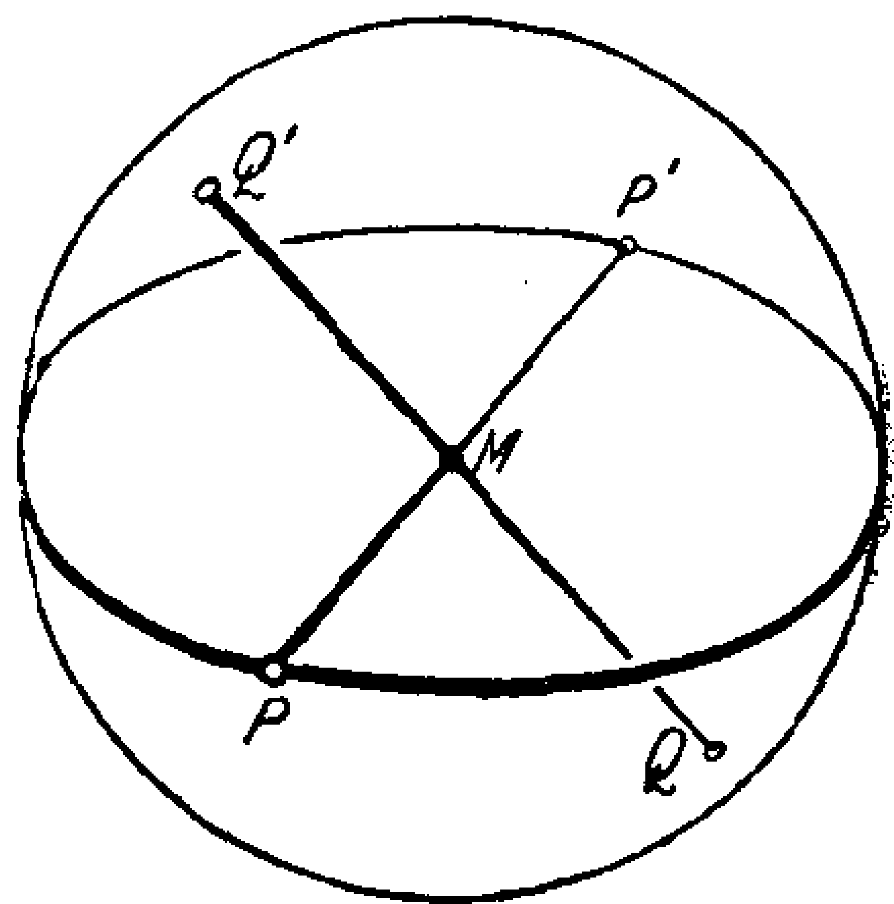


图 231

不过，有一个很簡单的抽象化的办法，能够消除球面上这种討厌的現象。我們只考虑半个球面，把边界大圓上的每对对徑点看作一点。还有，如果球面

上的图形含有越出边界大圓之外的点，这些点就拿它們的对徑点来代替。这样，后面所說的点在所考慮的半球面上(图 231)。

用这种方法就得到合乎所有要求的点組。第一，任一充分小的区域都可以等距地映成球面的一部分。第二，迁移长度和以测地綫連接二点，不受边界存在的限制。第三，过二不同点可連一条且仅一条測地綫，而且沒有两条以上的測地綫交于一个以上的点。最后这两个断語乃由于在我們的区域內每对对徑点被看作一个点所致。

我們的曲面称为**橢圓平面**的模型，平面几何的适合于这个模型的类似称为**橢圓几何**。

如果从整个球面出发，并把球面的每对对徑点当作一点，显然可以得到橢圓几何的第二个模型。

現在来研究橢圓几何学。把大圓当作直綫，大圓弧当作直綫段(或簡称綫段)。这样一来，橢圓几何和普通欧氏几何有两个显著的差别。第一，橢圓几何的直綫是閉曲綫，普通欧氏几何的直綫无限长。第二，两条橢圓直綫永远交于一点，但对每条欧氏直綫总有同它不相交的平行綫。

如要全面考察橢圓几何与欧氏几何的相互关系，只須从欧氏平面几何公理出发，判断每条公理是否适合橢圓几何；如不适合，再看看究竟应該如何修改。从前我們提过結合公理(第 119 頁)和連續公理(第 131—132 頁)。欧氏平面几何可以用五組公理建立起来；它們是結合公理、次序公理、合同公理、平行公理和連續公理。每一組公理都要以几个基本概念为基础。例如結合公理要以点、直綫和結合关系等概念为基础。可是某些概念又只能通过某些公理来表达。例如綫段的概念、射綫的概念，須通过次序公理来表达。綫段的概念又轉而构成合同公理的基础。这样說来，合同公理的表达須以某几个次序公理为前提。下面我們列出欧氏平面

几何的五組公理。[①]

I. 結合公理

1. 过两点恰可作一直綫。2. 每一直綫至少含有两点。3. 至少有不在同一直綫上的三点。

II. 次序公理

1. 在一直綫上的三点中，恰有一点在其余二点之間。2. 对于任意二点 A,B，至少有一点 C，使 C 在 A,B 之間。3. 如果一直綫和一三角形的一边相交(即它有一点在二頂点之間)，則这直綫或者通过对頂点，或者和第二边相交。

有了次序公理，就能用来規定“綫段”、“角”、“直綫上一点的某一側”、“射綫(半綫)”和“平面上一射綫的某一側”。

III. 合同公理

1. 在一直綫的一点的任一側能截取一已知綫段；这綫段叫做与已知綫段合同的綫段。2. 二綫段与第三綫段合同，則彼此合同。3. 若 AB 和 $A'B'$ 为二合同綫段，且 C 和 C' 分別在 AB 和 $A'B'$ 上；若 C 划分 AB 所成二綫段之一与 C' 划分 $A'B'$ 所成二綫段之一合同，則 AB 的其余綫段亦必和 $A'B'$ 的其余綫段合同。4. 在一射綫的任一側，恰可作一角等于一已知角。所作得的角叫做与已知角合同的角。5. (三角形合同公理。)在二三角形中，若二边及其夹角对应相等，則二三角形合同。

IV. 平行公理

通过一已知直綫 a 外一点，有一且仅有一直綫，同 a 不相交。

V. 連續公理

連續公理的表达方式可有好多种。但无論哪一种，其內容大致不外：

① 参看 D. 希尔伯特的“几何基础”(第七版，柏林，1930)。
(此书有江澤涵等人的中譯本，科学出版社出版。——中譯者注)。

1.(阿基米德公理，参看第131頁。)任一綫段能用任一其他綫段度量。2.(康脱儿公理。)每一无穷綫段套(所謂套或套状序列是指一綫段序列，每一綫段包含所有后面的綫段)恒有一公共点。

在椭圓几何里，結合公理显然有效，但次序公理就不然了。因为在椭圓几何里直綫是閉曲綫(好像圓一样)，我們不能說当三点在一直綫上时，恰有一点在其他二点之間。不过在椭圓几何里，可以用四点的分离关系来代替三点的"在……之間"的关系。分离关系所服从的一組公理，与次序公理十分相像。我們只提其中的第一个：在一直綫上的四点，恰恰可用一种方法，将它們分成两对互相隔开的点。(例如在图232上的 A, B, C, D 四点，分成两对互相隔开的点偶 AC 和 BD。)

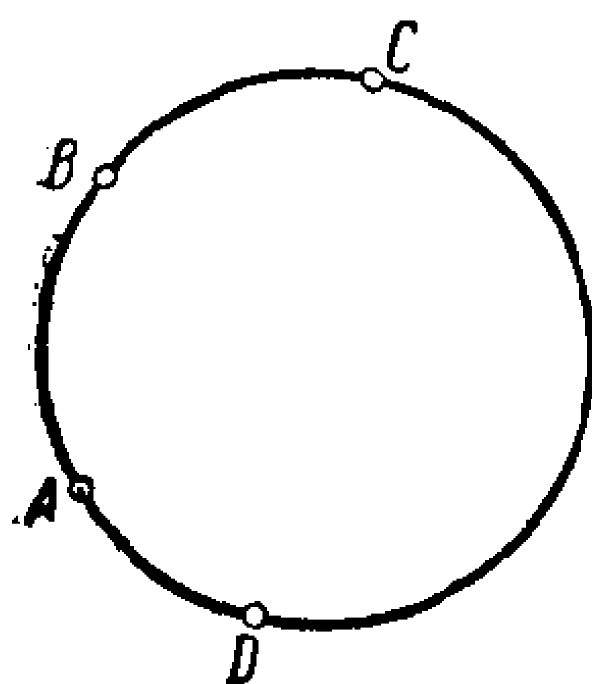


图 232

与欧氏几何的次序公理相仿，椭圓几何的分离公理也引出直綫段的定义和用于合同公理的其他概念。但是必須从这样的事实出发：两点 A, B 永远决定二綫段，而非一綫段，就像一圓被它上面二点分为两段弧一样。只有在直綫 AB 上引入第三点 C，才能区别开由 A, B 决定的二綫段。一綫段由这样的所有点組成，它們和 C 被 A, B 两点分开，其余一段由直綫 AB 上其余点組成。再有，三角形的任一內角不能大于一平角，不然的話，以二边及其夹角决定的三角形不是一个三角形，而是两个不合同的三角形(图233)，因而和三角形合同公理相矛盾。如果上述那些限制都考虑到了，可以证明(这正是我們的出发点)，充分小的椭圓平面区域确实同部分欧氏平面类似，而欧氏合同公理和連續公理，在椭圓平面上依然成立。

另一方面，平行公理不成立，必須代之以在第119頁讲的投影

平面的結合公理: 二直綫有一且仅有一交点。

对于次序关系，椭圓平面和投影平面的情形相同。为了闡明这点，我們取整个球面作为椭圓平面的模型，但球面的每对对徑点当作一点看。将球面从球心投射到平面上，则平面上的每一点对应球面上的一对对徑点，即对应椭圓平面上的一点。对于球面上的每一大圓，即对于椭圓平面上的每一直綫，对应象平面上的一直綫。如果把象平面上的无穷远直綫也加进来；换句話說，即把象平面看作投影平面，那么对应关系成为一对一的。

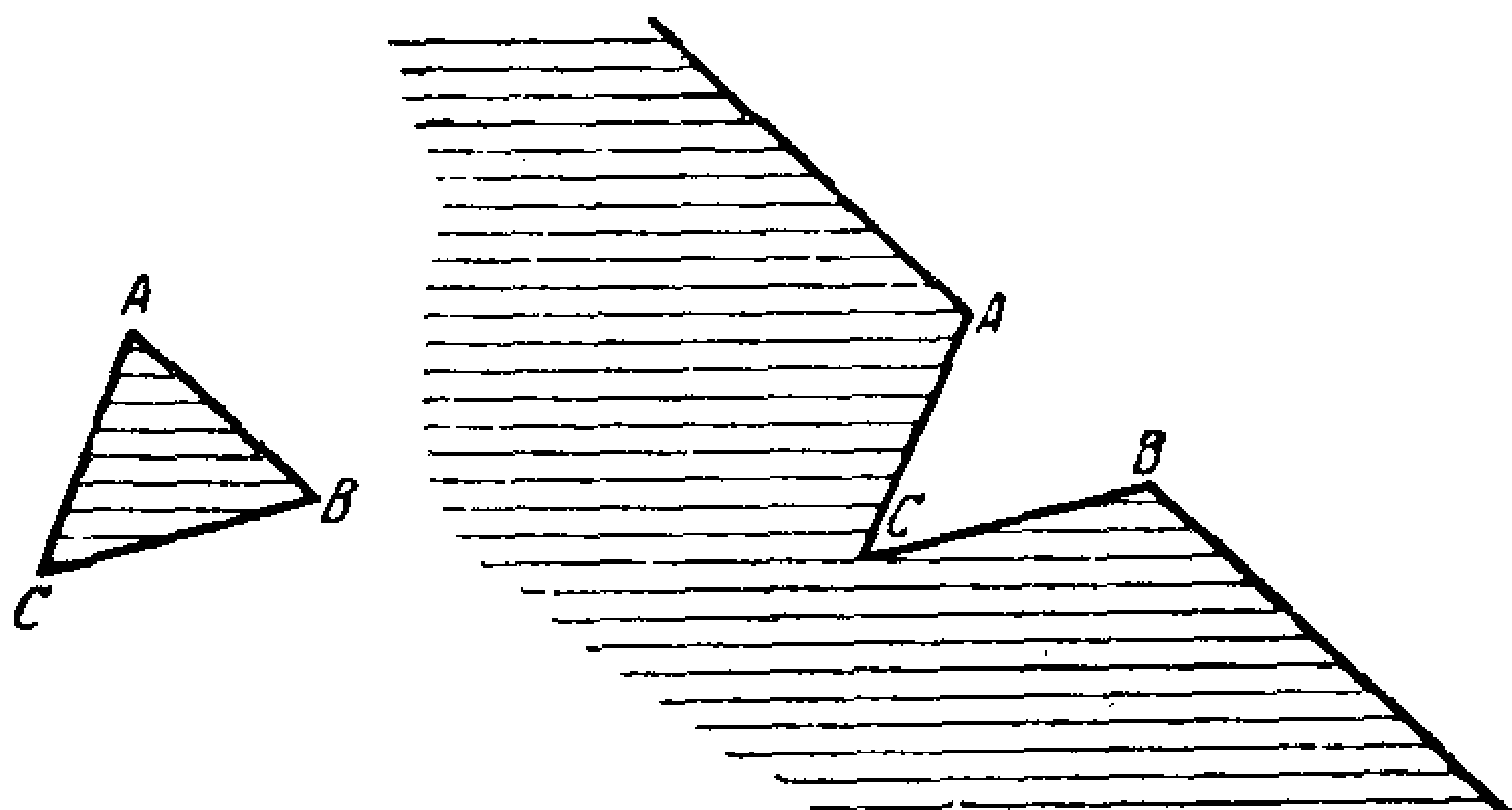


图 233

根据这些，我們可以把投影平面直接看作椭圓平面的模型，假如在这个模型上长度和角的相等性不解釋作欧氏的意义，而是具有像上面所說过的意义，即利用輔助球的球面三角学。由此可見，所有关于交点的投影几何定理，如德沙格定理、巴斯加定理，在椭圓几何中仍旧有效。

現在考虑椭圓平面的等距映射。如同欧氏平面的情形，可以研究不連續的映射群。每一个这样的群，对应球面上一个不連續的等距映射群，因而对应在§13和§14讲过的一个正多面体。反之，每一正多面体引出椭圓平面上一个不連續对称群，图160到163和图165到168表示的正多面体的中心投影，提供了在第83頁上讲过的欧氏平面上和那些群有关的“拼磚”問題的一些解。

椭圓几何不仅可以定义在平面上，也可以定义在空間里。椭圓空間的点、直綫和平面的模型可以利用有点、直綫和平面的投射空間。长度和角的比較方法也必須不同于欧氏几何的；这只能用

解析的术語来描写。例如用四維空間的超球的中心投影。橢圓空間的不連續对称群和四維空間的正胞腔有关，图 173 到 176 可以解釋为橢圓空間的“拼磚”。

§ 35. 双曲几何学，及其与橢圓几何学和欧氏几何学的关系

現在轉而討論負常数曲率的曲面。这种曲面不能有像球面那样簡单的形状。負常数曲率的回轉曲面可以有三种不同的形状，如图 234 所示。注意这三种曲面都有奇性边緣，边緣之外不能继續延伸。[1] 直到現在还未能对負常数曲率曲面集合給出明晰的描述，但是可以证明这一类的曲面不可能沒有奇性。

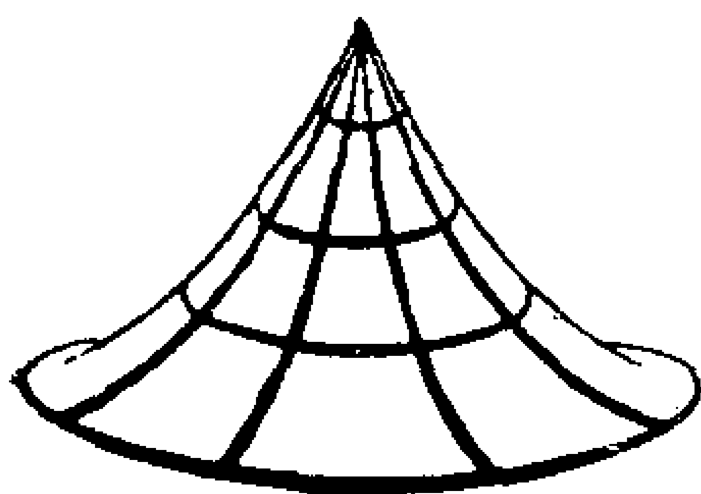


图 234 *a*

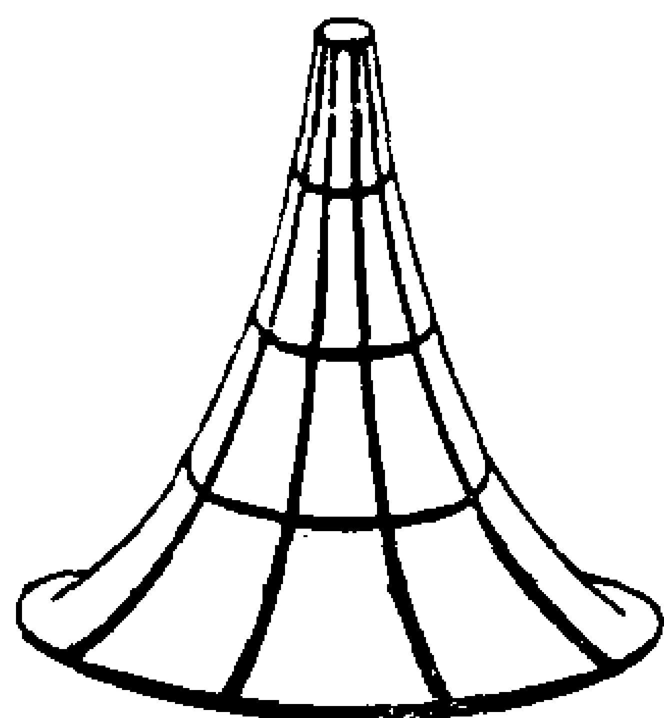


图 234 *b*

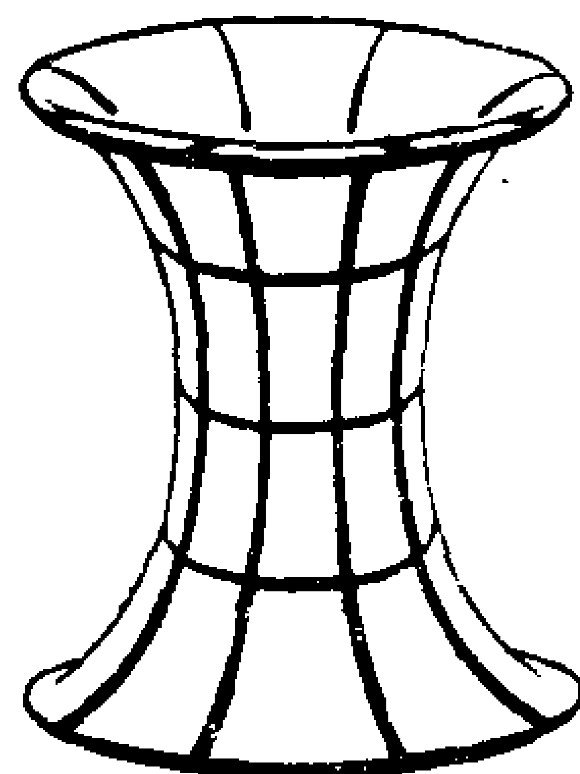


图 234 *c*

这样說来，沒有一种空間曲面，它能够在每一点邻近都等距地映到負常数曲率曲面上，而且在它上面作的測地綫弧是永远碰不到边緣的。不过在平面上我們能够用如同由投影平面作橢圓平面的模型的方法，来造出这样抽象定义的曲面的模型。在造新模型时，我們必須引进不但与欧氏几何不同，也与橢圓几何不同的距离和角的度量。这种适合我們要求的模型叫做**双曲平面**，而在这种

① 在图 234*b* 中仅仅下边的边緣是奇性的。这曲面可向上无限延伸，同时緯圓将越来越小。

曲面上的几何学叫做**双曲几何学**。

我們拿普通平面上一个圓内的点当作双曲平面上的点,圓的弦(不算端点)当作双曲平面上的直綫。

这两个定义足够給我們使用了,因为任意一片有負常数曲率 $-\frac{1}{C^2}$ 的曲面 F 可以映射到圓内平面域 G 上,使得 F 的所有測地綫映射到 G 的直綫段上。这种映射当然不是等距的,因为 G 的曲率是零,而 F 的曲率是負的。設 A, B(图 235)是 F 上 P, Q 两点的映象,R, S 是过 A, B 的弦的端点,那么 P, Q 两点的短程距离 s 由下式給出:

$$s=\frac{c}{2}\cdot\left|\ln\frac{AR\cdot BS}{BR\cdot AS}\right|. \qquad (1)$$

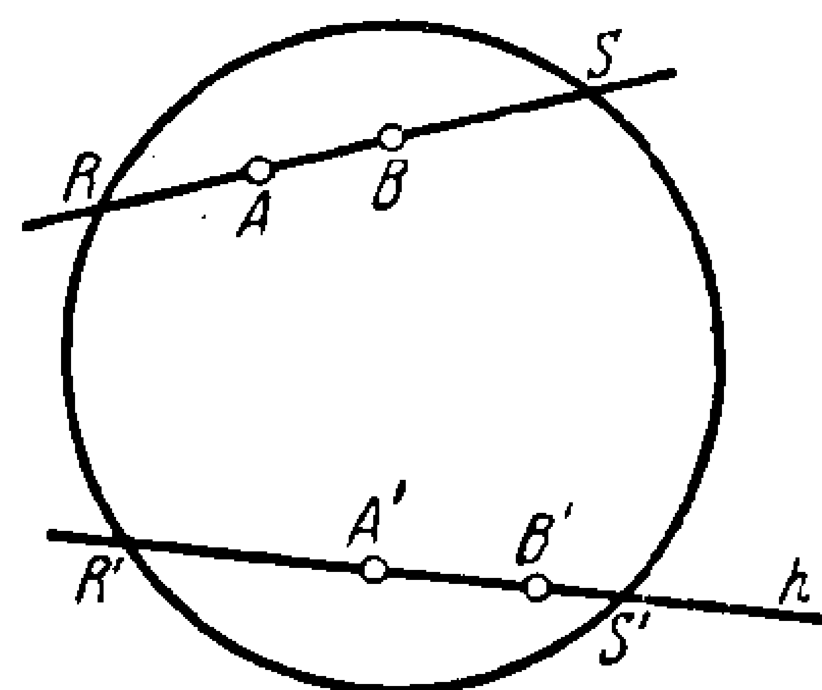


图 235

我們就用(1)式的右边作为新模型上两点 A, B 的"双曲距离"的定义。同样,映射 $F\to G$ 也告訴我們用一定的方法去量"双曲角",而这种量法是和欧氏几何不同的。举个例子,若在双曲平面上从一点 A 向一直綫 g 作垂綫 h,应該連接 A 和如图 236 所表示的輔助点 P。① 容易看出,h 和 g 作成的欧氏角,一般不是直角。

让我們考察欧氏几何中哪些公理在双曲平面上仍旧有效。首先我們說,結合公理显然成立。其次,只要規定三点的"在……之間"的关系同模型中的一样,则次序公理仍然成立。模型中綫段 AB 的規定和欧氏几何中的相同。

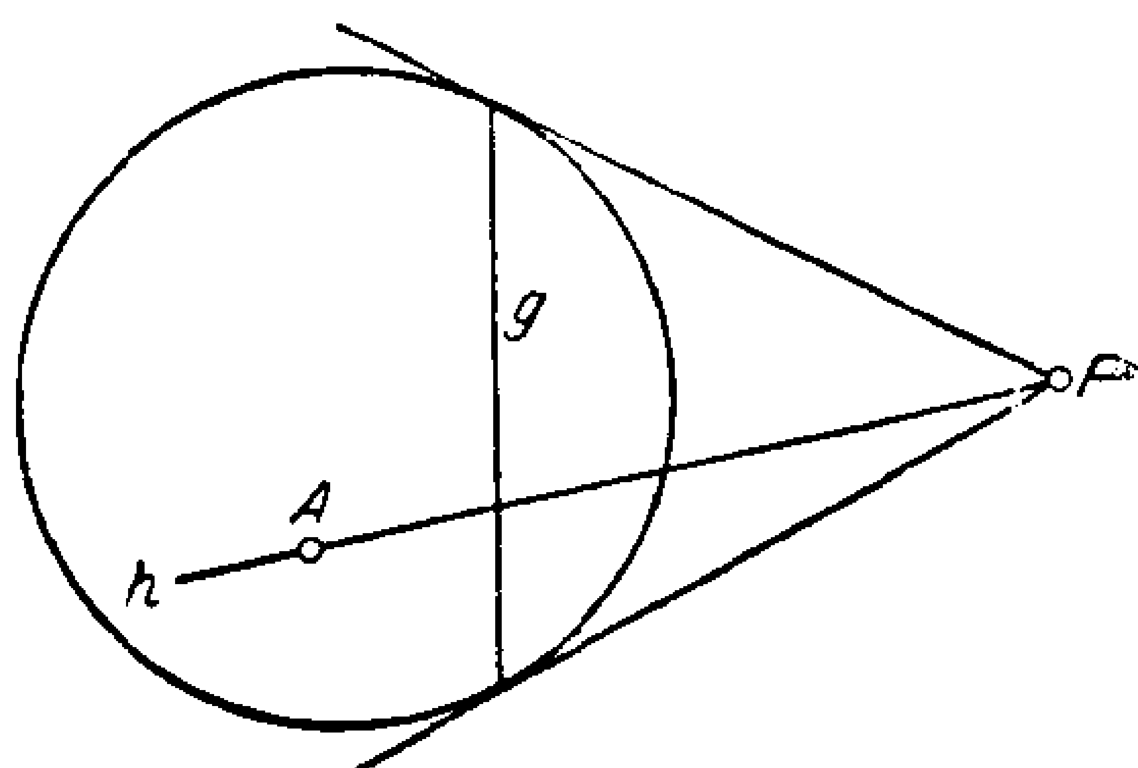


图 236

① P 是过弦 g 二端点对圓所作的二切綫的交点。——中譯者注。

又，我們用公式(1)作为合同綫段的根据。現在来考察第一合同公理。驟然看来，似乎迁移綫段有时不免要被圓周擋住了，因此这个公理是不成立的。其实不然，如果我們按定义(1)来迁移綫段，将永远不会达到圓周。因为，假定在圓內給定了綫段 AB 和从 A' 出发的一条射綫 h (图 235)，若在 h 上截取 $A'B'$ 等于 AB，則按(1)应有这样的关系：

$$\frac{AR}{BR}\cdot\frac{BS}{AS}=\frac{A'R'}{B'R'}\cdot\frac{B'S'}{A'S'},$$

或

$$\frac{B'S'}{B'R'}=\frac{A'S'}{A'R'}\cdot\frac{AR}{AS}\cdot\frac{BS}{BR}. \tag{2}$$

因为 A', A, B 三点在圓內，所以(2)式的右边三个比都是負的。因此$\dfrac{B'S'}{B'R'}$也是負的，所以 B' 在圓內；这就是我們要证明的断言。如果在一直綫上陆續截取同长，则将越来越趋近圓周，但永远不会达到它(图 237)。在双曲几何的模型內，圓周和欧氏几何中的无穷远直綫起着相同的作用。

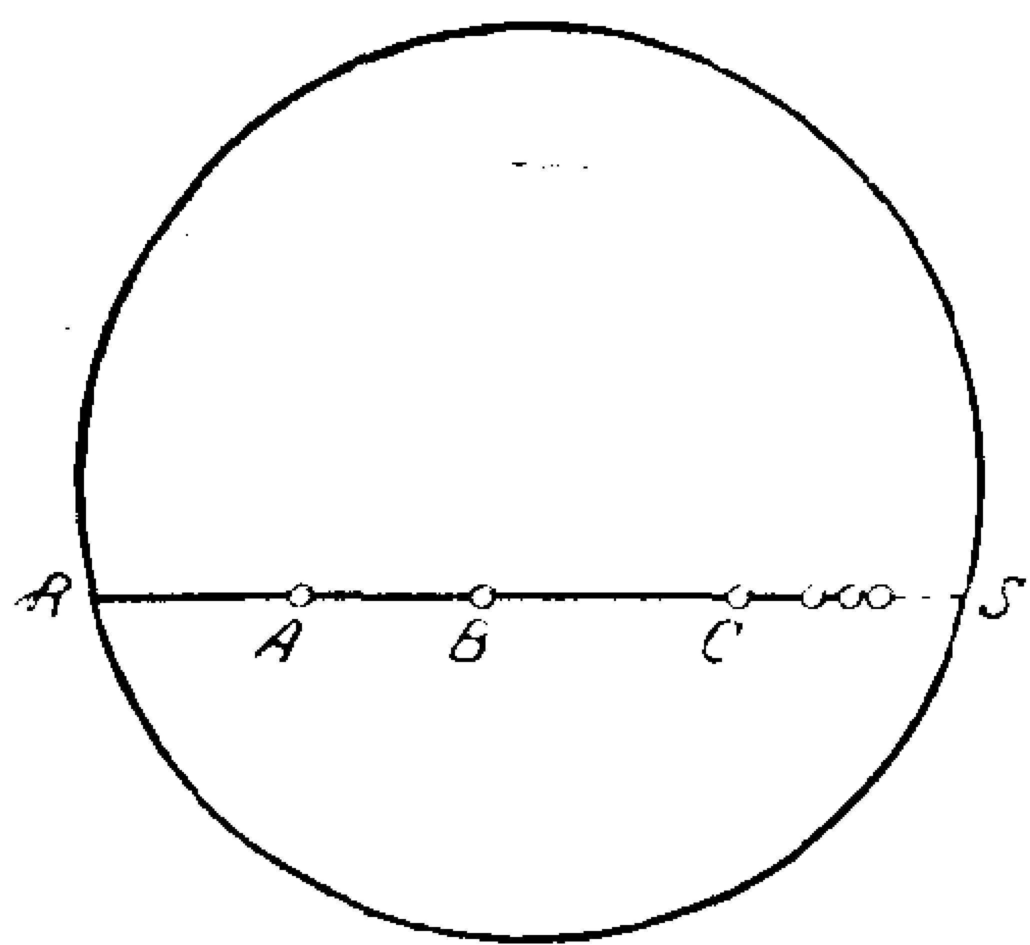


图 237

从上面的論证可知，第一合同公理在双曲平面上成立。不但这样，显然第二、第三以及第四合同公理也都成立。

正如在 § 34 中讲过的，第五合同公理和一个足够大的映射群的存在等价，这个映射群把圓內的点变换成圓內的点，使直綫映射成直綫，而距离和角不变。在平面投影几何里已經证明过这样的群确实存在。(这类映射屬于平面的投影变换，并可重复应用中心投影法直观地表出。) 这样，五个合同公理在双曲几何里都成立。

容易看出，連續公理也成立。

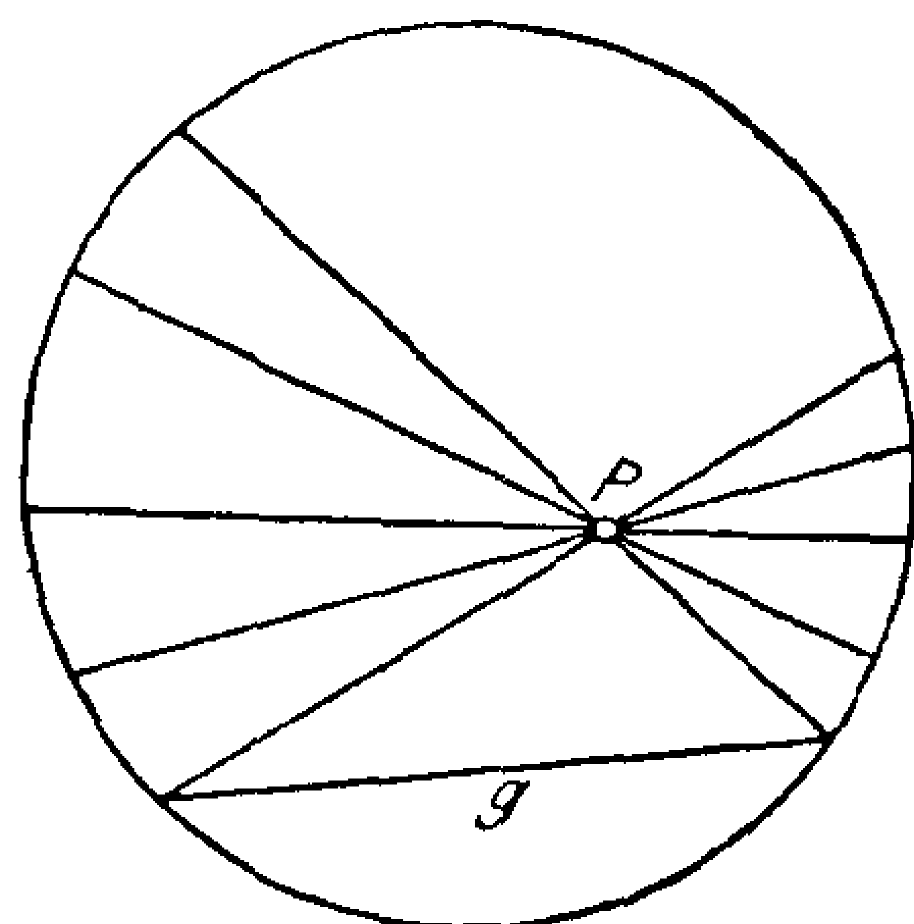


图 238

只有一个欧氏公理不成立，就是平行公理。这个公理所以不成立的理由，从图 238 上容易看出来。設 P 是一点，g 是不通过 P 的任一直綫，則通过 P 有一与 g 不相交的直綫束。这样說来，在椭圓几何中，欧氏平行公理和次序公理都不正确；但在双曲几何中，与欧氏几何不同的，只是平行公理不成立。

由于这个原故，我們的模型显得非常重要。根据平行公理之外的公理来证明平行公理的尝試已經有两千多年（一直到十九世紀之初），始終未获成功。双曲几何的模型的发現揭露了证明的根本不可能性。因为在我們的模型里除平行公理外的所有的几何公理都滿足。假若平行公理是其他公理的邏輯推論的話，那么它在这新的模型中也該成立，但事实上幷不如此。

双曲几何和椭圓几何都叫做**非欧几何**。如果从高斯曲率值的分布状况来說，可以看出欧氏几何介于椭圓几何和双曲几何之間。这从另外的观点来看，也是对的。例如，从欧氏平面除去某一圓的圓周上及此圓外的点，得到双曲平面；加添一条无穷远直綫上的点于欧氏平面，得到椭圓平面。又如，在椭圓几何里通过直綫外一点不能作它的平行綫，在欧氏几何里恰能作一条，在双曲几何里能作无穷多条。格外能够显示出三种几何的特征的是三角形的內角和。在欧氏几何里，此和等于 π。在椭圓几何里恒大于 π，这可以从球面三角学里某些熟知的定理推出来。在双曲几何里此和恒小于 π。后文将給出这句話的直观性的证明。

根据这个結果，欧氏几何中三角形內角和等于 π 这个定理不能不用平行公理而证明。因为如果不然的話，那么这个定理对于

双曲平面也要成立。另一方面，任何在双曲几何里也成立的欧氏几何定理总可以不用欧氏平行公理证明。三角形的外角定理（外角必大于其任一內对角），就是这样定理的一个例子。不过从球面三角学立刻知道，外角定理对椭圓几何不成立。由此可知，要证明这个定理，必須用到欧氏次序公理。

一个对于三种几何都成立的定理可拿等腰三角形的底角相等定理为例。这个定理的证明，既不需要次序公理也不需要关于平行性的任何假設。

我們指出过，有关交点的投影定理，例如德沙格定理，在椭圓平面上成立。在欧氏平面上，德沙格定理，像所有其他的交点定理一样，必須加进无穷远点才对。在双曲平面上，若要交点定理有一致表达的可能，必須加进两种形式的理想点：一种对应于我們的模型中的圓周上的点，一种对应于圓周外的点。举个例子，如果平面上的德沙格构形已經給出，显然我們总能够这样作双曲平面的模型的基本圓，使得构形中的九个点在圓內，第十个点在圓周上或圓外。因为构形是正則的，所以可把第十个点作为德沙格点，而我們的图形可以解釋为每对对应边交于一条双曲直綫上的两个双曲三角形。根据德沙格定理，連接对应頂点的直綫必通过一点，可是我們已經知道，这些直綫的交点不在圓內。

假如我們想要在双曲平面上直接証明德沙格定理，而不借助于模型，就要碰到像在欧氏几何和投影几何里同样的困难。德沙格定理能够用合同公理证明。如不用合同公理证明，就需借用空間作图。这是根据这样的事实：在空間也存在双曲几何学。“双曲空間”的一个模型可如此作出：把一球面內部的点、直綫段、平面片分別当作双曲空間的点、直綫、平面，并像在平面模型中那样地規定二点間的距离。

上面說过，在双曲平面上任一三角形的內角和小于 π。这个

定理从我們的模型上看不出来，因为双曲角与欧氏角不同。在下一章里我們讲另一种双曲模型，用这种模型可以补救这个缺点；这种模型是从第一个模型导出的，但它的双曲角沒有畸变。为此，我們且从初等几何的球极平面投影和保圓变换的簡单理論入手。

§36. 球极平面投影与保圓变换。双曲平面的布安加雷模型

在水平平面上放一球（图 239）。从球面上的最高点 N 把球面上的点投射到平面上来。用这种方法产生的球面的映射（图 239

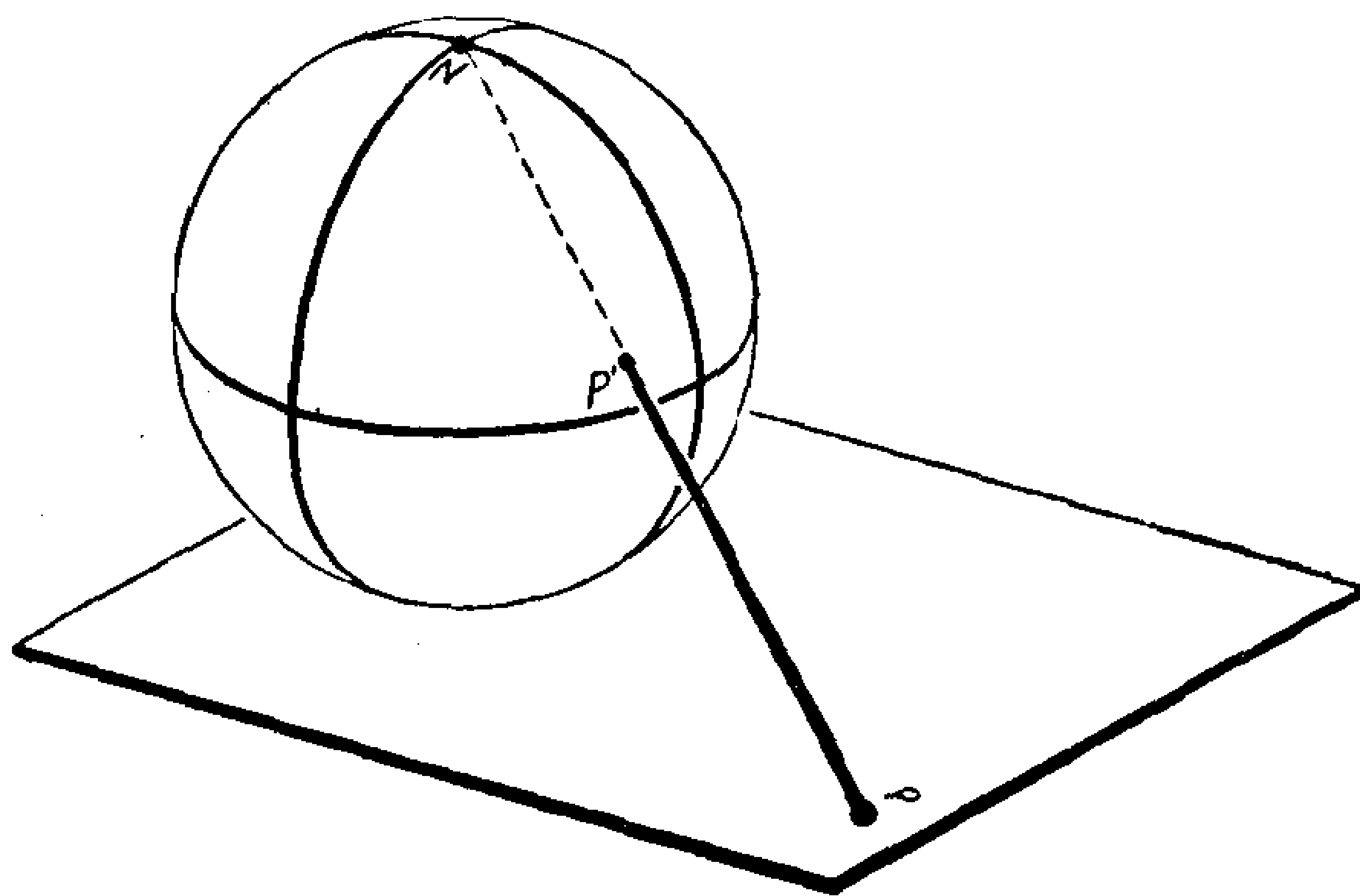


图　239

中的 $P'\to P$）叫做**球极平面投影**。用这种投影法能把球面上除 N 点外的所有点投射到整个平面上来。象平面必平行于球面在 N 点的切面 n。其次，設 p' 为球在 P' 点的切面（图 240），由于球面是完全对称的，可知平面 n 和 p' 同連接二切点的直綫 NP' 作成等

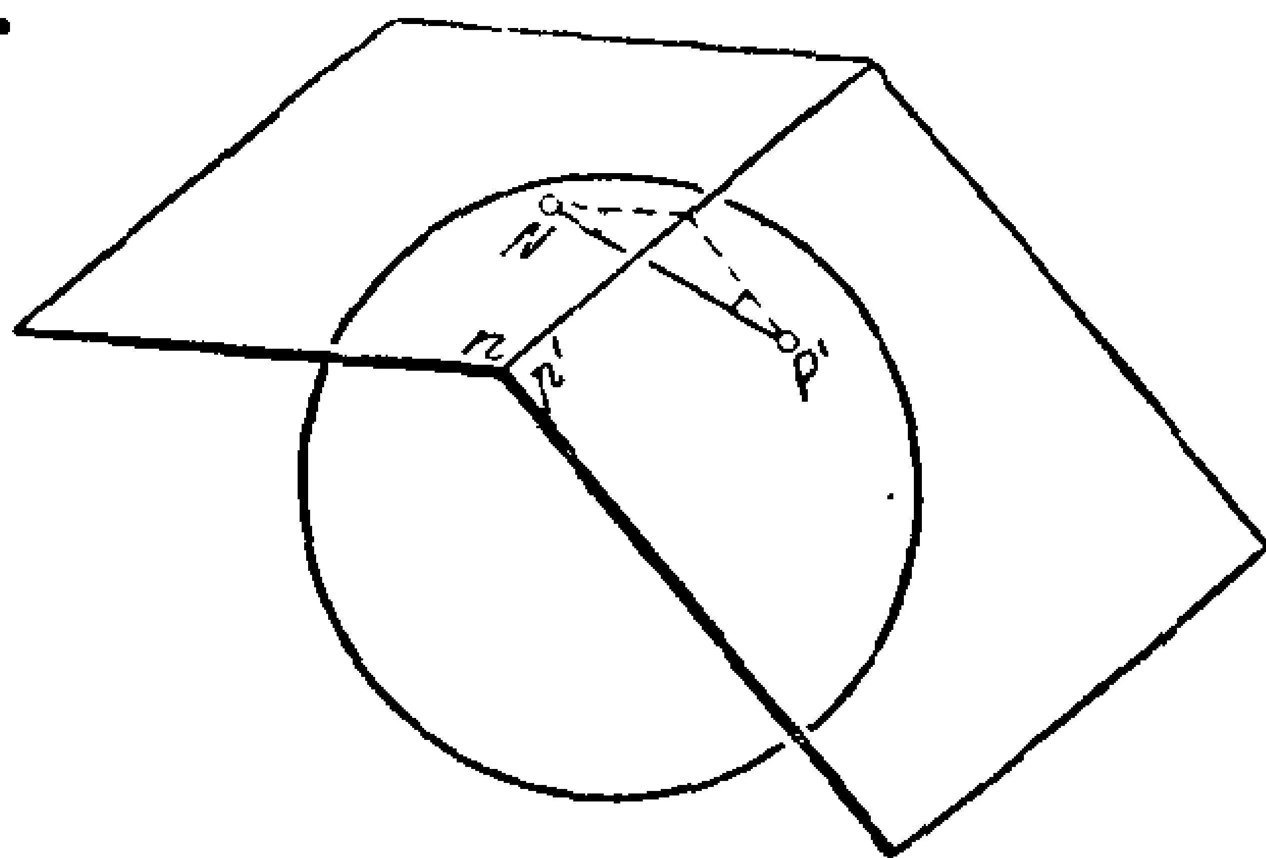


图　240

角，并且 n 和 p' 的交綫垂直于 NP。因为 n 平行于象平面，所以象平面同投影射綫 PP' 作成的角等于 p' 和 PP' 作成的角，并且它同 p' 交于一条垂直于 PP' 的直綫。从此可推出球极平面投影的几个直观上显然的性质。首先，假定 r' 是过 P' 点的一条切綫(图 241)，

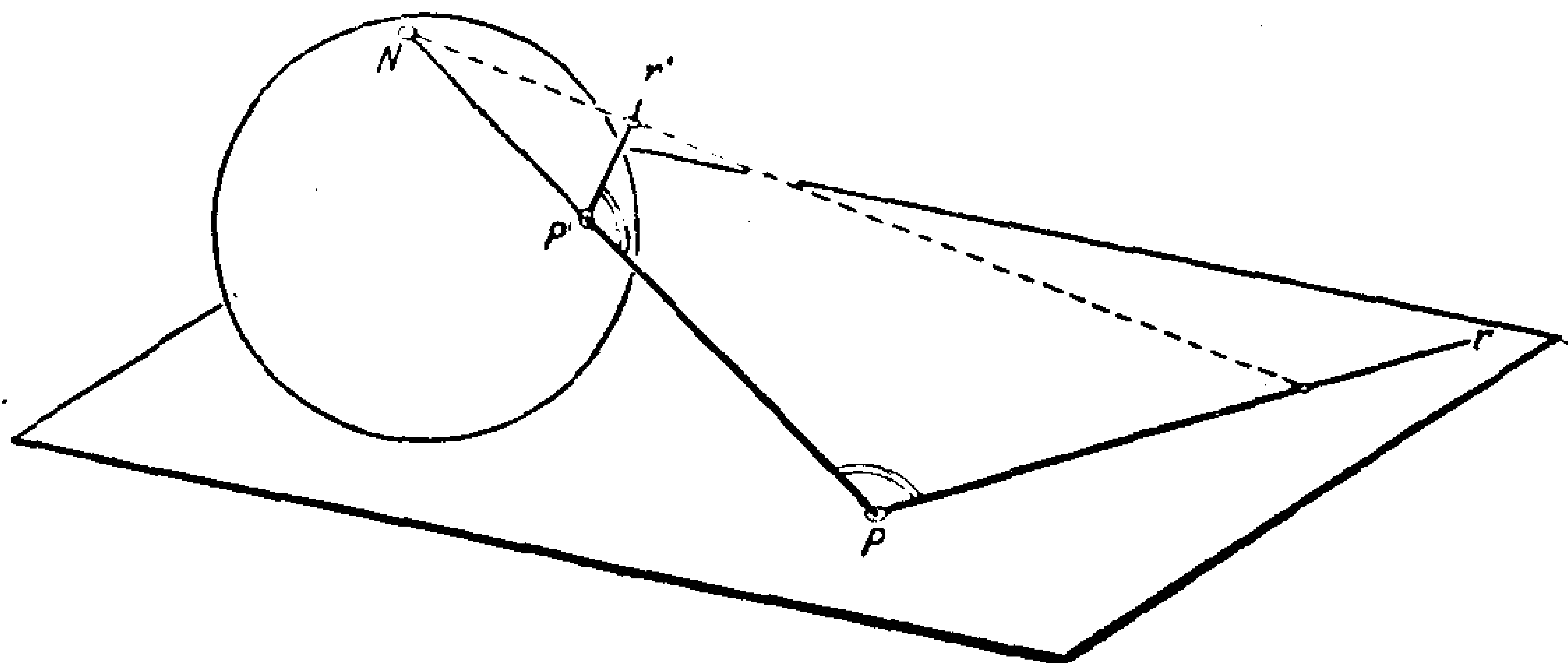


图 241

r 是 r' 的像，則 r 和 r' 分别同 PP' 作成的二角相等。因为，r 是象平面同包含 r' 与 NP' 的平面的交綫；但如果二直綫 r 和 r' 分别是过 PP' 的某一平面 e 和二平面 p, p' 的交綫，而 p 和 p' 分别同直綫 PP' 作成等角，p, p' 的交綫又同 PP' 垂直(图 242)，那么 r 和 r' 也必同 PP' 作成等角。其次，由对称关系，得到另一結果：若 s' 是球面的另一切綫，以 s 为象，則 r 和 s 作成的角等于 r' 和 s' 作成的角。这就是說，**球面上的角在球极平面投影下不发生畸变**。由于这种原因，这种映射叫做**保角映射**或**等角映射**，又叫做**保形映射**。

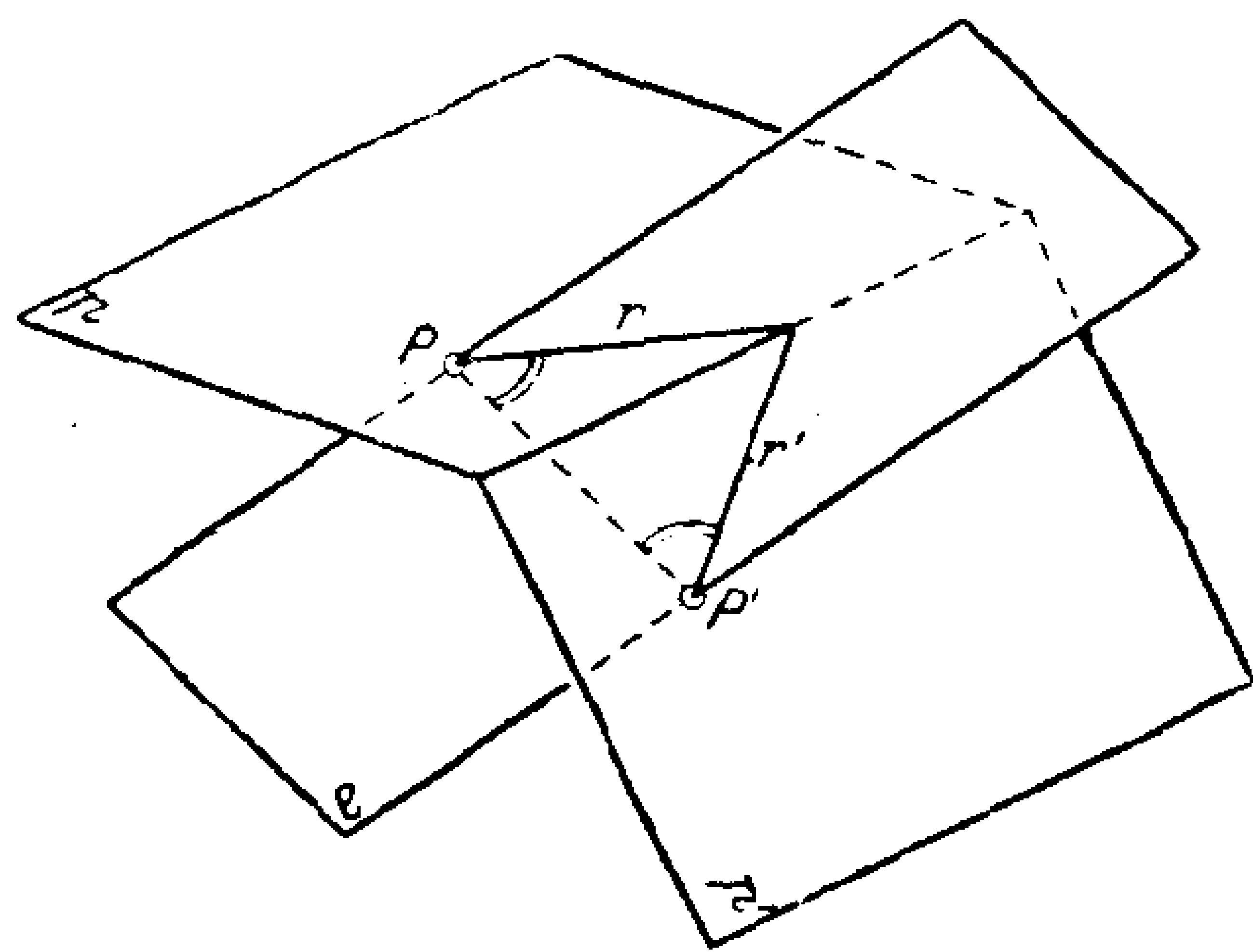


图 242

現在，設 k' 是球面上不过 N 点的任一圓(图 243)。过 k' 上各

点向球面作切面，则切面包络一圆錐面。設錐面的頂点为 S。因为 k' 不过 N，则 NS 不同球面切于 N，因此不平行于象平面。設 M 为 NS 同象平面的交点。我們要证明 k' 的象 k 是以 M 为心的圓。证明不难从图 243 上看出来。設 P' 是 k' 上的任一点，而 P 是其象，则 $P'S$ 同球面切于 P'，而 MP 是其象。因此 $\angle PP'S=$

图 243

$=\angle P'PM$。过 S 作 PM 的平行綫，設 P'' 是平行綫同 NP 的交点。則或者 P'' 与 P' 重合，或者三角形在 P'、P'' 作成等角，因而它是个等腰三角形：$SP'=SP''$。但 $\frac{PM}{P'S}=\frac{PM}{P''S}=\frac{MN}{SN}$，或 $PM=$ $=P'S\cdot\frac{MN}{SN}$。$P'S$ 为一常数，因为 S 同 k' 上所有点的距离相等。因此从最后一式可知 PM 也是常数。換句話說，k 是以 M 为心的圓。

这样一来，球面上所有不通过 N 点的圓，經过球极平面投影，投射到平面上的象还是圓。把上面的論述逆推，可知每个在象平面上的圓是球面上圓的象。如果圓在球面上自由移动，以过 N 点

的圆为极限，則 NS 趋近于球面的过 N 点的切綫，因而 M 走向无穷远。由此可以推知，球面上过 N 点的圓的象是象平面上的直綫。这个事实很明显，甚至无須借助极限过程即可知道。因为球面上过 N 点的圓的投射綫在圓的平面上，因此这个平面和象平面的交綫就是圓的象。总起来說，經过球极平面投影，球面上所有的圓的集合对应象平面上的圓和直綫的集合。球极平面投影是**保圓投影**。

現在考虑球面到本身上的任一映射 a'，此 a' 将所有的圓映成圓。例如，a' 可以是球面繞任一直徑的旋轉(直徑不一定通过 N)。施用球极平面投影的結果，映射 a' 将产生象平面到本身上的一个映射 a。这 a 将所有的圓和直綫仍映成圓和直綫。平面到平面本身上的这种映射叫做**保圓变換**。

在欧氏平面上，保圓变換一般不是一对一的，这是因为在球极平面投影之下，平面上沒有和球面上 N 点对应的点。球面映射 a' 一般不保持 N 点不动，而是把另一点 P'——P' 的球极平面投影我們用 P 表示——变到 N。这样一来，平面上 P 点在对应 a' 的保圓变換 a 之下将沒有象点。为了消除在映射过程中这一例外情况，我們仿照投影几何的办法，把欧氏平面抽象地加以扩充。把欧氏平面补充以一組"无穷远"点之后得到投影平面；而保圓变換理論所作的扩充則是在欧氏平面上增加一个"无穷远"点 U，这 U 被看作是在球极平面投影下 N 的象。平面經如此扩充之后，它和球面的关系便成为一对一的，并且是連續的，而保圓变換成为一对一的映射；在上述例子里，P 点經保圓映射 a 而变成 U，其对应的球面到自身上的映射 a' 显然把过 P' 的圓变成过 N 的圓。因此 a 把过 P 的諸圓变成平面上的諸直綫。由于这个原故，为方便起見，把直綫看作是"通过无穷远点的圓"。在保圓变換下，平行直綫的象或者还是平行直綫本身，或者是相切的圓。

保圆变换的很淺显的例子是剛体运动、反射和平面上的相似变换。这三种变换把欧氏平面一对一地映成自己，因此如果我們用增加U的办法来扩充平面，我們可以說这三种变换是保留U不动的保圆变换。反轉来也可以证明，这三种平面变换是保留U不动的仅有的保圆变换。根据这个定理，我們可以概括地描述全部的平面保圆变换。試考虑一已給的保圆变换a_0。設P是平面上的点，在a_0之下它的象是U；設P又是球面上P'点的球极平面投影。現在对球面施加一旋轉a'使P'变成N。則和旋轉a'对应的有某一保圆变换a，而且a的性质和a'的性质有一种很簡单的显明的关系。同a一样，已給变换a_0把P变成U，因此变换a_0和a只能相差一个保留U不动的保圆变换。由此可見，按方才讲过的定理，除了可能相差一个剛体运动、反射或相似变换外，a_0恒等于a。

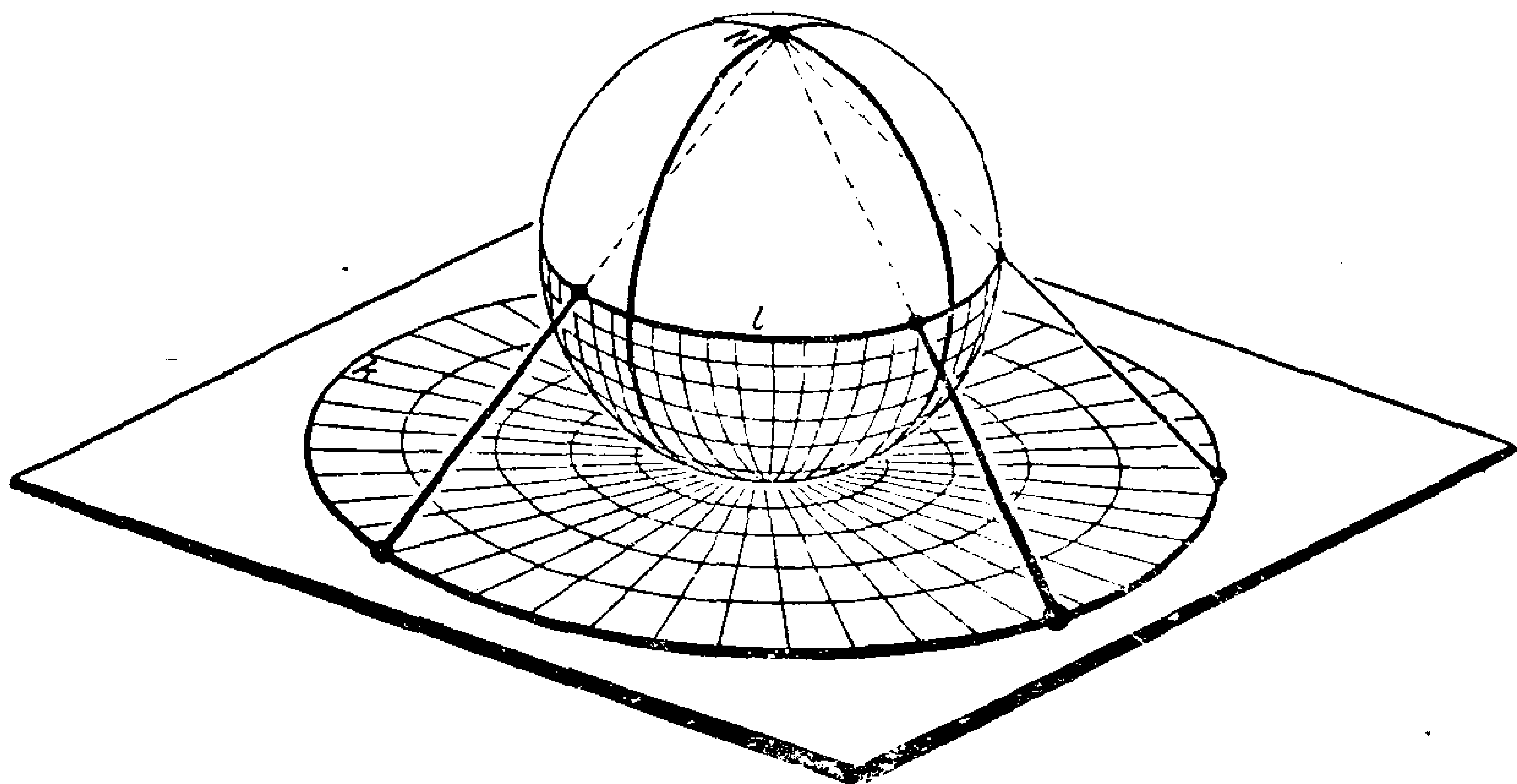


图 244 a

前面說过，球极平面投影是保留角不变的。因为旋轉a'是球面的一个保角变换，a是在球极平面投影之下由a'而得，所以a一定是平面的保角变换。因为a_0和a最多差一保角变换，由此可知，所有的保圆变换都是保角变换。

在图 244a 和 b 中，映射 a 和 a' 之間的关系，利用平面上一个用粗綫画出的圓 k 来表明，这个圓通过 P 点并且是球面上大圓 l 的球极投影。經过映射 a，l 变到通过 N 的大圓 n，而 n 的象則是

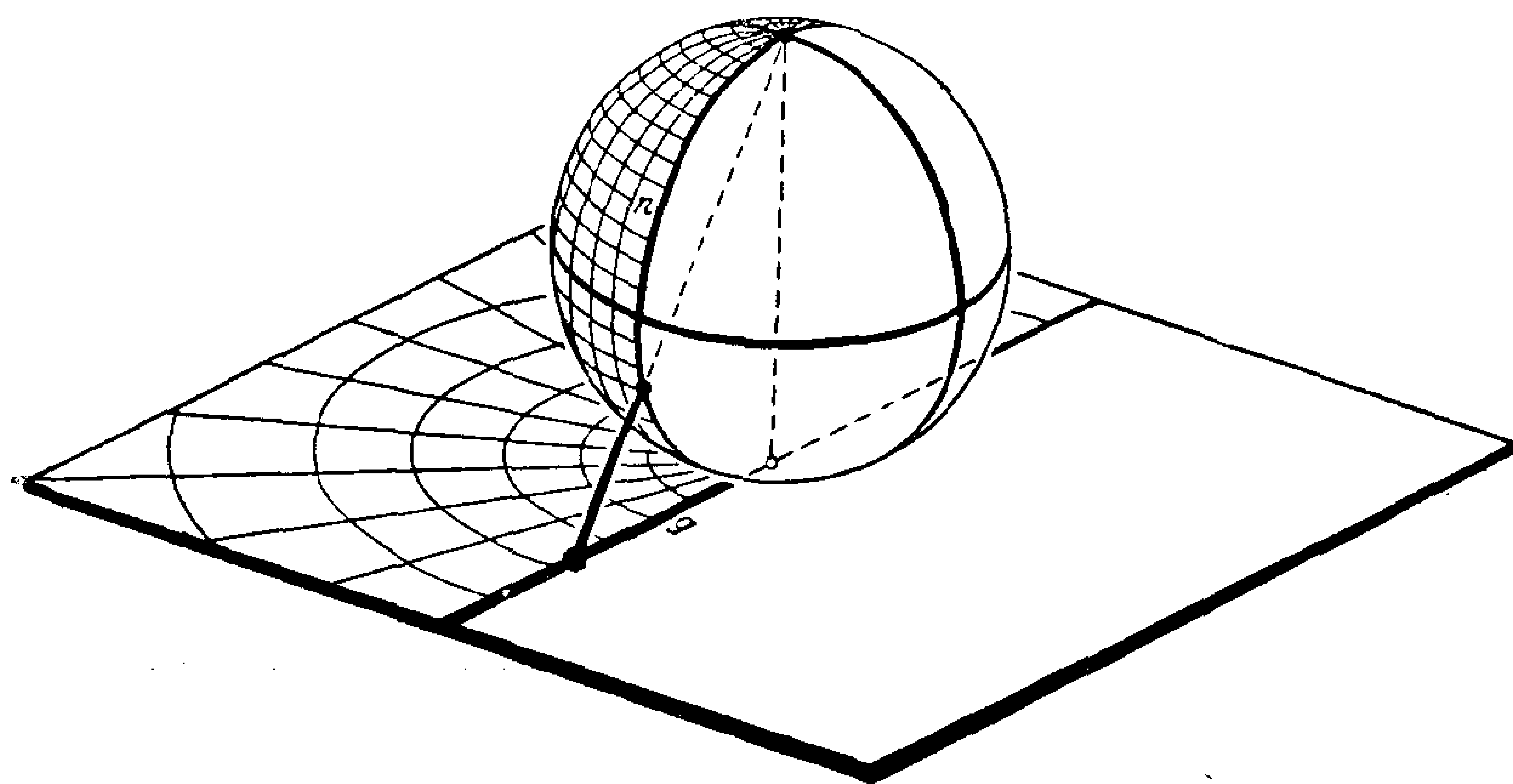


图 244 b

直綫 g。这样，映射 a 把圓 k 变为直綫 g。从图上显然还可以看出，k 的內部和外部变換到以 g 为界的两个半平面上去；当然这从連續性的观点来看也容易知道是对的。

平面对于 g 的反射 u 是保圓变換，由于这个原故，映射 $i=$ $=aua^{-1}$ 是一保圓变換，它保留圓周 k 上的点不动，而把圓內外部的点互換了位置。映射 i 叫做对于圓 k 的反演，或者叫做对于圓 k 的反射，又叫做平面的逆矢徑变換。这类变換特别重要，因此我們較为詳細地讲讲。

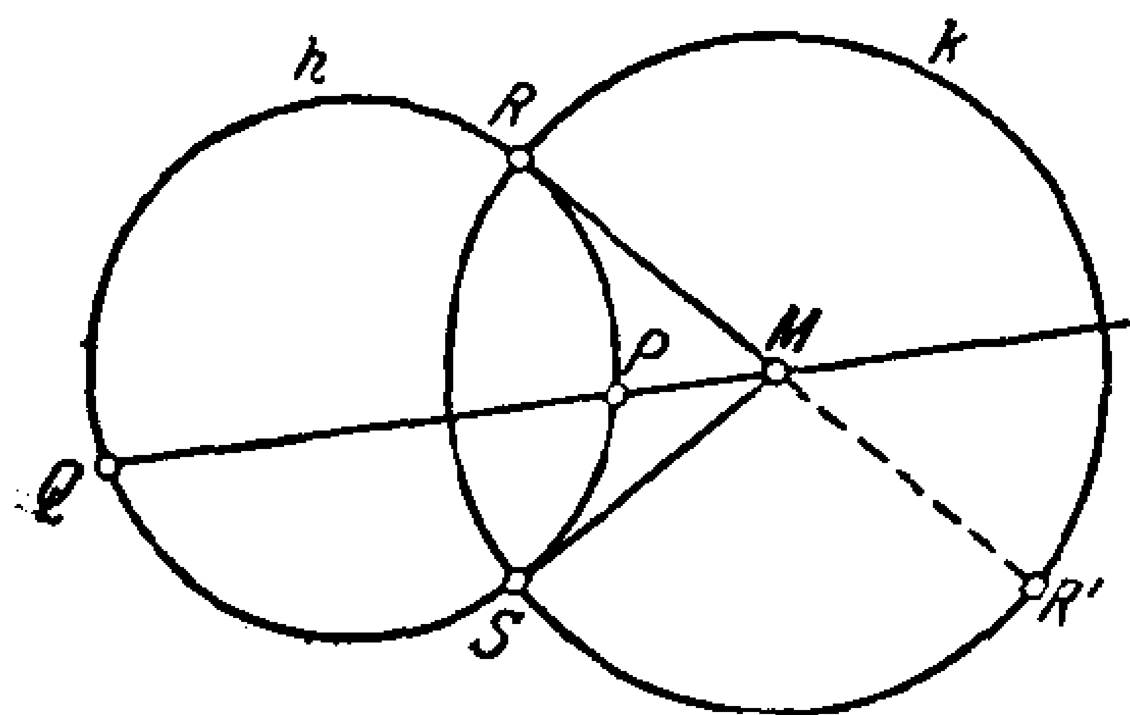


图 245

設 h 是同 k 正交于 R 的圓(图 245)。則 h 和 k 有另一公共点 S，在这一点处二圓也正交。

在R点和S点处对h的切綫是k圆的半徑，它們必交于k圆的圆心M。从而可知，M在h的外部。設反演i把圆h变成另一圆h'，这个圆也必通过R, S，因为R和S是不动点。由于反演是保角变换，所以h'也同k正交于R和S，但这只有当h'恒等于h时才有可能。因此任一同圆k正交的圆h經反演之后都变成自身。因为圆k的內外部互換，所以k划分h所成的二圆弧也必互換。

現在考虑通过M的一条直綫l，比如說RM，命l同k的第二个交点为R'(图245)。那么l必变换为一圆或一直綫l'，而它在R和R'处同k正交。这只有当l'恒等于l时才有可能。因此反演把k的每一直徑变成自身。因为在扩充平面上这些直綫的公共点只能是M和无穷远点U，所以反演把M和U对換。由此可見，不通过M的直綫的集合与通过M的圆的集合应該互換。

今命P是h上不同于R和S的一点，經反演i之后，P的象只能是直綫MP和h相交的第二个交点Q，因为MP和h都映成自身。根据初等几何里的圆的一个交弦定理，我們有$MP\cdot MQ=$ $=MR^2$。Q叫做P对于圆k的**反演点**。这样，我們找到了一种不用作輔助圆h即可决定任一点P对于k的反演点的方法：設r是k的半徑，P的反演点Q是射綫MP上由$MP\cdot MQ=r^2$决定的一点。

可以证明，每一保圆变换能表为最多三个反演的合成。現在考虑一种特殊保圆变换集合，它們把已知圆周k变为自身，k的內部变为自身，显然这些变換作成一群，今用H表之。若n是同k正交的一个圆，則对于n的反演必然屬于H。可以证明，群H的每一映射，都可以由三个对于和k正交的圆的反演产生，即由都屬于H的三个反演产生。

現在把上面的討論同以前作过的双曲模型結合起来看。設水平平面上圆m的內部代表双曲平面。在平面上放一个半徑和m相

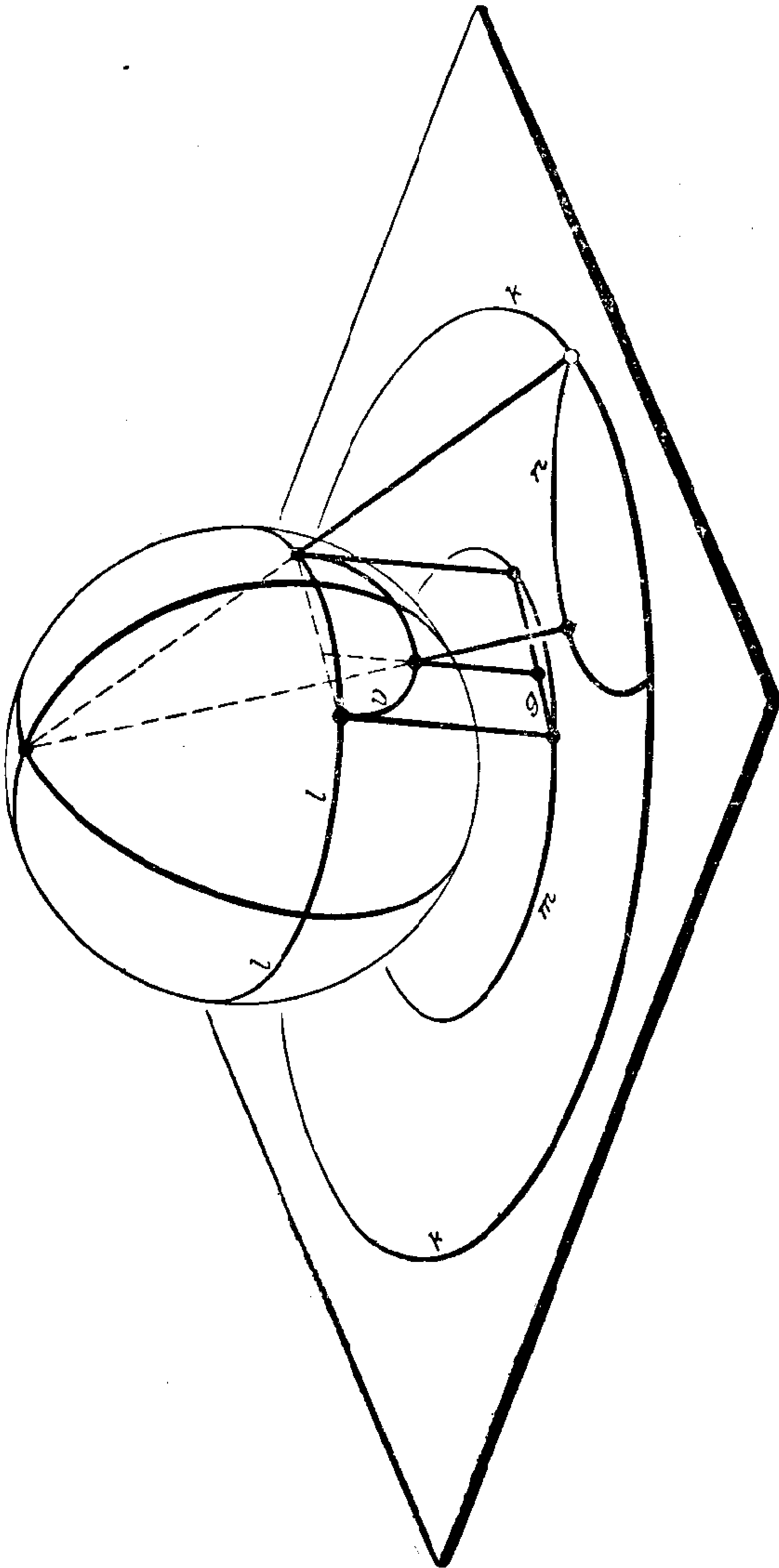


图 246

同的球，让球面在 m 的圆心处同平面相切（图 246）。用正平行投影法把 m 的圆周及其内部映射到以大圆 l（和 m 合同）为边界的下半个球面上去。用这种投影法半个球面就变成双曲平面的一个新模型。m 的每个弦映射到球面上成为同 l 正交的半圆 v，因而这些半圆应該看作是双曲直綫的象。現在用球极平面投影法将半球面映回到平面上。經过这次投射，半球面的象复盖一个圆 k 的內部，因而 k 成为双曲平面的一个新模型。由于球极平面投影有保角和保圆性质，因此 v 在这个模型里将变为同 k 圆正交的圆弧 n。此处和以后，圆 k 的直徑也应看作这种圆弧 n 的极限情形。

这个新模型是布安加雷首創的。让我們对它作更进一步的研究。从上面的推导过程可知，正交于 k 的所有圆弧的集合和圆 m 中的所有弦的集合之間构成一一对应。因此过 k 圆内部任意两点 A, B，能連一条且仅一条正交于 k 的圆弧。設 R 和 S 是这条連接 A, B 的弧同 k 的交点（图 247），則两点 A, B 之間的双曲距离可由第 243 頁上的公式 (1) 得出。事实上，設 A', B', R', S' 是在上述作图中产生 A, B, R, S 的原模型的点，則由投影几何的定理可推出下面的关系

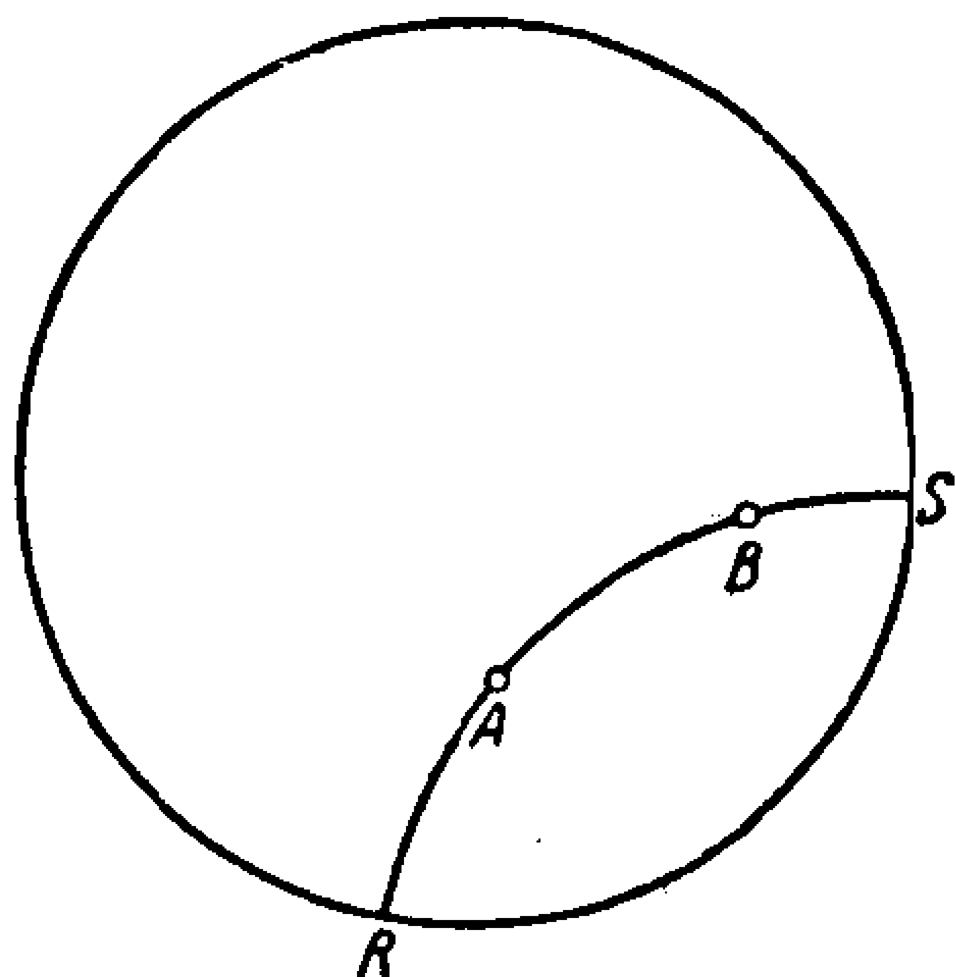


图 247

$$\frac{AR\cdot BS}{BR\cdot AS}=\sqrt{\frac{A'R'\cdot B'S'}{B'R'\cdot A'S'}}. \tag{1}$$

由此推出在我們的新模型中两点 A, B 之間的双曲距离 S 的公式：

$$s=c\left|\ln\frac{AR\cdot BS}{BR\cdot AS}\right|. \tag{2}$$

現在我們說，在双曲平面上的任何剛体运动必然对应圆 k 的內部的某一映射 α，这映射将垂直于圆 k 的圆弧的集合变成自身。

容易理解,也不难严格证明,这种映射是保圆映射,因此属于上面所說的群H。此外,还可以证明,群H就等于整个双曲剛体运动群[①]。群H的变换旣然是保圆的,所以也是保角的。又由于它們代表双曲剛体运动,所以保持双曲角不变。由此可知,在布安加雷模型中的欧氏角等于双曲角乘以一定的比例系数。因为在双曲平面上一完全旋轉角2π显然不变,所以比例系数应該等于一。因此布安加雷模型是保角的。

用解析方法可以建立一个保角映射变换公式,把一給定的負常数曲率曲面片直接映成圆k内部的部分平面,并使测地綫变换成正交于k的圆弧。

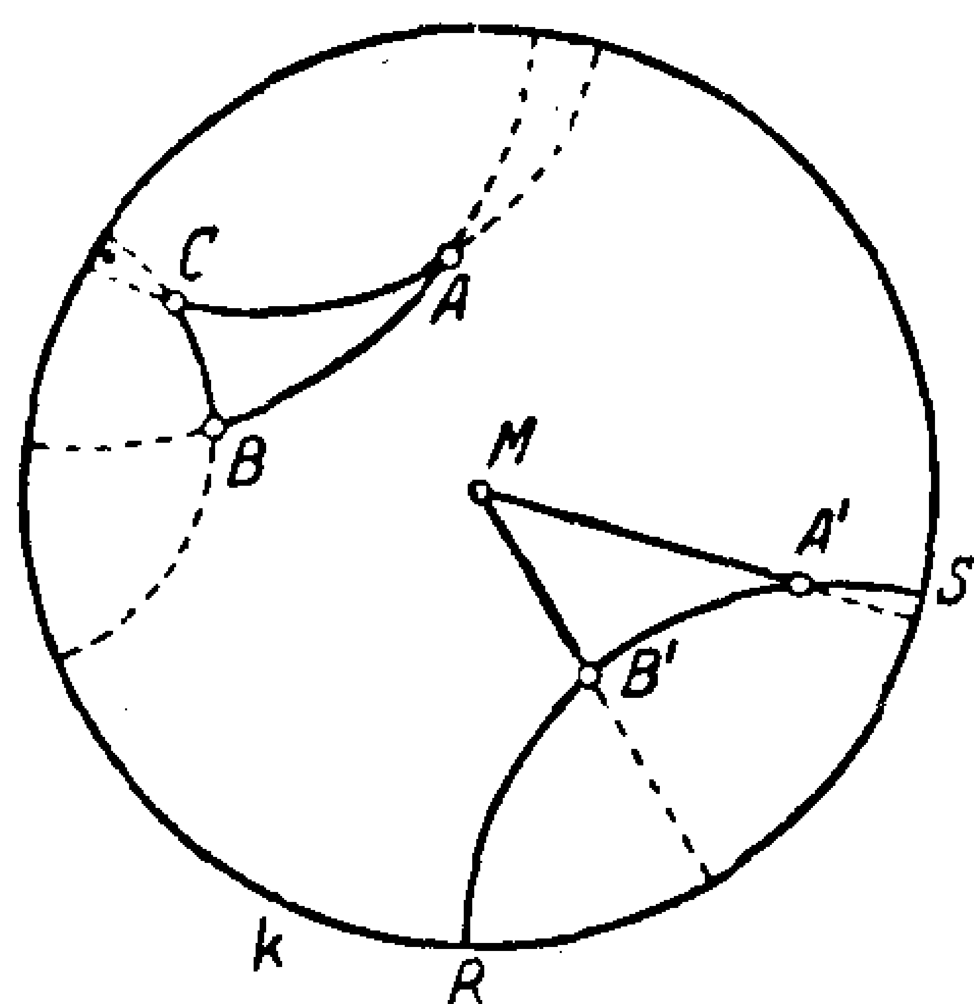


图 248

现在我們回头来补证在第245頁上提过的定理:双曲几何中任一三角形的內角和小于π。从双曲平面布安加雷模型的任一三角形ABC說起(图248)。我們知道諸合同公理在双曲平面上成立。按照这些公理,作与三角形ABC合同的三角形$A'B'M$,其中与C对应的点是圆k的圆心M。在第252頁上我們看到通过M同k正交的任一圆退化为k的直徑,同时M在所有同k正交的其他圆之外。因此在我們的模型里,双曲直綫$A'M$和$B'M$用欧氏直綫表示,而双曲直綫$A'B'$用圆弧表示,M在圆弧之外。因此由二直綫和一圆弧所作成的三角形$A'B'M'$中,在A'和B'处的欧氏角分别小于直綫三角形$A'B'M$在A'和B'处的欧氏角,可見前一三角形的

① 这里的剛体运动包括所有的保持距离不变的双曲平面的映射,即使它們不是連續产生的。不是連續产生的簡单剛体运动可用H內的任一反演为代表;这就是双曲平面对于一直綫的"反射"。根据第253頁上讲的,每一双曲剛体运动可以表为最多三个反射的結果。

內角和小于 π。由于模型是保角的，这一結論对于双曲三角形 $A'B'M$ 以及跟它合同的三角形 ABC 的双曲角之和也成立。

研究双曲剛体运动时自然会想到去找这种运动的不連續群。我們知道，在橢圓几何的情形，問題引到正多面体上去，同时又知道在橢圓平面上仅有少数的不連續群。在欧氏几何里要找出所有的不連續群已相当困难；在双曲平面上，不連續群的数目，还要远远超过在欧氏平面上的。所有的这些不連續双曲剛体运动群，在布安加雷模型中都可以用保圓变换群 H 的子群来表現。

这些群在函数論里起作用。其中最重要的是“双曲平移群”。所謂双曲平移是說可以連續地从恒等变换得出而且不保留任何不动点的任一双曲剛体运动。在平面橢圓几何里，沒有和这个类似的剛体运动，因为在橢圓平面上的任一剛体运动都有一不动点。在欧氏几何里，和双曲平移类似的是通常的平移。但是双曲平移的合成不像欧氏平移的合成那样遵循簡单的規律，因为在双曲平面上平行綫沒有唯一性。

以下我們只談那有閉合的基本区域的不連續双曲平移群。它們同以平行四边形为基本区域的欧氏平移群相似。在有閉合的基本区域的双曲平移群中基本区域决不会是四边形。另一方面，基本区域的隅角数是能被 4 除尽的任何数，但 4 本身是例外。图 249 表示双曲平面被八角形的基本区域复盖的情况，而双曲平面是用布安加雷模型表示的。自然我們不能画出整个平面的复盖情形，因为由圓弧組成的八角形越靠近圓周就越拥挤。在我們的基本区域里，如同欧氏平移群基本平行四边形的情况一样，基本区域的边两两相等且等价。在图 249 上标出了一个基本区域的边配对的情况。所有的基本区域的頂点均已标上了号数，不同基本区域的对应頂点标以相同的号数。从图上可以看出，圍繞任意选定的頂点 A，每一数字恰好出現一次。由此可知基本区域的角的和应該等于 2π。

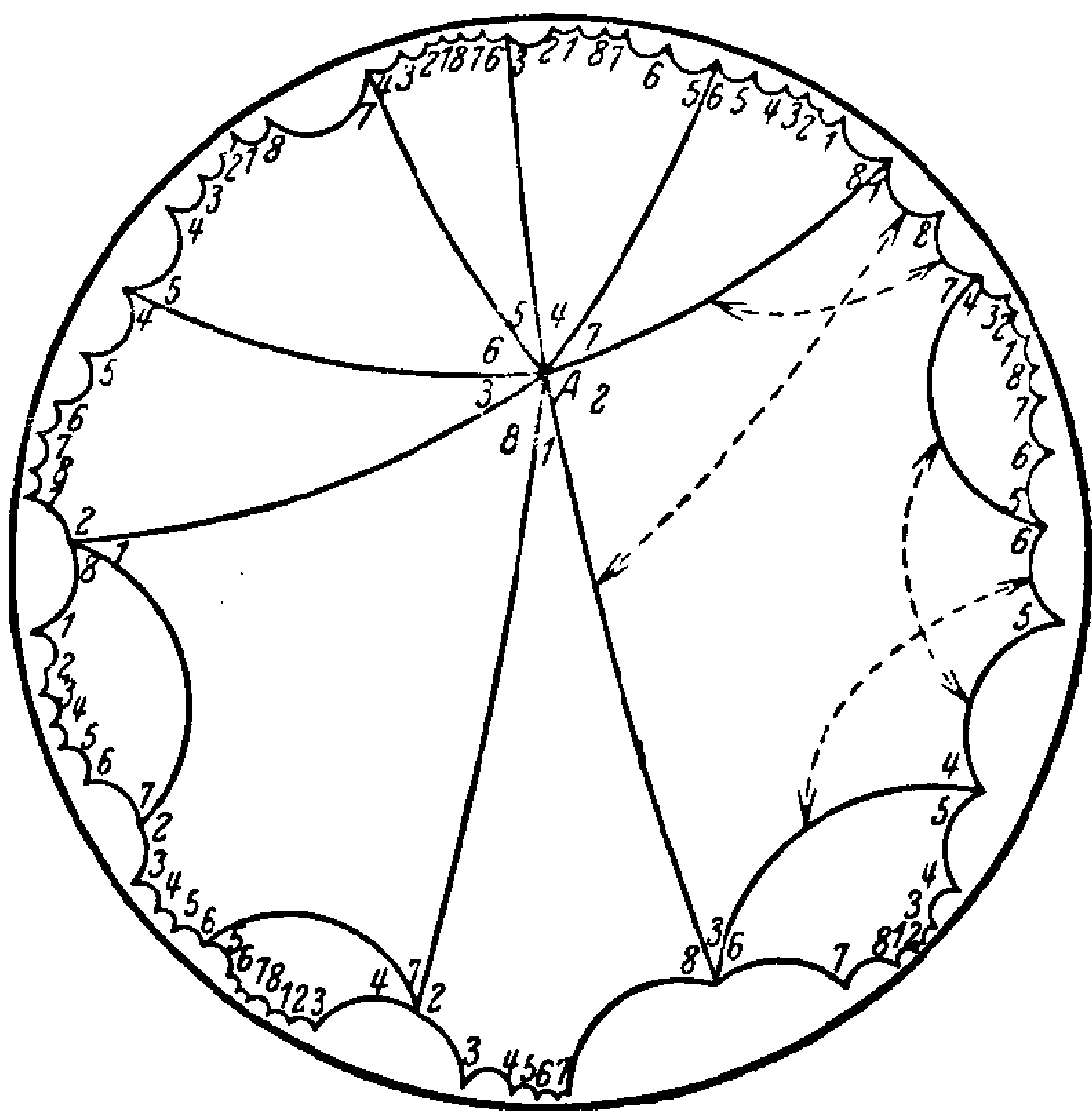


图 249

在其他的平移群里，基本区域分布的情况与此类似。所以在任何情况下基本区域的角的和等于2π。再有，基本区域的边两两相等，至于配对的情况也有一定的規則，这里我們不多讲了；除此之外，基本区域是可以任意做成的。从角的和等于2π这一事实，我們懂得了为什么基本区域不能是四边形的。因为，双曲四边形的角和永远小于2π，这只要把四边形分作两个三角形即可看出。

有开的基本区域的双曲平移群为数甚多，其中有一个群在橢圓模函数論里有用处。

§37. 映射方法。等距、保积、短程、連續与保形映射

我們已經用过好多种不同的映射方法把一曲面映成另一曲面，例如用中心投影法或平行法綫映射法。在这一节里我們綜合地概述最重要的映射类型，幷加以比較。

等距映射或保长映射，給出曲面最忠实的象。在这种映射中任意两点的短程距等于它們的象点的短程距，所有的角保持不变，所有的短程綫映成短程綫。前面讲过，任意二曲面一般不能等距地相互映射，因为成等距映射关系的曲面在对应点处的高斯曲率必須相等。因此只有高斯曲率到处为零的曲面片才能等距地映成平面的一部分。这样說来，比方說，一片球面就不可能等距地映到平面上。由此可見，一張地图总难免有失眞現象。

精确程度較差，但应用很广的是保积映射。保积映射的特点是任一閉曲綫所包圍的曲面面积經映射不变。容易理解，也不难证明，这个条件对于任意閉曲綫都适合，只要它对所有的"无穷小"的閉曲綫都适合就可以。由此可見，保积映象容易从微分几何的观点来刻划。

保积映象时常用于地理学。有一种簡单的办法产生部分球面到部分平面的保积映射。把球面裹以半徑和它相等的柱面(图 250)。把球面上的点沿柱面的法綫投射到柱面上去，沿柱面一母綫切开柱面，摊开使成为平面，結果就是球面在平面上的保积映象，这可以由計算驗证。显然生成的象距离球面与柱面相切的大圓越远，誤差越大。

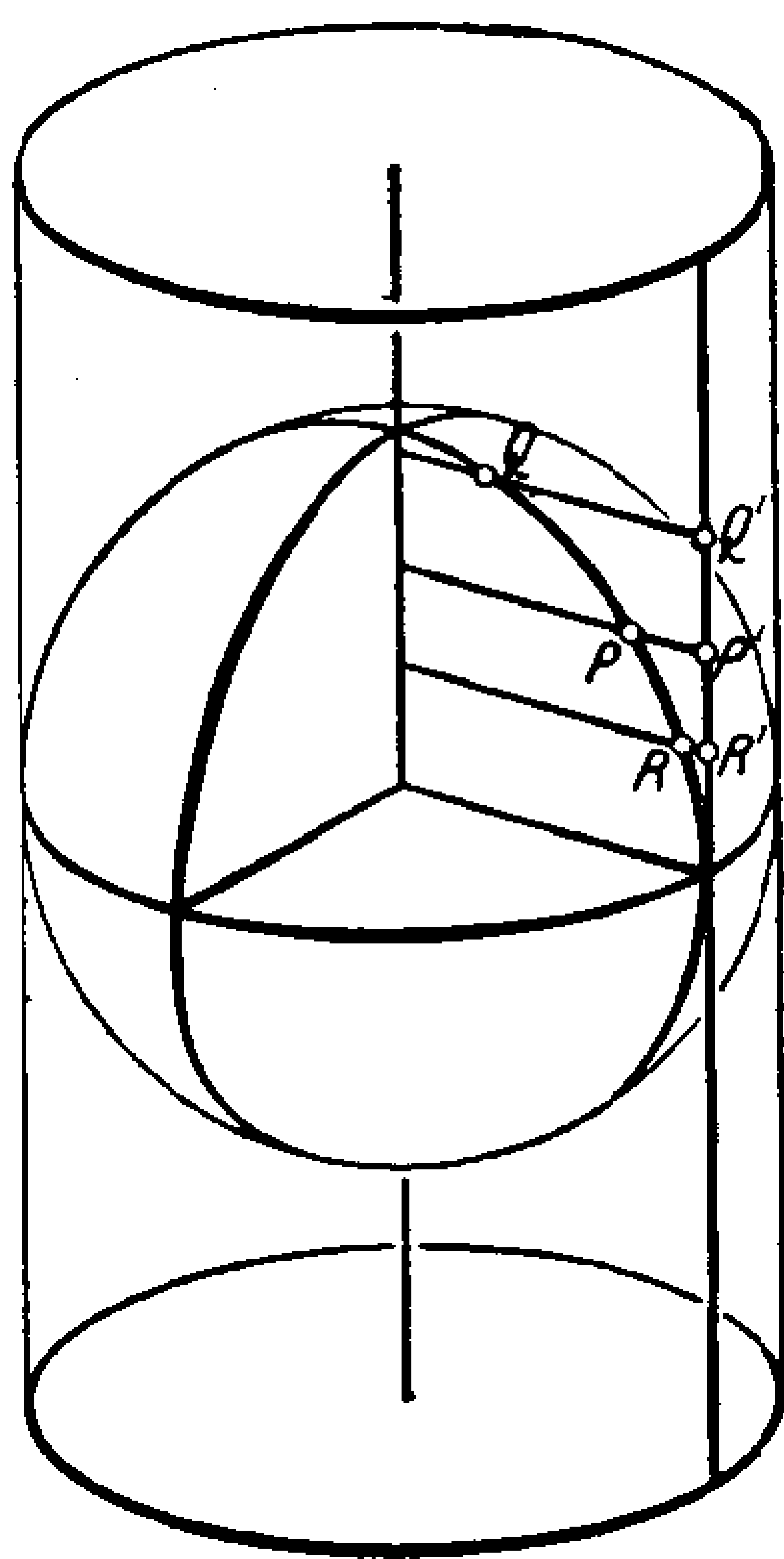


图 250

另一种在地理学上很重要，对于航海地图尤为有用的映射是短程映射。这里要求一片曲面的短程綫映成另一片曲面的短程綫。这样說来，等距映射是短程映射的特例。短程映射的另一例子已在研究橢圓几何时考慮过了：如将球面从球心投射成平面，則大圓映成平面的直綫，因而映射是短程的。同时，这又給出从所有正常

数高斯曲率曲面到平面的短程映射，因为这类曲面都可以等距地映射到球面上。所有負常数高斯曲率曲面也可以用短程映射映到平面上。这可以利用 § 35 讲过的双曲平面的模型来实現。

可以证明，除了常数高斯曲率曲面之外，再沒有别的曲面能够短程地映到平面上。关于二弯曲曲面能够相互短程映射的一般問題要作繁难的計算。这个問題在三維空間或更高維空間中的推广对現代物理学起一定的作用，因为广义相对論的观点认为质点运动的軌道是四維連續統的短程綫。

容易为直观接受的最一般的映射是連續映射。这里只要求映射是一对一的，并且邻点变为邻点。这样一来，連續映射的图形可以經受任何畸变，但相邻两块不得撕开，也不得粘連。这种映射虽然有很大的一般性，但是連續映射不能把任意二曲面之一映成其余一个，举例說明：圓面(域)和介于二同心圓間的平环面不能連續地相互映射(图 251)。其实，我們甚至不能把两个曲面的边緣連續地相互映射，这是由于圓面以一条連續曲綫作边緣，而平环面有两条边緣曲綫。

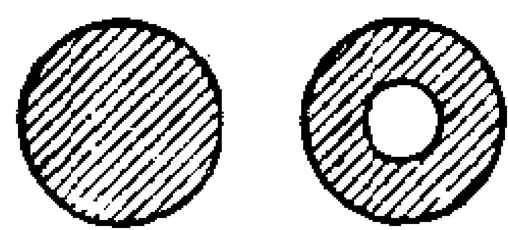


图 251

两片曲面何时能够連續地相互映射是拓扑学中的問題。这个課題我們留在下一章論述。連續映射显然包括我們前面讲过的所有的映射类型。这样，一几何映射，只有是連續的时候，才能产生許多有用的結果。例如，图 250 給出的映射，将球面片保积地映到平面上。显然整个球面映成了矩形域。可以看出，在矩形边緣上的映射失去直观的意义，因为在这里映射不連續。在現代的拓扑学里还討論到更一般的映射，它不是一对一的，而仅是在一个方向上单値且連續的；例如一片曲面变换成一段曲綫。

我們从前提到过的各种映射中，研究得最仔細的要算保角(或称保形)映射。这类映射的特征是二曲綫的交角經映射不变。假如我們不算保长映射，最簡单的保形映射是球极平面投影和保圓变

换。双曲几何的布安加雷模型則代表負高斯曲率曲面到平面上的保角映射。

保角映射和保长映射有一个相同的性质。这是說，用解析方法可以证明，很小的图形經过保角映射，几乎沒有什么畸变。特别地，不仅角近似不变，就連距离之比——不是距离本身——也近似不变，并且图形越小，近似程度越高。保形一詞即出于这个性质。因此从微观上来看，保形映射比起前面我們描述过的所有其他类型的映射来，更接近于保长映射；因为从我們举过的一些例子显然可以看出，即使在任意小的图形里，保积映射和短程映射也可以产生很大的畸变。

保长映射的应用范圍比較狹窄，但保角映射由于它有較大的适应性能，用途比較广泛，因之在許多富有成果的几何研究中占有中心的地位。这类問題当中最簡单的是二平面区域在什么条件下可以保角映射，由此可以导出复数的一种几何解释。这个問題将在几何函数論里研究。

§38. 几何函数論。黎曼映射定理。空間保形映射

假定在平面上取好了笛卡儿坐标系。对于坐标为 x, y 的任一点 P 我們配以复数 $z=x+iy$。这样就产生复数与平面的点之間的一一对应关系。为求对应完全起見，我們把无穷远点 P_∞ 也加到平面上来，正如在保圓变换理論里作过的一样，并給这个点配以"数"∞。复数的这种直观的表示叫做复平面。

利用上述方法，一片平面到另一片平面的映射一变而为复数之間的对应关系。举一个最簡单的例子：考虑关系 $w=az+b$，其中的 a, b 是任意的复常数，而且 $a\neq 0$。給定任一复数 z，我們把对应 $w=az+b$ 的点当作对应 z 的点的象。用这种方法得出来的平

面到本身的映射，不是别的，正是相似变换。反过来，所有能由恒等变换連續产生的相似变换，均可以由 a, b 取遍所有的复数值（但 $a=0$ 除外）而得。那些不能在平面本身上由恒等变换連續产生而是包含平面的反射（或翻轉）的相似变换，其对应的方程是 $w=$ $=a\bar{z}+b$，其中的 $\bar{z}$ 表示 $z=x+iy$ 的共軛复数 $\bar{z}=x-iy$。这些定理的证明都是初等的。

不保持 P_∞ 点不动的保圓变换，假如我們只考虑在平面上从恒等变换連續产生的那些保圓变换，对应分式綫性变换

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\ (c\neq 0, ad-bc\neq 0). \tag{1}$$

至于其余的保圓变换可于(1)中以 $\bar{z}$ 代替 z 而得。例如，对于以原点为中心、半徑为一单位的圓 k 的反演用公式 $w=\dfrac{1}{\bar{z}}$ 表示。因为，

$$w=u+iv=\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{x-iy}=\frac{x+iy}{x^2+y^2},$$

因此，

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{2}$$

設有 M, P, Q 三点，其坐标依順序为 $(0, 0)$，(x, y)，(u, v)，而 P, Q 与 z 和 w 二数对应，則由(2)得知 P 和 Q 都在从 M 出发的同一射綫上，并且距离 MP 和 MQ 适合条件 $MP\cdot MQ=1$。这就证明了 P 和 Q 确是对于 k 的反演点。

从較为一般的关系 $w=f(z)$ 来看，其中 $f(z)$ 为 z 的任意的有理分式函数，我們說这样的函数也一定实現平面的保形映射。此处須稍加限制：平面域中不包括依函数而定的某些点。

只要是 $w=f(z)$ 决定复平面的一个保形映射，这个函数 $f(z)$ 就叫做解析函数[①]。不仅有理函数是解析函数，我們在实用上碰

① 这个几何定义同条件 $f(z)$ 是可微分的等价，即在区域内的 z 趋近于区域内的任一点 z_0 时，$[f(z)-f(z_0)]/z-z_0$ 趋于一复数 $f'(z_0)$。这条件的重要部分是 $f'(z_0)$ 与复平面的区域里 z 趋近于 z_0 的路徑无关。

到的函数几乎都是解析函数。解析函数的計算，絕大部分可依照实变数的实値函数的規則进行。因此二維保形映射問題可按一維的方式来研究。

应用这种复变函数論的研究方法首先我們能证明一重要定理：保圓变換，也可以說，整式綫性函数和分式綫性函数，代表所有从一圓的內部到另一圓（或同圓）的內部或外部的保形变換。由此可知，在布安加雷模型中的双曲剛体运动，代表所有将一圓面映成本身的保形变換。因此任一保形变換，只要知道一个圓面变換后成为哪一个区域，那么除了一个双曲剛体运动外，它就完全被确定了。正因为这个原故，除了一个非本质的变換外，一个解析函数能够用它将一个圓面映射所成的区域来刻划。这时我們认为經过保圓变換可以互相变換的两个区域，本质上无区别。例如圓面可以用半平面代替。这样，函数$\sqrt{z}$把半平面变为一象限，函数 $\ln z$ 把半平面变为以二平行直綫为边緣的区域。所以利用綫性变換容易作一保形变換，将画在图 252 上圓面变为这張图上的另外二区域之一。

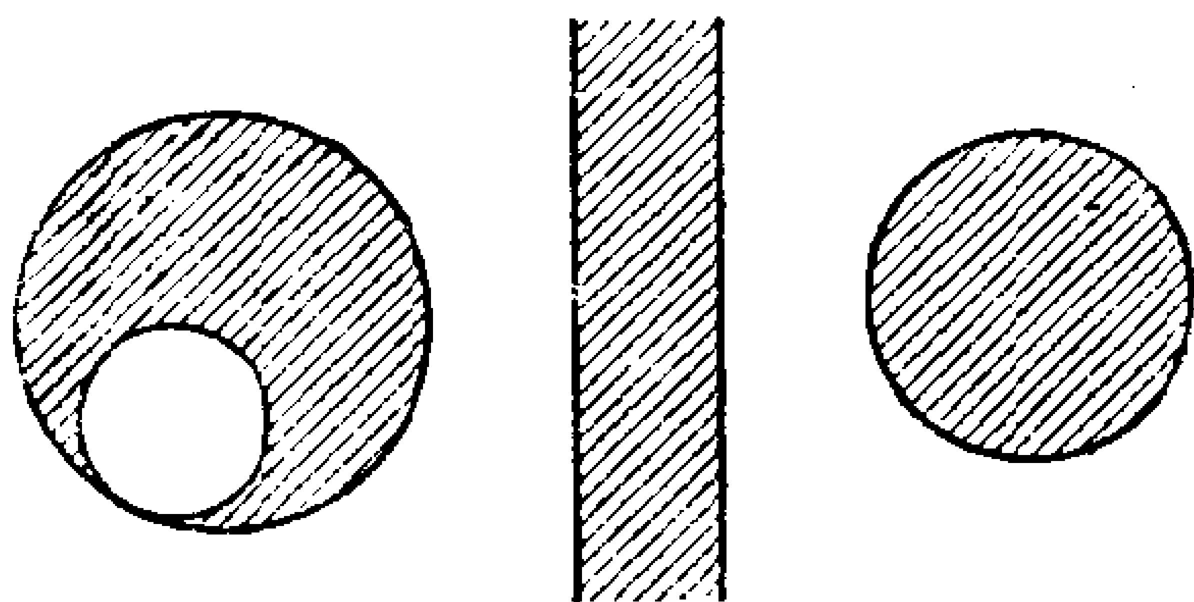


图 252

在所有这些例子和以后要讲的例子里，在区域的所有內部点处映射都是保形的，但在边緣上仅当沒有隅角时映射才是保形的。如果边緣上一光滑弧映成有隅角的弧，显然映射不能沿着整个弧保形。不过在不保形的各点映射总是保持角之間的比例的；换句話說，所有的角乘上同一比例系数。例如，在映射$\sqrt{z}$之下，半平面的边緣直綫变为直角的二边；在变成角的頂点的那一点，所有的角都縮小一半。

黎曼提出了一个基本的定理：凡能一对一連續地映成圓面的任何平面区域（但不包括整个的欧氏平面），也可以保形地映成圓

面。这个定理使我們对解析函数的多样性，有了一些印象。

黎曼自己沒有給出这个定理的严格证明，他指出了这个定理同变分問題中的所謂迪里希来(Dirichlet)問題等价，至于后一問題之有解，他认为是显然的。但是迪氏問題之有解很晚才被严格证明。在这以前，黎曼定理已經有人用下面較簡单的方法证明了。

設G是可以变形为圓面的任一区域。为了作出将G映成一已給圓面K的保形变换，我們先作任一保形变换a_0，这a_0把G保形地变换成K的一子域K_0。a_0可以选为，比方說，相似变换。让我們再附加一条件：a_0将G的內部的某一已知点P映成圓心M。設R_0为G的內部另一点的象。那么能够证明下面的断言：映射a_0可以改变为一保形映象a_1，使得在a_1之下G的象是K的一子域K_1，同时P仍旧映成M，Q映成在半徑MR_0上的一点R_1，而M到R_1的距离大于M到R_0的距离。順便說說，从a_0变换到a_1，恰好是以分式綫性函数的平方根表示的保形变换。a_1又可以照上法改变，如此继續下去，得到一个把G变成K的子域K_n的保形变换序列，使得P永远变成M，而Q变成在半徑MR_0上点R_n的序列，并且R_n离M越来越远。可以证明，区域K_n越来越塡滿圓面K，并且映射序列a_n收斂于一保形映射a。这样一来，a将G保形地映成K，这就是黎曼定理中的断言。

上面粗略叙述的方法出于科布(Koebe)。这个方法指出我們所求的映射具有一种极值性质。因为显然a把Q映到K时得到的点R是在MR_0之上的，而且还是R_n的极限点，所以对任何的n，$MR>MR_n$。如果不是在欧氏意义下量距离，而是把K的內部看作双曲平面的布安加雷模型，并在双曲度量下量距离，上面的不等式依然成立。这是由于一点跟中心M的双曲距离，同欧氏距离一样，也是沿着半徑来量的，因为半徑表示通过M的双曲直綫(参看第253頁，第256頁)。除了a之外，还有其他把G映成K的保形

映射 b。但由前面讲过的定理，知道 b 同 a 只能差一个 K 上的双曲刚体运动，因此假如 S 和 T 是在映射 b 之下 P 和 Q 的象，则双曲距离 MR 和 ST 必然相等。于是我們得到了所求的极值性质：**在将 G 映成 K 的任意保形映射之下，G 上任意二内点的象的双曲距离，必大于在将 G 映成 K 的一个子域的任意保形映射之下的二象点的双曲距离。**

使用双曲几何的語言，也可以这样描述我們的方法：假定有一个保形映射，把 G 变成双曲平面上的区域 K'。現在試連續改变映射，改变时保持映射保形，但让二任意选定的点的距离不断增加，如此 K' 将逐渐填满整个的双曲平面。二点間的距离增加到**有限**极大值，而这个极大值当且仅当 K' 填满整个双曲平面的时候才能达到。

我們自然会想到把 G 的内部不映成双曲平面，而映成欧氏平面的問題。把 G 的内部映成欧氏平面的**連續**映射显然是存在的，因为 G 的内部，按假設能够連續地映成圓的内部，而圓的内部显然又能够連續地映成欧氏平面（例如，一圓的内部 H 用球极平面投影法映成半球面，而后再把半球面从球心投射連續地映成平面 E）。可是不可能找到一**保形**映射，把 H 映成 E。事实上，在这样的映射之下，把 H 映成自己的任何保形映射都将导致把 E 映成自己的一个保形映射。将 H 映成自己的所有保形映射的集合組成含三个参数的双曲刚体运动族。假定有一个将 H 映成 E 的保形映射存在，那么将 E 映成自己的保形映射集合也将是含三个参数的。但是，这样的保形变换至少包括所有的相似变换，而相似变换組成四参数族，这可以从它的表达式 $w=az+b$ 中看得出来；这个式子包含两个任意复数 a 和 b，因而有四个任意实数。由此可見，沒有将 H 映成 E 的保形映射。順便說說，相似变换是将 E 映成自己的仅有的保形映射。

在三維空間里，完全可以仿照平面上的办法去定义保形映射。但在三維空間里保形映射的花样是很有限的。因为所有这种映射都是保球变换（即将球面和平面全体所成的集合映成本身）。保球变换的集合作成一个十参数族。一个特別簡单的保球变换是在三維空間里的反演。空間里的反演跟平面上的反演类似：任选一定点M和一定数r，把不同于M的每一点P映射成射綫MP上的一点Q，使$MP\cdot MQ=r^2$。任一保球变换都可以由一空間里的反演和一相似变换組成。

§39. 弯曲曲面的保形映射。极小曲面。普拉托(Plateau)問題

球极平面投影是弯曲曲面保形地映成平面的一个例子。在球极平面投影之下，平面上的任一保形映射变为球面上的保形映射。若球极平面投影的中心在N点，則保持N不动的球面保形映射对应将欧氏平面映成本身的保形映射。上一节我們讲过，将欧氏平面映成本身的保形映射只有相似变换。由此可知，所有保持一点不动的球面映成本身的保形映射是保圓变换。将球面映成本身的任一保形映射可以通过繞一直徑的旋轉而变换成保持一点不动的球面保形映射。因此将球面映成本身的保形映射的集合，一定恒等于在球面上的保圓映射的集合，即从平面上的保圓变换借球极平面投影誘导出来的变换的集合。平面上的保圓变换由第262頁上的公式(1)表示。这个公式有四个复数，但在确定它們的值时有一个不定的复数公因子。因此在平面上的保圓变换以及在球面上的保圓变换，作成一个六参数族。

可以证明，任一可以連續映成球面的閉曲面，例如橢球面，也可以保形地映成球面。由此可見，任何两个这样的曲面也可以相互保形映射，而且任一这样的曲面上的保形映射族恰好含有六个

参数。

能够連續映成圓的內部或映成欧氏平面的一些曲面，比如双曲抛物面，不一定能够相互保形映射，因为，例如一圓的內部，就不能保形地映成整个欧氏平面。不过关于这些曲面有一个重要的“非此即彼”的定理：任一这样的曲面可以保形地映成一圓的內部或者映成欧氏平面。

对于其他某些类型的曲面，例如环面，保形映射的存在問題也已完全解决。因为处理这个問題需要拓扑学上的方法，我們放到拓扑学那一章里去讲。

极小曲面給出了保形映射的一个特别有趣的例子。极小曲面的特征(参看第193頁)是在这种曲面的每一点处主曲率大小相等，方向相反。从这个定义立刻可以推出极小曲面的球面表示是保形映射，反之，也容易证明，在所有曲面中，除了球面之外，只有极小曲面的球面表示(用平行法綫法)为保形映射。因此极小曲面同函数論关系密切。任一复变解析函数都可以用来定义一个极小曲面。

正如前面讲过的，伸張于一閉金屬綫上的肥皂膜取极小曲面的形状。从这里导出下述由普拉托首先提出的問題：給定了任一空間閉曲綫，求以曲綫为边緣的极小曲面。在一段很长的时期里甚至要证明以任意已給曲綫为边緣的极小曲面的存在，也沒成功。直到1931年，一般的普拉托問題的解才为J. 道格拉斯(Jesse Douglas)找到①。

道格拉斯为了解决普拉托問題，将它换成一个更广泛的問題；他提出不仅要找出以已給空間曲綫 r 为边緣的极小曲面 M，还要找出将它映成一平面圓域 K 的保形映射。为了达此目的，他首先

① Trans. Amer. Math. Soc., 卷33(1931)。稍为早一点，Tibor Radò 已經在某些特殊的条件下解决过普拉托問題；Math. Zeit., Vol. 2(1930)。

考虑把曲綫 r 映成 K 的圓周 k 的映射。結果发現这个映射的特征是它有一极値性质。設 s 是 r 的任一弦，s 两端点的映象使 s 和 k 的一弦 s' 相对应。比 s'/s 称为弦 s 的放大率。取 r 的所有弦的放大率的平方倒数的平均值。所求的映射能使此平均値成为最小①。因此我們可以說，所求的映射是使 r 上的所有点尽可能——按平均的意义——离得开些。可以证明，具有这种极値性质的映射永远存在。于是利用映射 $r\to k$，可以把 M 的其余点的笛卡儿坐标通过著名的解析公式② 表成 K 上点的函数。

假定 r 是一平面曲綫，則 M 退化为以 r 为边緣的平面域 G。于是道格拉斯的方法給出 G 到 K 的保形映射，因而得出黎曼映射問題的一解。这种解法显然同从前用的方法恰恰相反。从前的方法是从 G 的一对內部点出发，逐漸增加这两点的象的双曲距离，終于使 G 的边緣和 K 的边緣重合。道格拉斯方法与此相反，首先找出把 G 的边緣变换为 K 的边緣，并有某一极值特征的适当的映射，然后內部点的映射自然就会确定下来。

对于某些特殊的空間曲綫 r，以 r 为边緣的极小曲面可用很簡单的方法找出，例如，r 是以空間直綫段組成的閉多边形。一般地說，以 r 为边緣的极小曲面在边緣上有奇性。但 r 若經过特别的选擇，也可得出能扩張到 r 之外而沒有任何奇性的极小曲面。用这种方法，紐維斯(Neovius)③ 成功地作出了一极小曲面，这个

① 若用公式表示，可以如下叙述：設 r 的二点 P 和 Q 映成 k 上的二点 P',Q'，設 α 和 β 分别是点 P' 和点 Q' 的輻角，并命 $\frac{PQ}{P'Q'}=v(\alpha,\beta)$，則重积分

$$\int_{\alpha=0}^{2\pi}\int_{\beta=0}^{2\pi}[v(\alpha,\beta)]^2 d\alpha d\beta$$

在所求映射下有最小值。

② 沿曲綫 r 的普瓦松(Poisson)积分。

③ E. R. Neovius, Bestimmung zweier speziellen periodischen Minimalflächen. Akad. Abhandlung, Helsingfors, 1883.

极小曲面扩張到整个空間,旣无奇性,又无自交点;不但如此,它还有像金剛石点格那样的对称性。

这个曲面的球面象也不可能有边緣。其次,可以证明,在极小曲面上不存在什么拋物曲綫,它的球面象是能够回头的。但是另一方面,紐維斯曲面的球面象不能貼貼伏伏地复盖球面,因为否則便可能将这曲面連續地映成球面。这个矛盾的解釋在于紐維斯曲面上有猴鞍点。曲面上繞着这样一点一圈的曲綫,在球面上被表作繞象点好多圈的曲綫(参看第 205 頁)。紐維斯极小曲面的球面象复盖球面的层数是无穷的,它們都在猴鞍点的象点处相連通。很多其他的极小曲面,也有类似的球面象。黎曼由研究非綫性函数,例如 $w=z^2$ 表示的保形映射的整体性质,从而找出用这样方式复盖球面和平面的曲面。同猴鞍点的球面象类似的諸点,在这些点处黎曼曲面的各叶是連通的,叫做黎曼支点。

第五章 运动学

到現在为止，我們主要地研究了空間里固定的图形，因为正是这种图形做成几何研究的起点。可是，即使在初等几何学中，运动的概念也占着一定的地位。例如二图形的合同，可以說是它們能够通过剛体运动而重合。此外，就像前面讲过的活动双曲面(第16頁)，由运动的平面来决定的直紋曲面(第207頁)，把曲面弯曲和变形(第四章)，也都含有运动的概念。运动学就是系統地研究运动的科学。

让我們先討論跟初等度量几何有密切关系的那一部分运动学——鉸接(鏈)机构，然后以微分几何学的方法进而探討比較一般的連續运动。

§40. 鉸接机构

所謂"平面鉸接机构"，是說任何一个平面剛性連杆系，这些杆或者互相連接，或者和平面上几个固定的点連接，但可以圍繞这些点自由轉动，这样整个系統便能够在該平面上作某种运动。最簡单的鉸接机构是一根杆，杆的一端和平面上一点連接牢。其实，它就是一把圓規。如同圓規的自由端能画圓一样，一切平面鉸接机构的自由端能画出代数曲綫，即在笛卡儿坐标下能适合一代数方程的曲綫。反过来，对于一給定的代数曲綫，无論如何复杂，都可以找出能够把曲綫画出来(至少能画出片断)的鉸接机构。

用鉸接机构画最簡单的代数曲綫——直綫，乃是一个久已馳名的問題。我們先来看一个画直綫的特制模型：波瑟利(Peaucel-

lier)反演器①。这机构由六根連杆組成(图 253)。 a, b 二杆等长，c, d, e, f 四杆等长。a 和 b 的接头固定在一个定点 O 处。P, Q, O 常保持在一直綫上——在角 AOB 的平分綫上。以 A 为中心，以 c 为半徑作圓。不管机构运动到什么位置，按照大家知道的圓的割綫定理，总有

$$OP \cdot OQ = (OA + c)(OA - c) = a^2 - c^2.$$

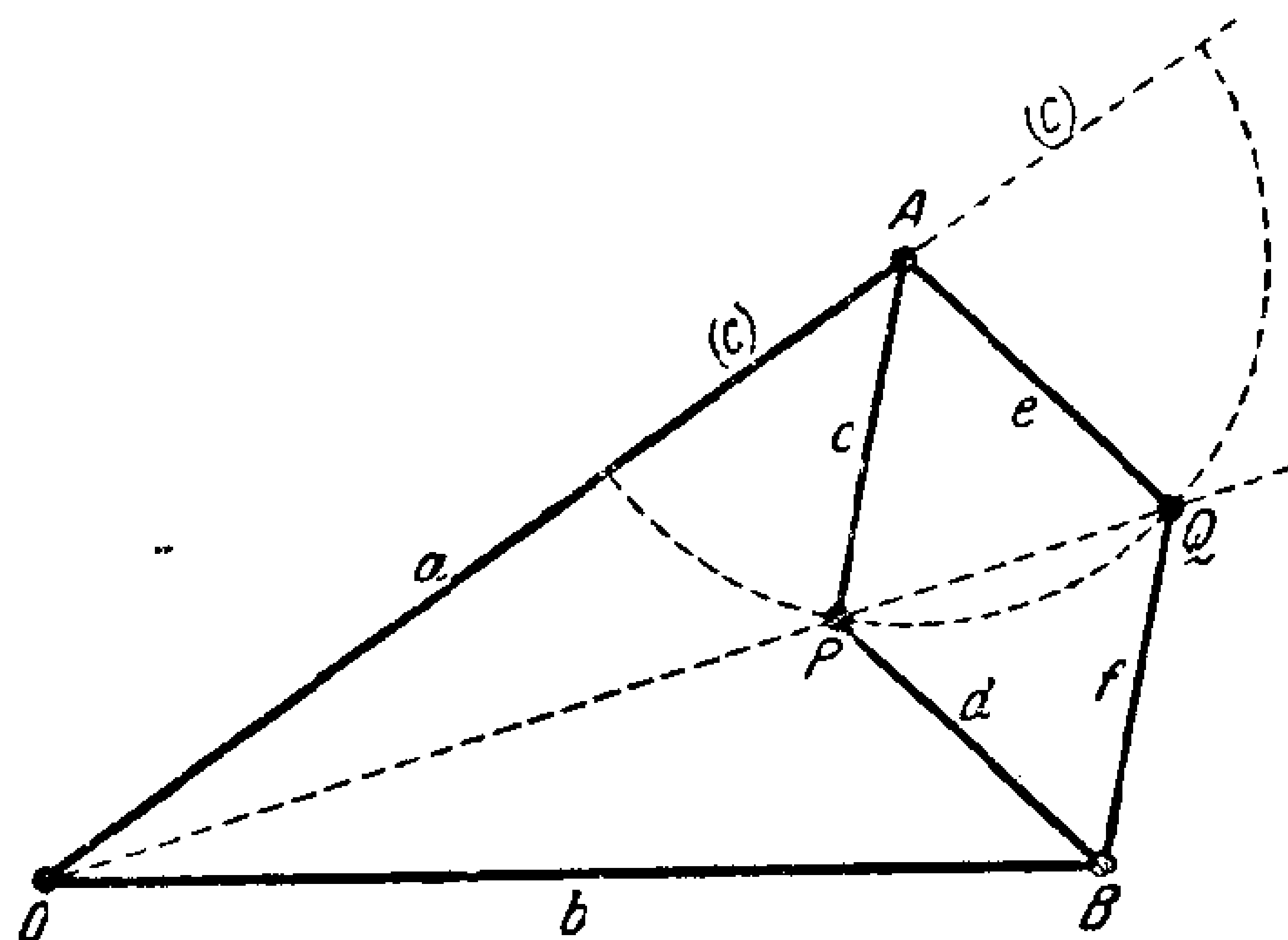


图 253

可見 P 和 Q 是对于以 O 为中心，以 $\sqrt{a^2 - c^2}$ 为半徑的圓的二共軛点(参考第 253 頁)。显然，P 在以 O 为中心，以 $\sqrt{a^2 - c^2}$ 为外半徑和以 $a - c$ 为内半徑的平环形区域內自由运动。这样看来，这种机构能作出上述区域內任一点对于上述的圓的反演点。由于这个原故，这机构称为反演器。如果 P 描繪的是通过 O 的圓，則 Q 必描繪一直綫(参考第 253 頁)。因此，假如我們在 P 点上再連接一根杆(图 254)，使杆的另一端連接于一定点 M，OM 的距离等于这小杆的长 g，那么 P 就在以 M 为心以 g 为半徑的圓周上运动。因为 $OM = g$，所以这圓通过 O。因此 Q 描繪一直綫 q，从而我們的問題

① 关于制造誤差最小、最优良的作直綫(或其他曲綫)的机械类似問題是俄国大数学家切比謝夫(П. Л. Чебышев)提出并予以完善解决的。他結合这个問題創立了一門嶄新的、后来发展很快的数学分支——最优近似函数論。——俄譯者注。

解决了。此外容易知道 q 垂直于 OM，据此，波氏反演器又提供一种用机械作已知直綫的垂綫的方法。

图 254

空間鉸接机构的定义和平面的相仿。只是在这里杆与杆間的接头，或将杆連接于空間定点的接头，不是仅能在平面上轉动，而是能在空間里任意轉动。这在一定范圍内实际上可借助球形接头来实現。空間鉸接机构連杆的端点永远描繪代数曲面。不过，現在还沒有人能证明每一代数曲面都能用鉸接机构作出图来，虽然这个定理似乎很可能是对的。

我們还是先考虑最簡单的作图，即平面的作图。为了这个目的，让我們从能动的单叶双曲面細杆模型(参考第16頁17頁和30頁)讲起。假定 g 和 g' 是同族的两条直綫，h 是另一族的一条动直綫，它与 g 和 g' 交于二动点 H 和 H'。現在让这模型运动，运动时使杆 g 保持不动(图 255)。如此則直綫 g' 上任意一点 H' 到 g 上对应点 H 的距离常为一定。因而在模型运动时，g' 上各点描繪一些球面，球心是 g 上的各对应点。現在如果如此选擇直綫 h，使它同 g 交于无穷远点 U，則与 U 对应的 U'，即 h 与 g' 的交点，必然是一有限点。假定不是如此，則 $UU'=h$ 将变成曲面上的无穷远

直綫，这时曲面是双曲抛物面，而不是单叶双曲面(参看第122—123頁)。由此可見，当模型运动时，U' 点描繪一个半徑为无穷大的球面，換句話說，描繪一平面。

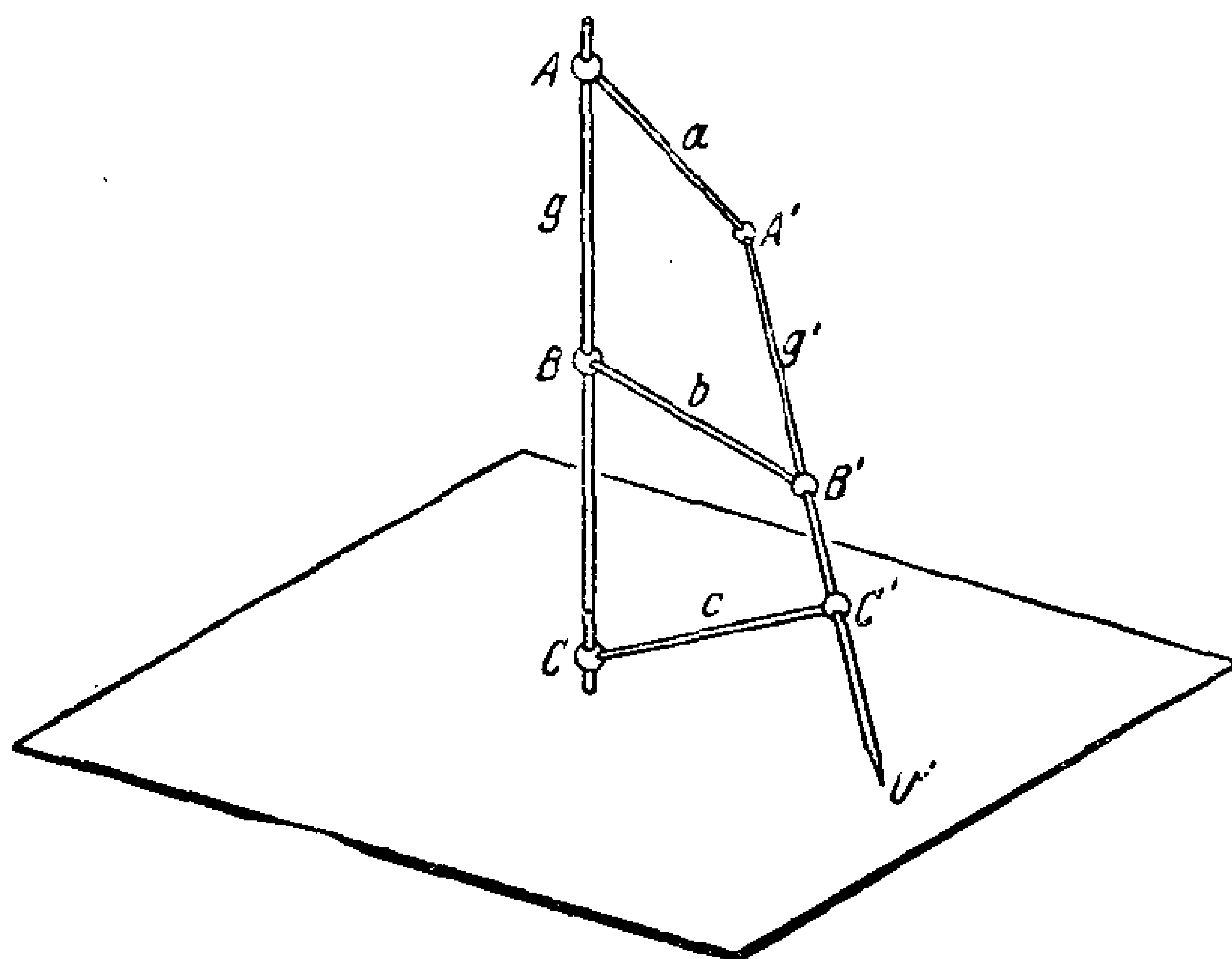


图 255

上述討論启示我們如何用一种簡单机械作出平面。我們知道，同族三根杆唯一地决定单叶双曲面，因此我們拿三根連杆 a, b, c 用球形接头連接于固定的連杆 g 上三点 A, B, C (图255)。然后把 a, b, c 的自由端也用球形接头連接于連杆 g' 上三点 A', B', C'。为了保证 a, b, c 产生单叶双曲面，而不是双曲抛物面，只要将上面讲的各点这样选择，使 $AB:AC \neq A'B':A'C'$ 就行了。因为，容易证明，在双曲抛物面的情形，g 上三点距离必与 g' 上对应三点距离成比例。由 a, b, c 决定的活动双曲面可以取 ∞^1 种不同的形式，每种曲面还可以繞軸 g 自由轉动；因此在鉸接机构的連杆 g' 上的每一点有两个自由度①。从上文知道 g' 的諸点描繪一些以 g 为直

① 自由度数也可如此得出：假如 g' 不存在，则三点 $A'B'C'$ 有六个自由度，因为每一点都可在球面上移动，所以有两个自由度。现在 A', B', C' 的共綫性包含两个条件，而 $A'B'$ 和 $A'C'$ 有已知长，各增添一个条件。所以根据§24讲的方法，总共得到 $6-2-1-1=2$ 个自由度。

徑的球面，而且 g' 上的某一点 U' 描繪一个垂直于 g 的平面的一部分。可以看出，U' 通过一个以 g 为軸的平环上的所有点。至此我們的問題完全解决了。另有一种可能的解案，見图 256。这种机构是由对調上述双曲面二族直綫的作用而得到的。

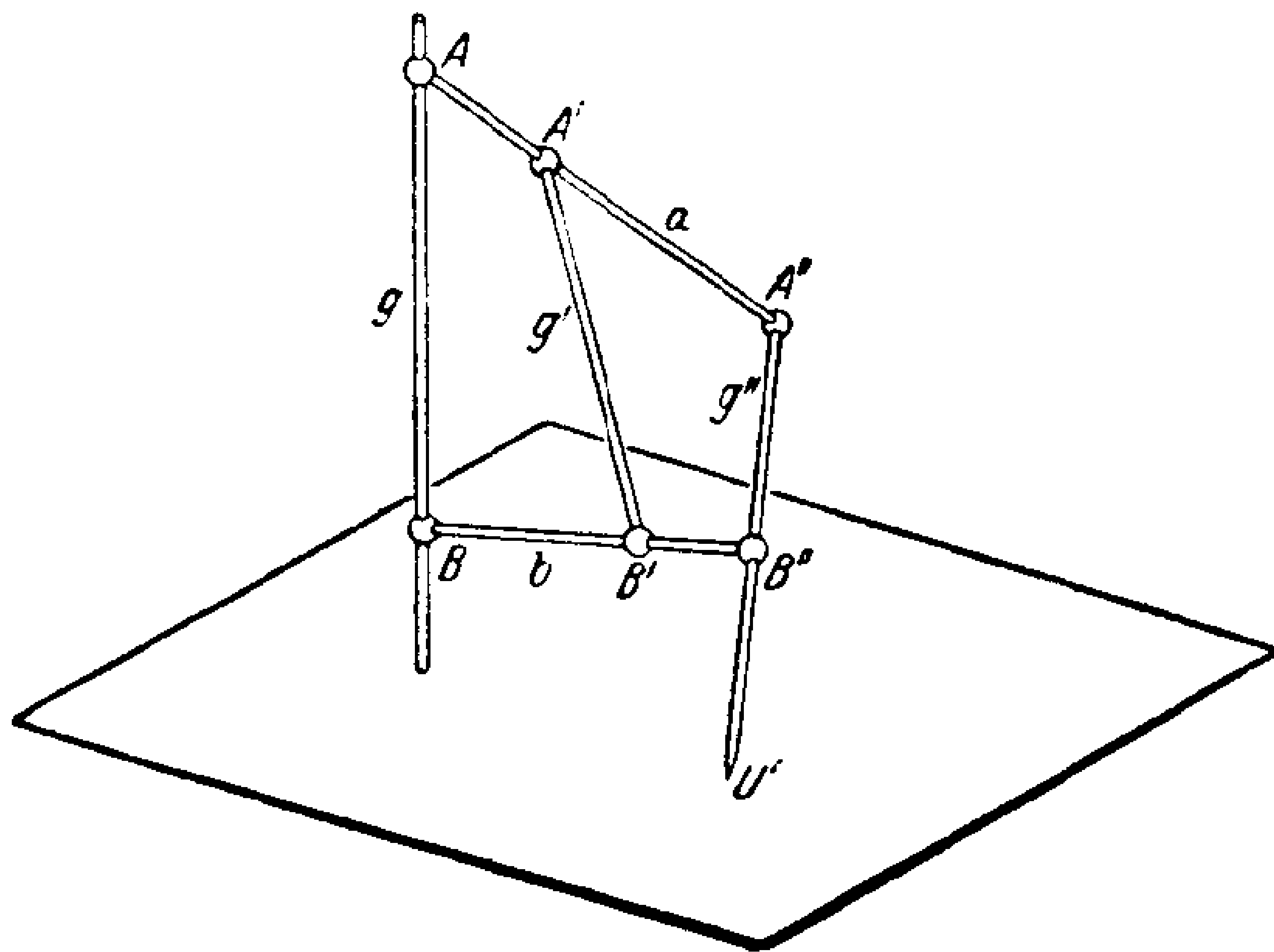


图 256

§41. 平面图形的連續剛体运动

設有一动平面 σ 在一定平面 P 上任意滑动。我們的目的是尽可能用簡单的几何方法来刻划这种过程。这种过程叫做**連續剛体运动**。

从前詳細地讲过，任何平面剛体运动，按照它把一个开始位置变成一个終了位置的效果来說，等于单一的轉动或单一的平移(第 62 頁)。假如把平移看作是繞一无穷远点的轉动，那么我們可以說，每一平面运动，毫无例外，都可以用圍繞一定点的轉动来代替。

現在假定已給出一个运动，在已知时間 t 动平面 σ 占有某一位置 A，到了后一时間 $t+h$，它占有另一位置 A_h。位置变动 $A\to A_h$ 对应着一个轉动中心 M_h。如令 h 逐漸縮小，則 A_h 与 A 的差也逐

漸縮小，而 M_h 将趋近于一极限位置M，点M叫做运动在瞬时 t 的瞬时中心。如果P是动平面上不与M重合的任意一点，那么在瞬时 t 的运动方向必垂直于 PM。

如果运动在每一时刻的瞬时中心已經确定，在固定平面上就得到一軌迹；这軌迹是一条曲綫，叫做运动的定瞬心綫。但在同一运动中我們还可以把原动平面σ看作是定平面，而把原定平面ρ看作是动平面——在观察的人随着动平面σ一起运动时会有这种感觉。那么，我們在平面σ上又得到一条瞬时中心的軌綫；这条曲綫叫做运动的动瞬心綫。这两种瞬心綫都处处連續。它們可能伸展到无穷远，但这时它們必然是在投影几何的意义下在无穷远閉合的。換句話說，曲綫投到另一平面上的中心投影必然是在对应于水平綫的諸点处連續的曲綫。

更仔細的研究指出，运动完全由二瞬心綫的形状和在运动的某一瞬間重合的二点(每綫上各有一点)决定。因为，如果让二曲綫相切于已知二点，然后让动瞬心綫連同其平面沿定瞬心綫滾动而无滑动，就得到原来的运动。在运动的每一瞬間二曲綫相切于瞬时中心。由于二曲綫相互沿着滾动而无滑动，可知在定瞬心綫上任意二点間的弧长必然等于动瞬心綫上对应二点間的弧长。

这样說来，我們得出連續的剛体运动的一个簡单特征，和从前得出的不連續剛体运动的特征类似：任一連續运动可沿一曲綫滾动另一曲綫而产生。这里应該包括二曲綫都退化为点的特例(旋轉)。

举一个特殊情况的例子，假定在定平面上有任一曲綫 k，在动平面上有一直綫 g，要求在运动时直綫 g 上的一点

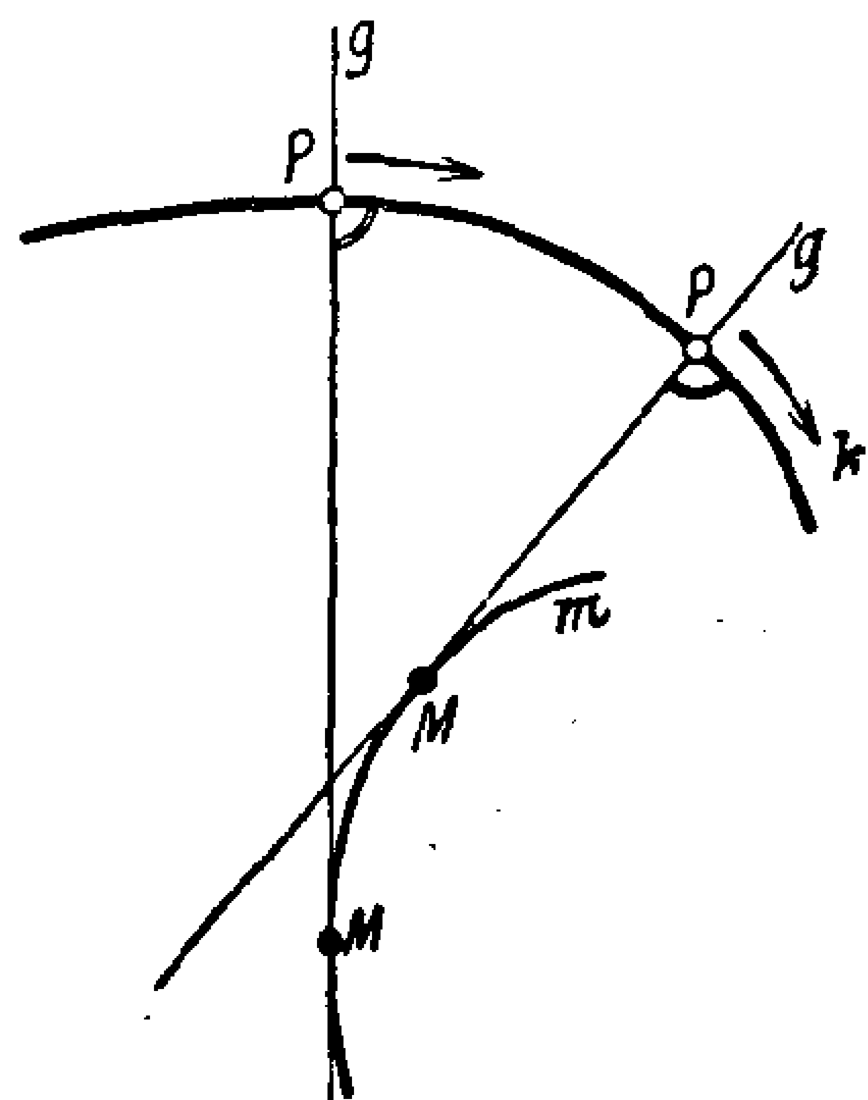


图 257

P 沿着 k 移动，同时使 g 与 k 永远垂直(图 257)。在这种情况下，按照曲率中心的定义，立刻知道瞬时中心 M 总是曲綫 k 的和 P 点对应的曲率中心。因此定瞬心綫就是 k 的漸屈綫 m，又因为 M 总在 g 上，动瞬心綫就是直綫 g 本身。因此运动乃是 g 在 m 上的滚动，在这一过程中 g 上的定点 P 描繪曲綫 k，其漸屈綫是 m。g 上两点的距离恒等于 m 上对应两点的弧长。从此便可导出在第 182 頁上讲过的由曲綫的漸屈綫作該曲綫的绳綫作图法。

特别重要的是当二瞬心綫都是圓的时候，动平面上各点所描繪的軌迹。按动圓和定圓內切或外切的不同情况而分别得出不同类型的曲綫。在第一种情况下，曲綫叫做长短幅內摆綫（长短幅圓內旋輪綫）；在第二种情况下，曲綫叫做长短幅外摆綫（长短幅圓外旋輪綫）。如果生成曲綫的点在滚动的圓周上，曲綫分别叫做內摆綫(圓內旋輪綫)和外摆綫(圓外旋輪綫)。其次，长、短幅摆綫(长、短輻旋輪綫)和摆綫(旋輪綫)的形状还依賴于二圓半徑之比。

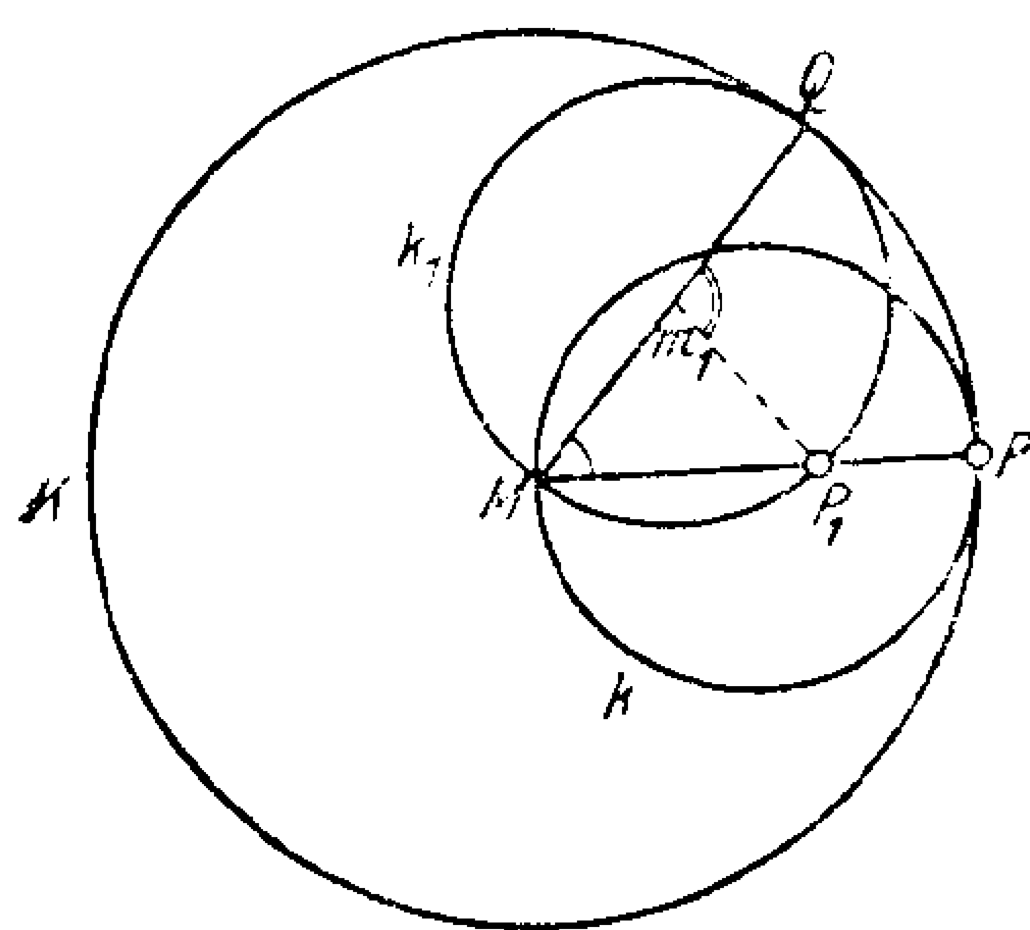


图 258

首先，我們考虑滚动的圓 k 的半徑是定圓 K 的一半并且 k 內切于 K 的情况。要在这样的情形下决定 k 上一点 P 的軌迹，即找一內摆綫①。先从 k 內切定圓 K 于 P 点时的位置开始。經过一段时間，k 滚到另一位置 k_1，而 P 达到了 P_1(图 258)。假定这时 K 和 k_1 的圓心分别在 M 和 m_1，而 Q 是二圓的公切点。由于一圓沿着另一圓滚动而无滑动，所以 k_1 的弧 QP_1 的长必然等于 K 的弧 QP 的长。除此之外，因为 k 的半徑是 K 的一半，所以 $\angle Qm_1P_1=$

① 在圓周上选擇哪一点无关緊要，因为图形是对称的，圓周 k 上二不同的点生成的摆綫仅差一旋轉(以 k 的圓心为轉动中心)。

$=2\angle QMP$。由于同一理由，M 必在 k_1 的圓周上。引用熟知的圓周角和和圓心角关系定理，知道 $\angle QMP_1=\frac{1}{2}\angle Qm_1P_1=\angle QMP$。由此可知直綫 MP_1 同直綫 MP 重合；也就是說，在运动的过程中 P_1 在直綫 MP 上移动。这样一来，我們证明了一个出乎意外的定理：在我們的特殊情况下，內擺綫是定圓的直徑。作为定理的副产物，我們得到一种新的描繪直綫的机构。

現在我們来找相应的长短幅內擺綫。为了这个目的，我們利用剛才得到的結果，換一个办法来描写运动。設 S 和 T 是圓 k 的二对徑点。則在滚动的过程中圓 k 的圓弧 ST 相当于圓 K 周长的四分之一。因此 S 和 T 在 K 圓的两条相互垂直的直徑 s 和 t 上移动(图 259)。通过簡单的計算可知：若是綫段 ST 的二端点分别在两条相互垂直的直綫 s, t 上运动，則 ST 的中点描繪一圓。ST 上任意另外一点 P 描繪一橢圓，橢圓的二軸在 s 和 t 上，它們的长度分别等于 SP 和 PT。由此可見，所有由动圓 k 产

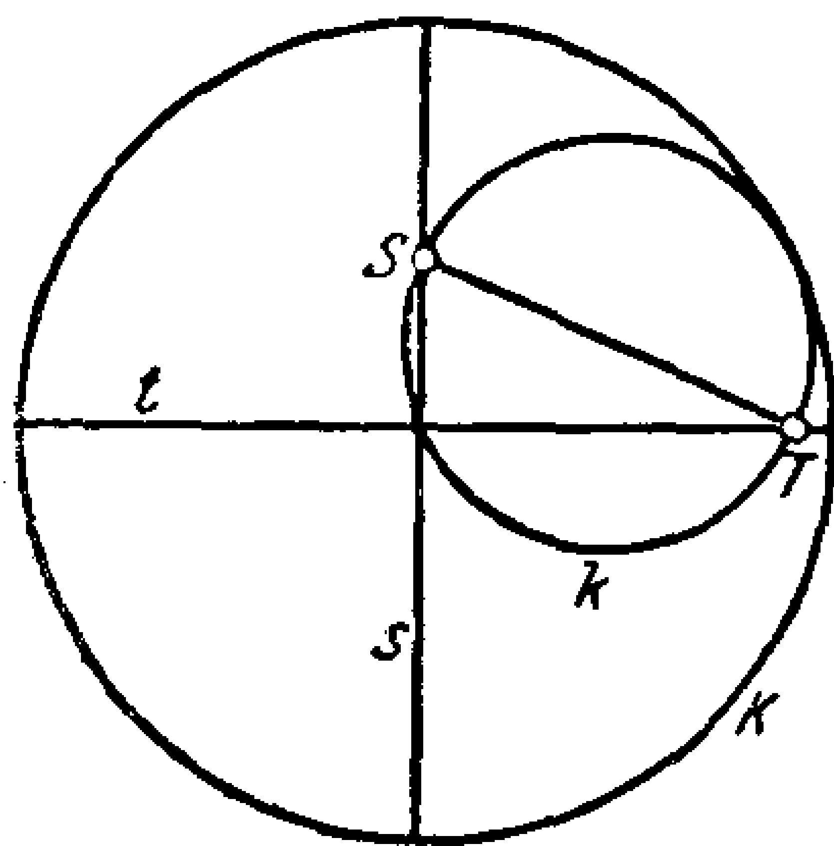


图 259

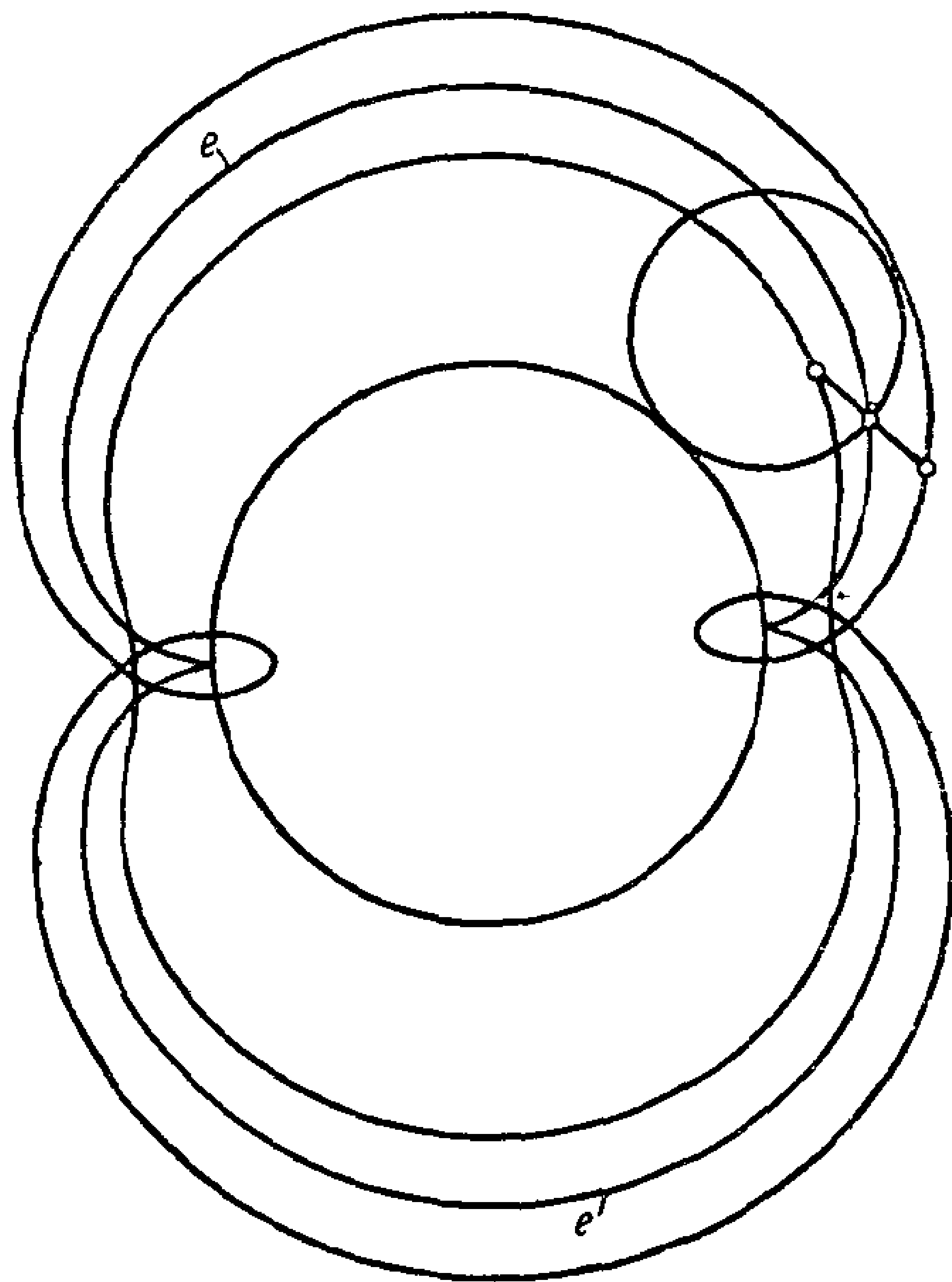


图 260

生的長短幅內擺綫都是橢圓。因为，固定在圓 k 上的任一点都在 k 的某一直徑上，而此直徑是一直綫，綫上的两点沿两条相互垂直的直綫移动。

現在我們轉而談談 k 在 K 外滚动的情况。得出的外擺綫如图 260 中的曲綫 e。可以证明，像这条曲綫一样，所有的外擺綫和內擺綫都有尖点。在这些尖点处，擺綫永远与定圓垂直。尖点对应于擺綫的生成点恰好在二圓的公切点时的位置。在上述 k 的半徑等于 K 的一半的特殊情况下，仅有两个尖点。

外擺綫的切綫有一个很特殊的性质，借图 261 来說明。設圓 k 从生成点 P 刚好在 k 和 K 的公切点时开始滚动，也可以說是从 k 刚好通过擺綫的一个尖点的时候开始滚动。图上画出 k 的另一位置 k_1，这时 P 已走过了擺綫的一段弧而达到 P_1。把 K 和 k_1 的圓心 M 和 m_1 連以直綫。直綫 Mm_1 通过 K 和 k_1 的公切点 Q，再遇圓 k_1 于一点 R。設 t 是通过 P_1 的擺綫的切綫。因为 Q 是 k 在現在的位置时运动的瞬时中心，

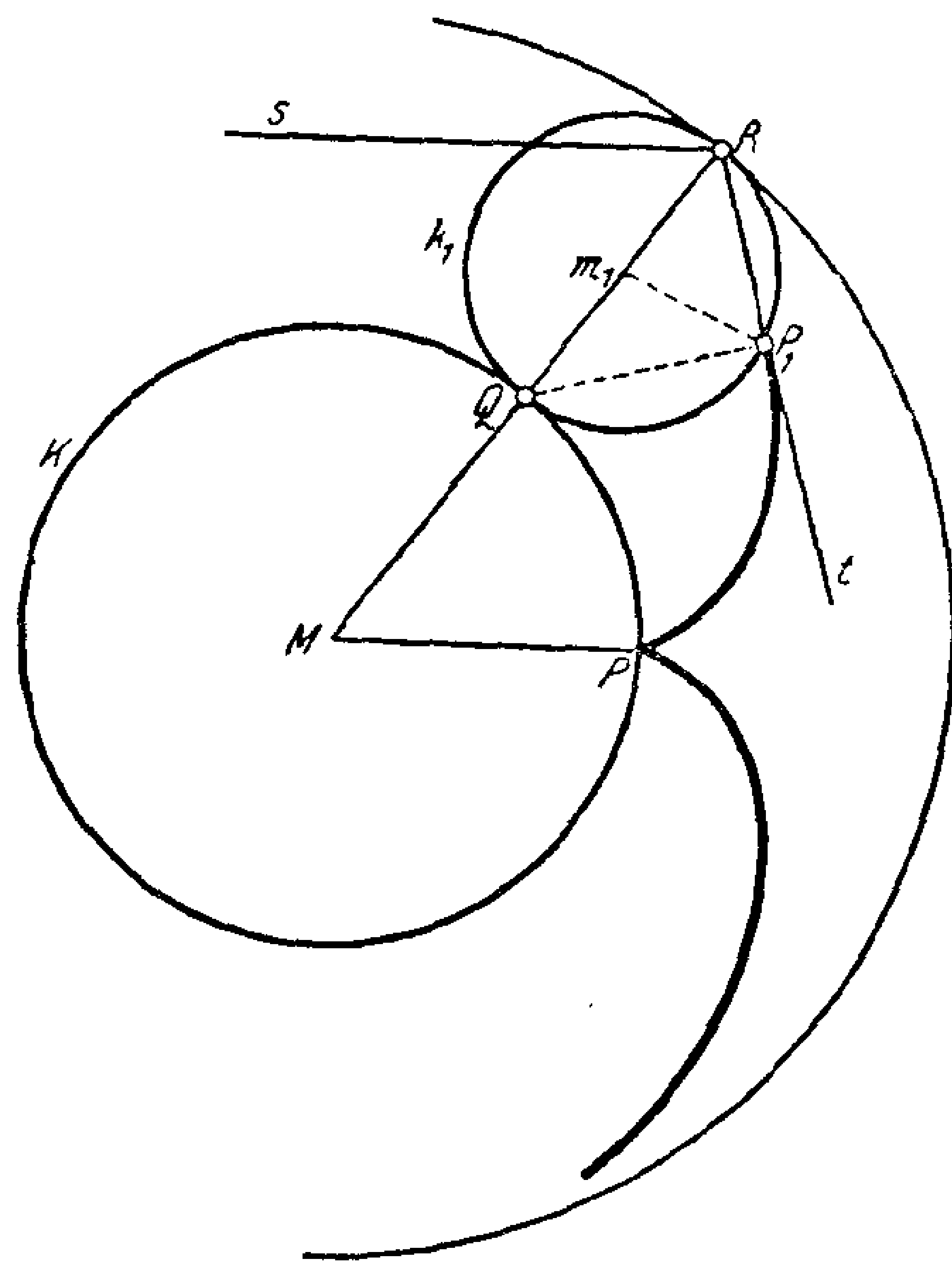


图　261

因此 P_1 的运动方向，也就是直綫 t 的方向，一定垂直于 QP_1。因为 $\angle QP_1R$ 是半圓上的圓周角，即它是直角，因此 t 和 P_1R 重合。所有內擺綫和外擺綫都有与此类似的切綫性质。因为 K 的圓弧 PQ 等于 k_1 的圓弧 P_1Q，并且在我們的例子里 k 的半徑等于 K 的

一半，因而有

$$\angle PMQ=\frac{1}{2}\angle P_1m_1Q=\angle P_1RQ.$$

所以，如果通过 R 作 MP 的平行綫 s，則 s 和 t 各与 MR 作成等角。于是上文所述可表为几何光学的一个定理：設有一束平行光綫(s)射到以 M 为中心，以 MR 为半徑的圓周上，則反射光綫(t)必包絡一双尖外擺綫，擺綫基圓的中心为M，半徑为$\frac{1}{2}MR$。連接 M 和擺綫尖点的直綫必平行于光綫(s)。由于有这种光学性质，所以双尖外擺綫又叫做圓的焦点曲綫(或叫聚光曲綫)。当光綫射到杯子、罐头等的內壁上时可以观察到这种曲綫。

与这个外擺綫相关連的长短幅外擺綫已画在图 260 上(每种各一)。所有由滚圓內部各点生成的(短幅)外擺綫沒有奇性，但是由外部各点生成的(长幅)外擺綫，有弧圈和二重点。擺綫是长短幅外擺綫的过渡情形。

比較稍微复杂一点的是动圓的半徑为定圓半徑三分之一的情况，这时生成三尖点擺綫，如图 262 所示。这种曲綫的切綫也有一个很奇特的性质——可以用解析方法证明：曲綫的切綫在曲綫內部的一段 ST 的长一定，同切点的位置无关。有一个时期有人认为这件事与第 216 頁讲的极小問題有密切关系：一綫段在一平面上运动，要求最后的結果是綫段繞它的中点旋轉了180°，并且在运动的过程中扫过的面积最小。我們讲过，假如运动选得适当，可使这块面积随意地小，因此这个問題是沒有解的。可是从前竟有人臆測說有解，而且說这解是綫段 ST 沿三尖擺綫(图 262)所作的切綫运动，在运动中綫段二端点总是在曲綫上的！事实上，在从前确有一些迹象与面积不会再减少的猜測有利。

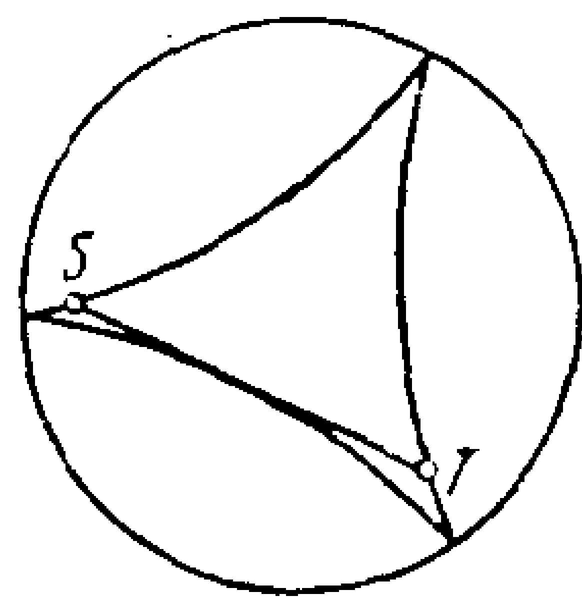


图 262

普通称为星形綫的四尖外摆綫（图 263）的切綫也有类似的性质：設 S 和 T 表示一条切綫和二对称軸的交点，則綫段 ST 的长一定。由此可知，一綫段的二端点在相互垂直的二直綫上运动时，它

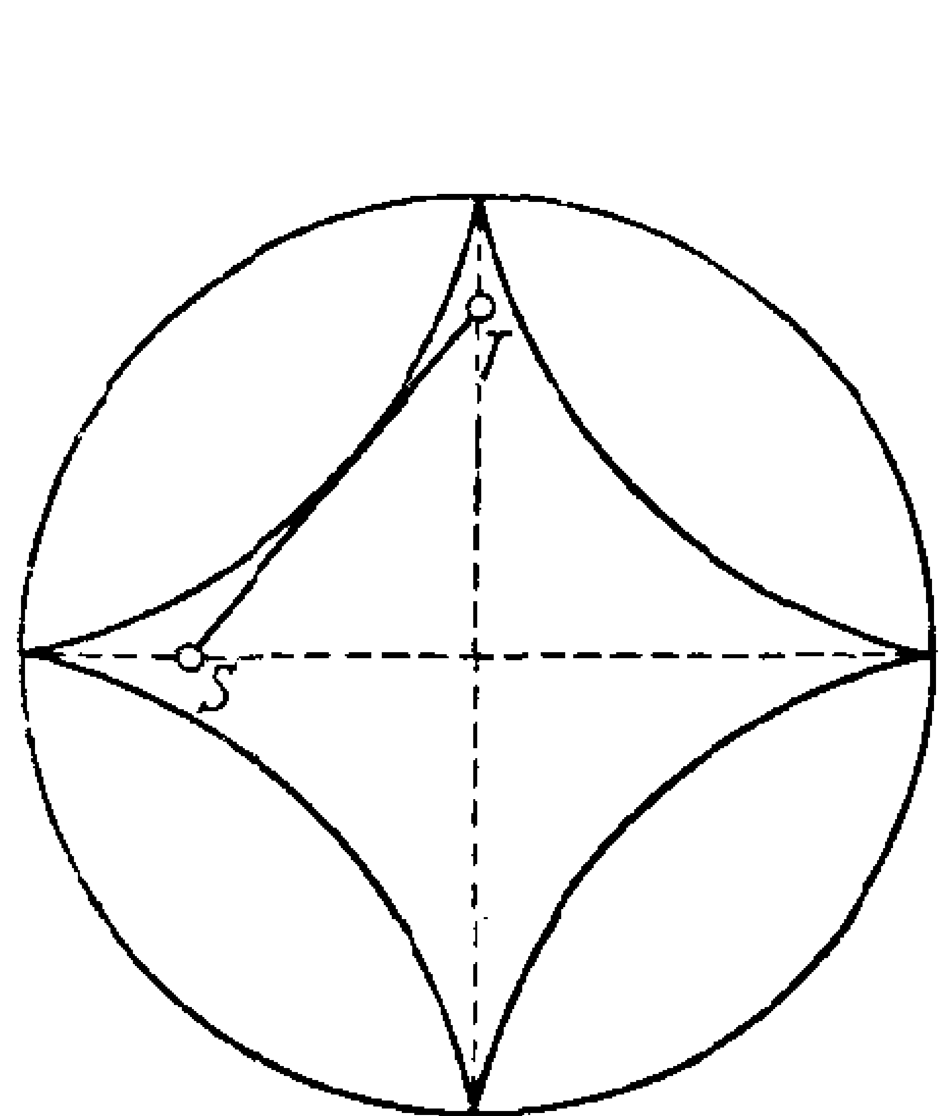


图 263

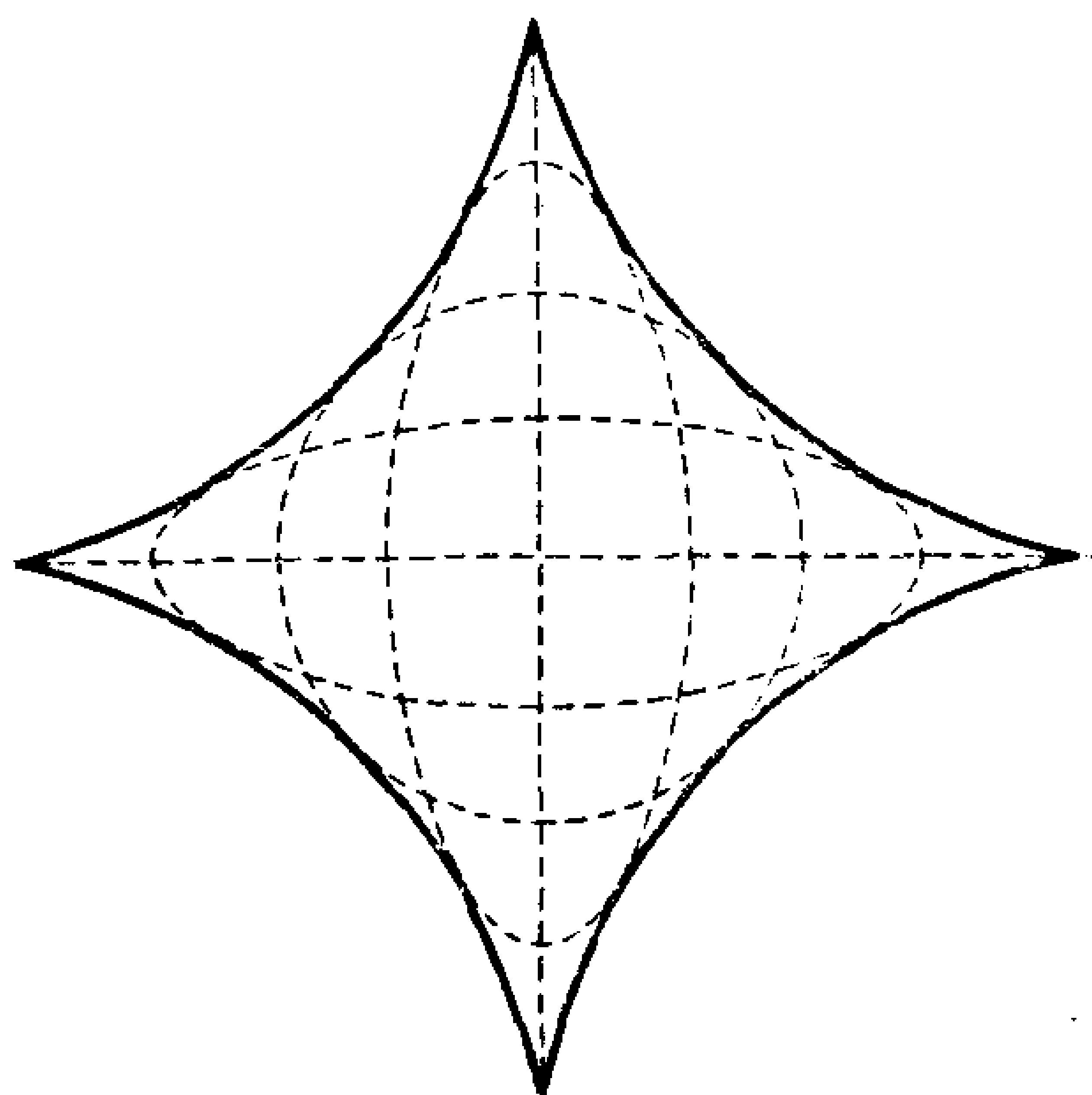


图 264

包絡一星形綫。前面我們讲过，凡作这样运动的一綫段，它上面的任一点必描繪一橢圓。由此又知星形綫是橢圓族的包絡，这橢圓族中每一橢圓的二軸之和等于常数（图 264）。

現在說到一般的情况。按动圓和定圓半徑有公度或无公度，可划分本质上不同的两类摆綫。如果 $\frac{r}{R}$ 为有理数，可以化为最簡式 $\frac{a}{b}$，則摆綫有 b 个尖点，而且当动圓沿定圓轉了 a 周时又恰好合攏。如果 $\frac{r}{R}$ 是无理数，則曲綫有无穷多尖点，而且不能合攏。在第二种情况下，可以证明，只要将曲綫足够地延长，能够随意接近于动圓扫过的区域內任一点。$r=\infty$ 或 $R=\infty$ 这两种极限情況有特別簡单的意义。如果 $r=\infty$，动圓变为直綫，从而得到圓的漸伸綫（参考第 6 頁图 8）。如果把定圓改换成直綫，則得到“普通摆綫”。这样的曲綫（图 265）是一个輪子在一平面上順着一定方向滚轉时，圓周上一点所描繪的軌綫。

到现在为止，我們只研究了有一个动平面的連續运动。在物理学上有时还需要研究更一般的现象，即相对的連續运动。設想除了定平面E和动平面e（即从前我們表作ρ和σ的）之外再加上

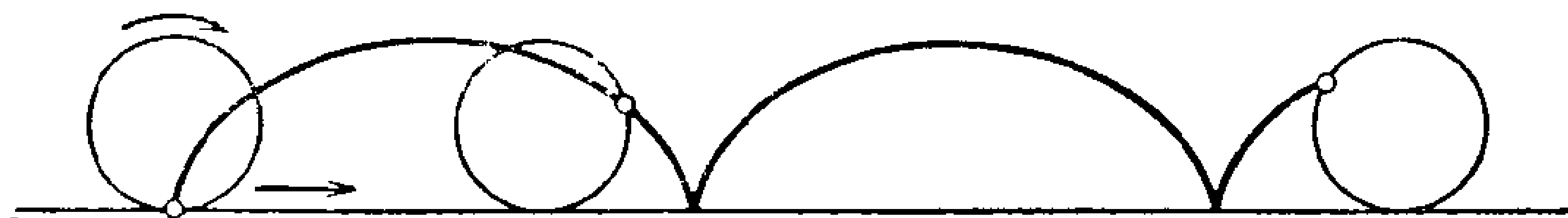


图 265

一个动平面f，f在E上滑动，但与e的滑动方式不同。那么对于e来讲，f也是在作一个完全确定的連續运动，当一个人站在e上观察时，他看起来就是这样。我們可以想象f对于E的連續运动(fE)分解为运动(fe)和(eE)。一个复杂的运动常常由于这样的分解为两个运动而得以簡化。比如說，对于二圓K和k的滚动，我們有一种特别簡单的分解法。設E是含K的定平面，f是含k的动平面。設M和m分別是K和k的圓心。为了描写m点对于平面E的运动，只要加进一个平面e，对e来說m不动，但e繞M轉动。这样，平面f对于平面e的运动只能是繞m的轉动。繞M和m轉动的角速度应該同圓K和k的半徑成反比例。由此可知，擺綫运动是二轉动之和。內外擺綫和长短幅內外擺綫在天文上起着重要的作用，其原因即在于此。因为所有的行星軌道都是近于圓形的，它們以匀角速度繞太阳运动，而且它們的軌道几乎在同一平面上（黃道平面），所以从地球上看每一行星的軌道都近似一条长短幅內外擺綫。正因为这样，在哥白尼以前的地球中心說时代，这类曲綫曾激起深入的研究。

在我們的例子里，M和m是运动(eE)和(fe)的瞬时中心，而擺綫运动(fE)的瞬时中心Q的位置，我們知道，是圓k和K的公切点。这样一来，三个瞬时中心便在一直綫上。可以证明，一般地有这个类似的定理：若运动(fE)是由运动(fe)和(eE)所合成，则(fE)，

(fe), (fE)在任一时刻的瞬时中心必在一直綫上(三心定律)。

§ 42. 一种繪制橢圓及其一般旋輪綫的仪器①

假定 c 和 c' 是长度都等于 c 的两根杆，a_1 和 a_2是长度都等于 $a(a>c)$的另外两根杆。把 c 的两端 F_1 和 F_2 和 c' 的两端 F_1' 和 F_2' 都用有釘子的接头与 a_1 和 a_2 連接，以作成自交的且对边相等的四边形(图 266)。設 E 为 a_1 和 a_2 的交叉点，它在这两根杆上的位置随着平面鉸接机构位置的改变而改变。在 E 处安装带有两个套管的接头，套管可繞这点轉动，同时杆 a_1 和 a_2 又可沿套管自由滑动。現在让 c 固定，則 E 点仍可自由运动，从而画出一曲綫。我們要证明，这曲綫是橢圓 e，其焦点为 F_1、F_2，E 与焦点距离之和为 a。事实上，三角形 $F_1F_2F_2'$ 和 $F_1F_1'F_2'$ 合同，因为它們的三边相等。因此 $\angle F_1F_2'F_2=\angle F_2'F_1F_1'$，从而 $F_1F_2'E$ 为等腰三角形。由此得知 $F_1E+EF_2=F_2'E+EF_2=a$，即所求证。

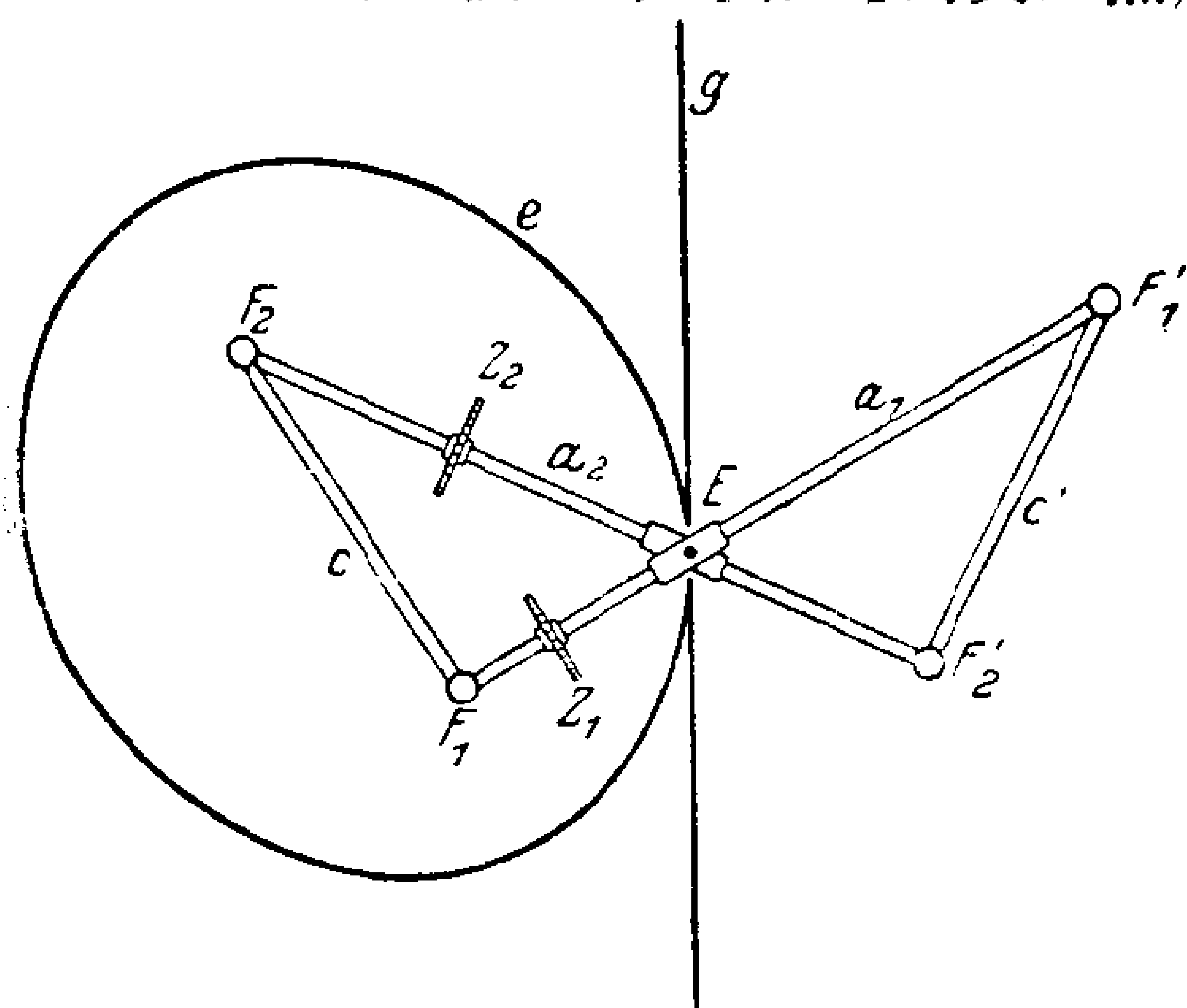


图 266

現在在二杆 a_1, a_2 的任意二点各安装一小轮，使轮子可绕杆自由轉动，但不得沿杆滑动(图 266)。假定 F_1 和 F_2 不再是固定的。那么我們可以让 E 沿任一曲綫 h 运动，同时让輪子在曲綫的平面上滚动。輪子的作用在于控制輪心的运动方向，使此方向总是在輪

① 这种仪器是亚次(R. C. Yates)发明的(見 The Description of a Surface of Constant Curvature, Amer. Math. Monthly, December, 1931)。

子平面內，即总是与承載輪子的杆垂直。在这样的条件下，二杆 a_1, a_2 上其他各点的运动方向也与杆垂直；这可根据在同一杆上两点的距离为一常数这事实来严格证明。假如我們設想杆 c 在运动中固定在动平面 f 上，而 f 永远平行于曲綫 k 的平面，那么 f 的运动的瞬时中心永远在 E 点。事实上，平面 f 上每一点的运动方向經常垂直于这点与任一已知时刻的瞬时中心的連綫（参考第 275 頁）；因为 F_1 点的运动方向經常垂直于 a_1，那么瞬时中心应該經常在 a_1 上。同理，它也在 a_2 上，因而必在 a_1 和 a_2 的交叉点上。这样一来 f 的定瞬心綫就是曲綫 k。另一方面，动瞬心綫必为椭圓 e，因为已經证明，e 是当 c 固定时 E 所画的曲綫。由此看来，我們的仪器带动平面 f 的諸点沿着一些曲綫运动，其效果和椭圓 e 沿着 k 滚动一样。这些曲綫叫做椭圓的**一般旋輪綫**。

椭圓的一般旋輪綫中最重要的是当椭圓在一直綫上滚动时椭圓的一焦点所描繪的曲綫。图 267 表示这样的曲綫。在亚次仪器中，如果让 E 点在一直綫 g 上运动，四边形的各頂点就描出这样的曲綫。因为，我們曾經讲过，杆 a_1 同时垂直于杆上所有点的軌綫，这些

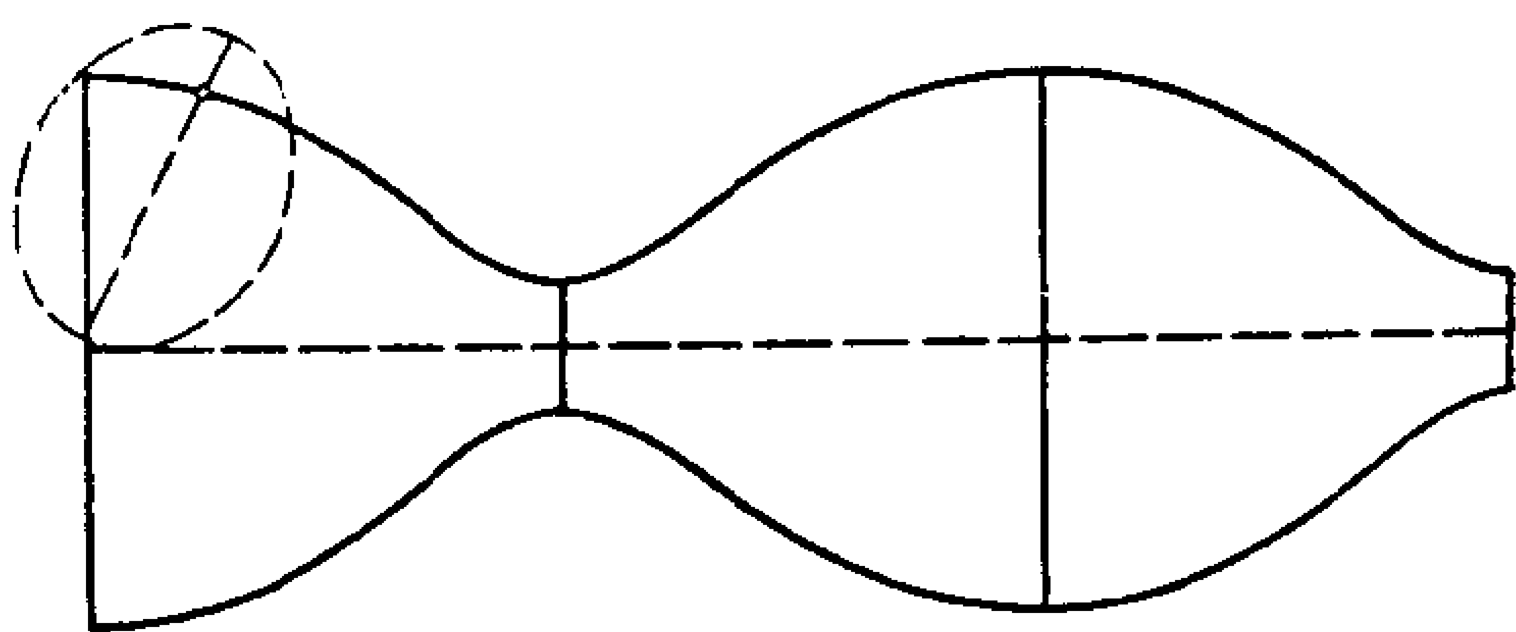


图 267

曲綫是平行的，特別說来，由于 F_1 和 F_2 生成的曲綫是平行的。因此由研究亚次仪器的結果，得到一个可注意的几何定理：已知由一椭圓的一焦点生成的一般旋輪綫，在旋輪綫的各法綫上，依曲率中心的方向取綫段，綫段的长度等于椭圓二焦半徑之和（常数）；那么綫段的端点必在另一椭圓的一焦点生成的一般旋輪綫上，并且这个椭圓与前一个合同，沿着同样一条曲綫滚动，但在曲綫的另一側。

画在图 267 上的一般旋輪綫可作为有常数平均曲率的回轉曲面的經綫。此曲率等于母椭圓的二焦半徑之和之半的倒数。我們在第 229—231 頁上提过，任一常数平均曲率曲面平行于某一具有正常数高斯曲率的曲面。在我們的問題中，第二个曲面必然是另一回转曲面，而且二曲面的經綫一定相互平行。这样說来，在我們仪器中的杆 a_1 上必有一点描出正常数高斯曲率曲面的經綫。根据在第 229—231 頁上給出的曲率之間的关系，可以推知这个点就是杆 a_1 的中点。若让杆的长 c 和 a 取所有可能的值，我們便得到所有正常数高斯曲率回轉曲面(但球面例外)的經綫。

§ 43. 在空間里的連續运动

現在我們把上一节的討論应用到空間(或者說空間区域) r 在固定空間 R 里的运动。在空間里，每一剛体运动都可以看作繞一定軸的旋轉和沿此軸的平移的合成(即螺旋运动)(参考第 84 頁)。由于这个原故，除了平移之外，对于任一运动都可以确定一条直綫作为螺旋运动的旋轉軸。至于平移的特殊地位，如把任一平移当作繞一无穷远的軸的旋轉，也就消除了。

利用比較运动空間的相邻位置的办法，可以作出在每一已知时刻的瞬时軸，其步驟与作平面运动的瞬时中心相仿。在运动的时候，这軸的位置連續变动，同时在空間 R 和 r 中各扫过一直紋面。这二直紋面和平面运动的定瞬心綫和动瞬心綫相当，从而分别叫做空間运动的定瞬軸面和动瞬軸面。空間里的一个运动，只要已知道二瞬軸面和二瞬軸面上对应的两条母綫，便完全确定了。要想重新得到这个运动，我們先使这二已知母綫重合，并使二曲面沿这重合的母綫密切，然后将动瞬軸面以某种方式(下面再讲)沿定瞬軸面“滚动”，使二曲面經常有一公共直綫，并沿此直綫密切。

这种空間里的接触运动与平面上的一曲綫沿另一曲綫滚动的

情形相仿。不过，两种形式的运动自有根本不同的地方：一平面曲綫可沿任意一曲綫按种种不同方式滚动，但已給定的直紋面不能沿任意的另一直紋面“滚动”。我們知道(参看第211頁)，二直紋面沿着一公共母綫密切，当且仅当二曲綫沿这条直綫有相同的窄度的时候。如果这个条件适合，则二曲面还应这样放置，使在这些直綫上的腰点重合。在整个的接触运动过程中二瞬軸面必須始終适合这个条件，并且保持这样特殊的相对位置。如果二曲面在对应点上的腰曲綫和母綫之間之夹角总相等，则接触运动是純滚动，并无滑动。但如夹角不等，则二曲面将沿着它們的公共母綫滑动[①]。前一种較特殊的接触运动，可以看作是由无穷小旋轉組成的，这时二瞬軸面是可以相互貼合的曲面。

举一个很簡单的例子，即当二瞬軸面是单叶回轉双曲面的情形。这里腰曲綫是二曲面的最小緯圓。由于曲面有旋轉对称性，它們的窄度是一常数，并且只依賴于母双曲綫的形状和大小。

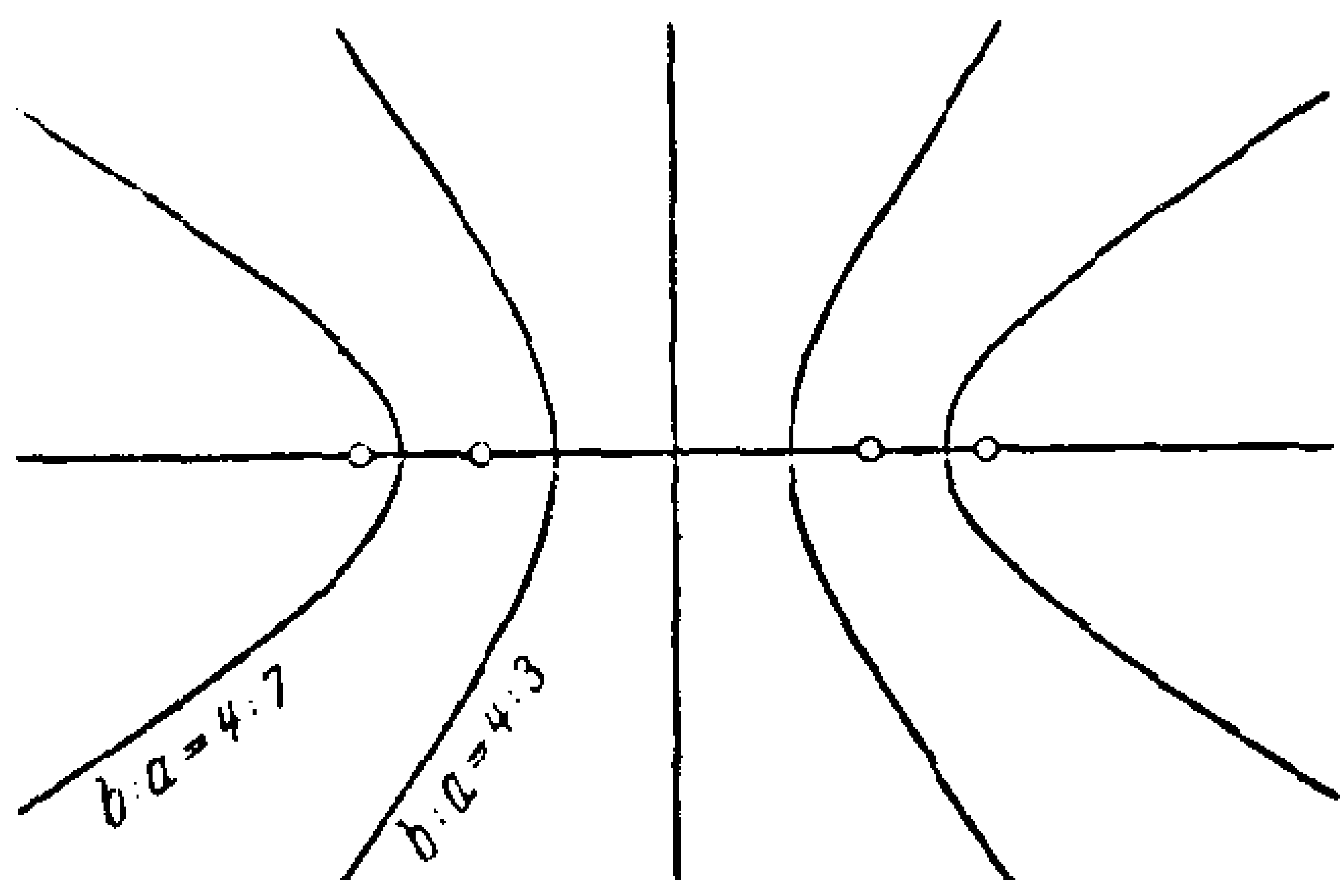


图 268

不难用解析方法表示二双曲面有相同窄度的条件。設母双曲綫在直角坐标系中的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

和

---

① 二直紋曲面成为空間某一运动的二瞬軸面的充要条件不用解析方法不能解釋。首先，二曲面上所有的腰曲綫之間应有一种对应方法，使在对应点处的窄度相等。設 α 和 α' 是对应点处腰曲綫和母綫的夹角，并設 s 和 s' 是在二腰曲綫上对应的弧长，则下列方程应成立：

$$\frac{ds'}{ds}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}.$$

$$\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$$

因之 y 軸为旋轉軸。要使二双曲面的窄度相等須滿足一个簡单的式子：$b=B$。在图 268 上表示这样的两个双曲綫及其焦点。

在接触运动中二双曲面的相对位置不变。因此如果让一个双曲面保持不动，則第二个双曲面的旋轉軸繞第一个的旋轉軸旋轉。如果让第一个曲面繞它自己的軸作反向旋轉，則运动将大为簡化。这样，第二个双曲面的軸在空間保持不动（第一个双曲面的軸显然也是不动的）。因此曲面的接触运动可以如此产生：把它們拼攏，使沿一直綫相切，然后让它們繞各自的軸旋轉，旋轉的速度保持适当的比例。



图　269

这就提供了二交叉軸間齿輪傳动的一种实际有用的方法。由于滑动对机器有損害，所以有采取合同双曲面的必要。图 269 表示这种方式的傳动。

第六章 拓扑学

在研究投影几何学时，我們已經看到了不用比較长度和角仍能描写具有明确的几何特征的現象。拓扑学所研究的几何事实，甚至不包括直綫和平面的概念，只包括图形各点之間的連續連通性。設想有一个用可随意变形但不得撕破或粘連的某种材料制成的图形。我們将探討經过这种变形而不变的屬于图形的性质。举例来說，球面的拓扑性质就和橢球面、立方体、四面体的相同。另一方面，球面和环面的拓扑性质不同，因为显而易見，一球面若不許撕破也不許粘連，不会变成环面。

在几何学的发展史上，拓扑学問題的出現比投影几何学还要迟，这是自然的。拓扑学的問題直到十八世紀才开始研究。晚近发現，拓扑学的一些定理，纵然在外表上有不确定性，却同許多最精确的定量的数学結果发生联系。这里是指代数学、复变数函数論和群論。时至今日，在数学各分支中，拓扑学的研究是最为丰富多采、最有收获的一种。

今后我們限于研究关于三維空間中的曲面的几个問題①。首先从拓扑学上最容易探討的曲面——多面体入手。

§ 44. 多面体

所謂多面体，是說任意多个多边(角)形的組合，这种組合适合两个条件：(1)在任一棱相遇的多边形恰恰有两个(作成二面角)，(2)从任一多边形出发，跨过一些棱，能到任一别的多边形上去。

---

① 要想进一步通曉拓扑学的基本概念，可参考 П. Александров, Einfachste Grundbegriffe der Topologie。

最簡单而又最重要的多面体要算簡单多面体。所謂簡单多面体，是說經过連續变形能变作球面的多面体。正多面体(§14)就是簡单多面体的例子。不久我們会看到，也有好多多面体不是簡单多面体；也就是說，有不能变作球面的多面体。

我們在§14見过，正多面体有一特性：沒有凹进的棱。由此引申得到，正多面体是凸的。"凸"的意思是說整个多面体居于每一面的同一側，因而我們可以拿任一面作底把它放在桌面上。凸性不是拓扑性质，因为多面体經过按照拓扑观点是非本质的变换能变为非凸的多面体。虽然如此，多面体的凸性却蘊涵着一个拓扑性质。因为，稍加思索即可明白：任一凸多面体一定是簡单多面体[①]。

簡单多面体的頂点数、棱数和面数之間有一个很重要的关系。这个关系是欧拉发現的，因而叫做多面体的欧拉定理(公式)。設E是多面体的頂点数，K是棱数，F是面数，欧拉定理断言：在所有的簡单多面体中，

$$E-K+F=2.$$

姑以下面举出的几个多面体为例来驗证这个奇妙的定理。

四面体：$E-K+F=4-6+4=2.$

---

① 凸和非凸的多面体有一个突出的差别：一方面任一凸閉多面体都是剛性的，另一方面，有的非凸閉多面体，它的面可以作相对运动，凸多面体的剛性同在第231頁讲过的凸閉曲面的剛性类似。但一直到現在还沒有人能用极限的方法从多面体的剛性直接推出凸閉曲面的剛性。——原著者注。

借助从多面体出发的极限过程以研究曲面的度量的方法，近几年来已为A. Д. 亚历山大洛夫所发展(参考他著的"凸曲面的內蘊几何学"，Гостехиздат, 1948)。A. B. Погорелов根据亚氏方法，不用解析方法而用几何方法证明了凸閉曲面的剛性(参考他写"Однозначная предельность выпуклых поверхностей", Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, Выпуск XX IX, 1949)。——俄譯者注。

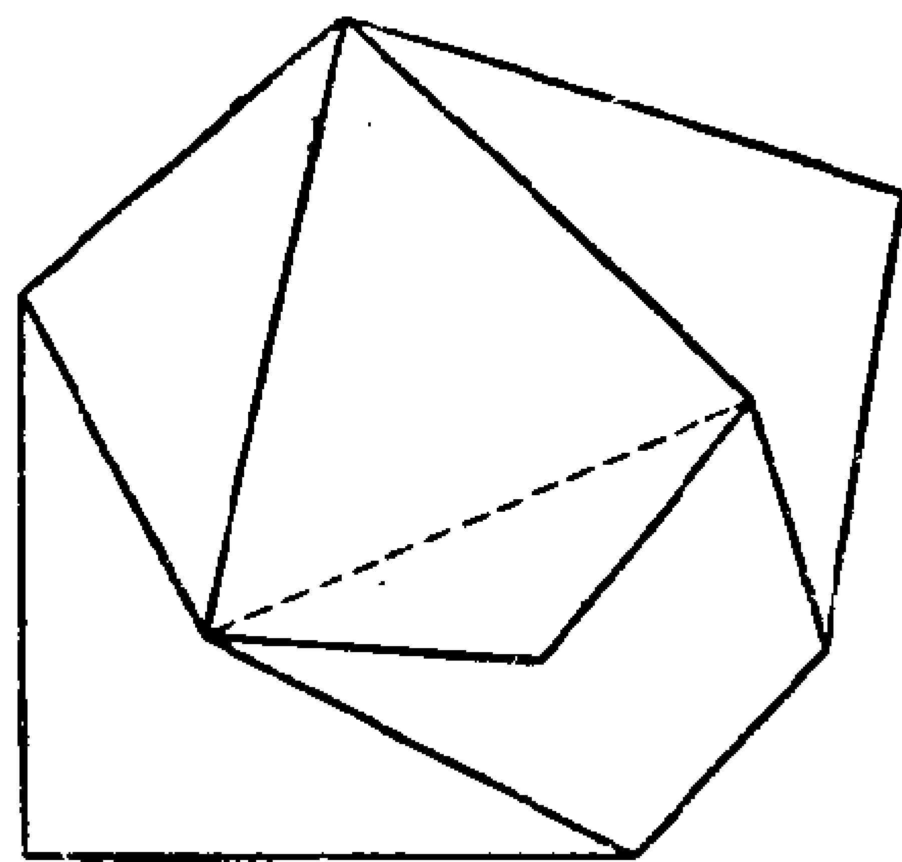
(亚氏书有吳祖基的中譯本，科学出版社出版，——中譯者注。)

立方体: $8-12+6=2$.

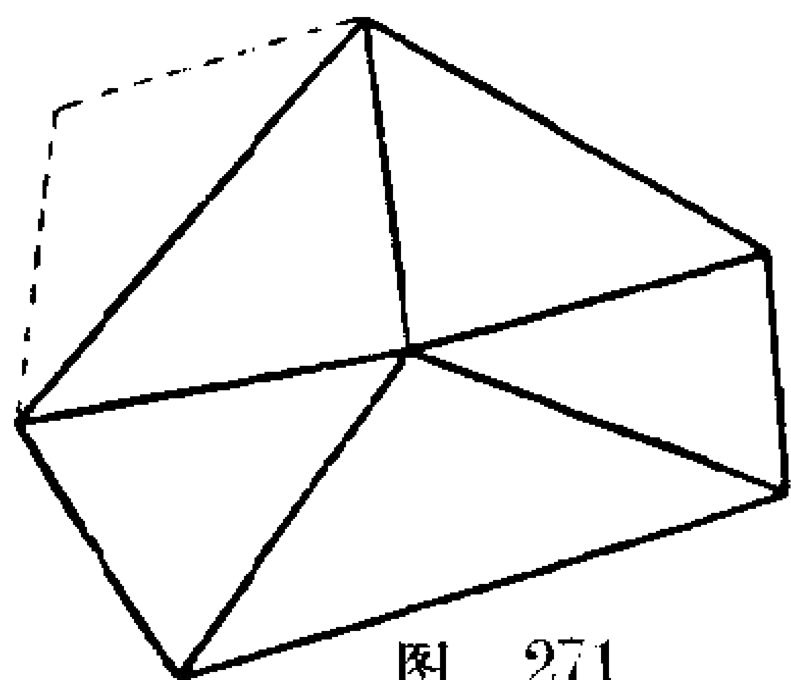
八面体: $6-12+8=2$.

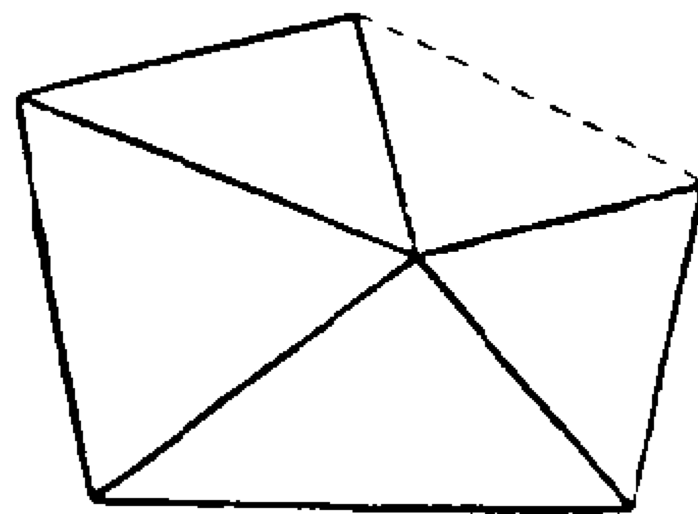
为了证明欧拉定理,我們在一平面上作一簡单多面体的象,即所謂多面体的平面网。其法如下:从多面体中任意挖掉一个面,把其余的各面一齐挤压到这个面上来。在这样变形时,还能办到使各个面依然是以直綫段为边緣并且頂点的总数也不变的多边形。(但是当然不能作到使每个平面多边形都与原多边形合同。)这个多边形組称为多面体的平面网。第147—148頁上的图153到157都可以看作是正多面体的平面网。

平面网所含的頂点数和棱数跟多面体的相同,只是面数少了一个。現在让我們对平面网作一系列的变换,使网的构造簡化,但不变更 $E-K+F$ 这个数。首先,凡遇到在平面网中边数大于3的多边形,就联一对角綫。这样将多出一个面和一个棱,但頂点数未变,因此 $E-K+F$ 不变(图270)。继續用这个办法,一直到各面都成为三角形为止。


图 270

如果沿着作好的三角形网的某一个棱添上一个三角形,使新三角形有一棱是原三角形网中的一棱(图271)。这样頂点数和面数各多了一个,棱数多了两个,因而 $E-K+F$ 仍不变。此外,若在边緣陷入的部分过二頂点联一綫段(图272),这样虽然多出一个


图 271


图 272

三角形，因而多出一个面，但棱数多一而頂点未变，因而$E-K+F$仍不变。

容易看出，任一三角形网都可以經过多次重复上述两种手續从一个单独的三角形产生出来，所以$E-K+F$之值对于任一三角形网，从而对于任一平面网，和一个三角形的相同：$E-K+F==3-3+1=1$。不过，平面网的頂点数和棱数和簡单多面体的相同，仅面数少一；因此对簡单多面体必有

$$E-K+F=2①.$$

欧拉定理提供了正多面体只有五种类型这一事实一个新穎而簡单的证明(参考第 91—93 頁)。在我們所考慮的正多面体中，遇于一頂点的面数設为n，因而在这点相遇的棱数也是n。又假定E, K, F的意义同上，那末通过所有頂点的棱数等于nE。但每一棱已計算了两次，因为每一棱連接二頂点。所以

$$nE=2K.$$

假定多面体的每一面由r个棱所圍成，則rF是包圍多面体各面所有的棱数。这里每一棱又計算两次，因为每一棱介于二面之間。所以

$$rF=2K.$$

将上二式代入欧拉公式，得

$$\frac{2K}{n}-K+\frac{2K}{r}=2,$$

此式又可以写作

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}+\frac{1}{K}.$$

① 布安加雷将欧拉定理推广到n維空間。代替頂点、棱和面的是 0, 1, 2, …, $n-1$ 維的形象。設这些形象的个数分别用$N_0, N_1, N_2, \cdots, N_{n-1}$表示。則对于和簡单多面体相当的流形有下列关系式

$$N_0-N_1+N_2-\cdots=1-(-1)^n.$$

当$n=3$时，这就归結为欧拉定理。

按 n 和 r 的涵义，每个数至少要等于 3。但它們不能同时大于 3。假定 n 和 r 都大于 3, 則应有

$$\frac{1}{K}=\frac{1}{n}+\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0,$$

这是不可能的。今設 $n=3$, 則得

$$\frac{1}{K}=\frac{1}{r}-\frac{1}{6}.$$

由此可見，对于 $n=3$, r 只能取 3, 4, 5 三个值，从此得出 K 的值等于 6, 12, 30。因为方程对于 n 和 r 对称，故当 $r=3$ 时立即得出 n 的对应值。这样說来，我們一共得出六种可能的情形，其中有两种是相同的，即 $n=3$, $r=3$。所以只剩下五种不同类型的多面体，并且它們确实在正多面体中实現[①]。

这个证明和前面讲的(第 91 頁)那个证明比較起来，突出的地方，在于这里并沒有假定所有的面都是正多边形，而只假定了各面由同数的棱所圍成，并且每一点有同数的棱通过。由此可見，只要說的是簡单多面体，則"拓扑正則"多面体和"度量正則"多面体实在沒有什么不同。

現在轉向非簡单多面体。今以棱柱块为例(图 273)。这个棱柱块乃是一个四棱柱，中間挖去一个洞，洞的形状仍是一个四棱

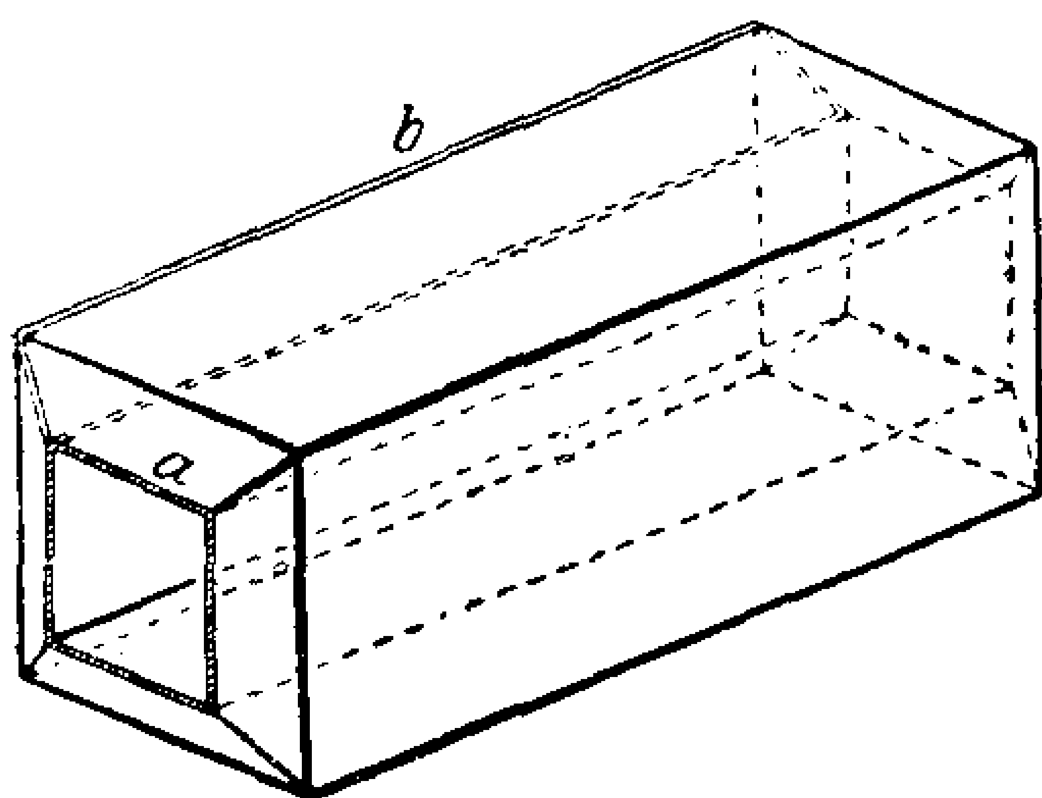
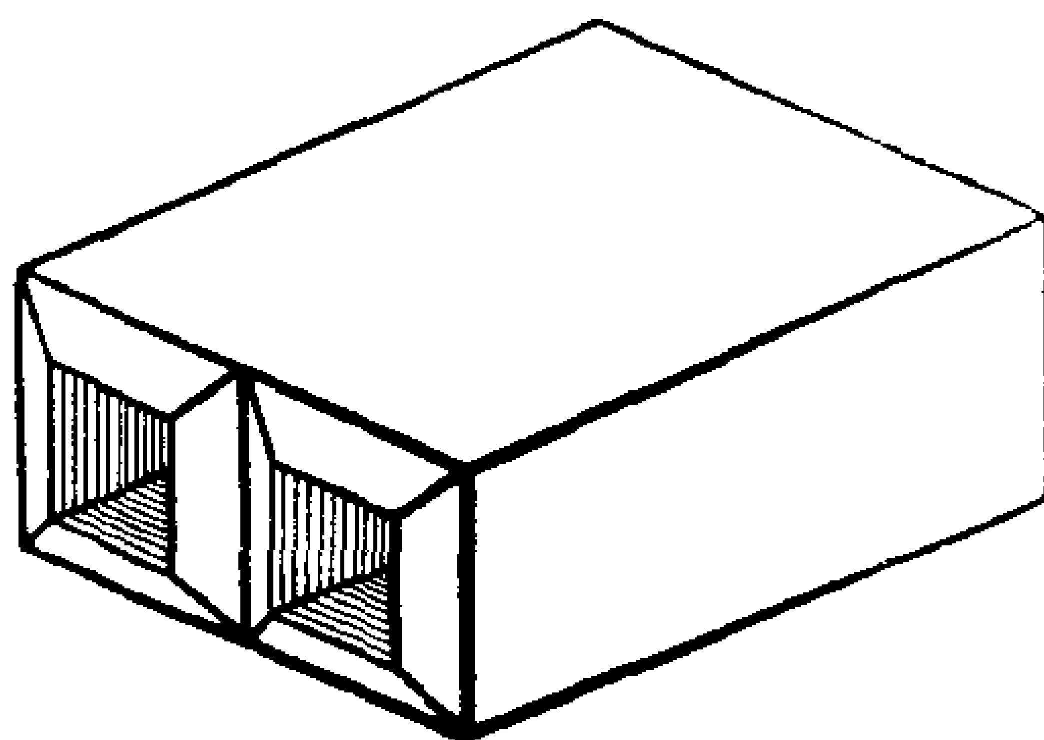


图 273


图 274

① 相仿地，欧拉定理的布安加雷推广提供了决定高維空間的正則胞腔的一种方法。

柱，这两个四棱柱的边分别平行。又，二棱柱所共有的底面向外倾斜，如图所示。这个棱柱块是不能变形成球面但可以变形成环面的多面体[①]。若在棱柱块上仿照上述方法挖几个洞，可得出其他类型的多面体(图 274)。

要想統观种类繁多的多面体的全貌，我們給每一多面体一个确定的数 h，所謂多面体的連通度。今考虑由一个多面体的棱組成的閉合而不自交的折綫(閉棱折綫)。如果每条这样的閉棱折綫都把多面体的表面剖分为分离的两片，則命此多面体的連通度 $h=1$。显然，所有簡单多面体的連通度都等于 1，因为球面被自身上的任一閉曲綫剖分为两片。反之，也容易看出，連通度等于 1 的多面体总可加以連續变形，使之成为球面。由于这个原故，簡单多面体也叫做单連通的多面体。

另一方面，也有在棱柱块上的一条閉棱折綫(例如图 273 中的正方形 a)不能把棱柱块剖分为两片的情形。凡具有这种性质的多面体我們給它大于 1 的連通度。为了确定它的連通度，应同时考虑連接第一次所作的棱折綫上二点的所有的棱折綫(不一定是閉合的)。

如果任何这样的一对棱折綫剖分多面体的表面为二，我們就說它的連通度 $h=2$。若剖分不开，再重复上述步驟。一般地，我們有下面的定义：

我們說一多面体的連通度为 h，如果在該多面体上可以找到有一定順次的 $h-1$ 条、但不是 h 条棱折綫，剖分不开多面体的表面[②]。此处約定第一条棱折綫必須是閉合的，而每一后継的棱折綫則連結前一条棱折綫上的两点。

① 棱柱块也是拓扑正則的。

② 这是說，多面体上任意二点总可能連以在多面体上的、但不同任一棱折綫相交的曲綫。

在棱柱块上，从图 273 上容易看出，有两条这样的棱折綫(指正方形 a 和梯形 b)，不能把多面体的表面剖分为两片。所以該多面体的連通度至少是 3。下面我們要证明，它的連通度恰好是 3。

現在发生这样的問題：能不能把已证明对于单連通的多面体成立的欧拉定理推广到有任意連通度 h 的多面体上去呢？我們不敢奢望定理一字不改，因为那个定理的证明原来借助于“平面网”，而平面网的結构，显然只有对单連通的多面体才有可能。不过可以证明，一般地应有

$$E-K+F=3-h.$$

当 $h=1$ 时，这个方程就是前面证过的欧拉公式。現以上述棱柱块为例。显然它有 16 个頂点，32 个棱，16 个面，因此有

$$16-32+16=3-3=0.$$

从而可知，棱柱块的連通度恰好等于 3。这个一般的欧拉定理对于决定多面体的連通度甚为方便。应用这个办法只須数一数頂点、棱和面的个数，而不必把棱折綫一条条地檢驗。

§45. 曲面

在上一节我們看見过，簡单多面体可以經过变形而成球面，棱柱块可以經过变形而成环面。相仿地，一些更复杂的拓扑图形也可以用像多面体那样的图形来代替。用这种方法，拓扑图形的理論归結到由簡单元素組成而組成的方式易于描述的图形的研究。这种所謂“組合拓扑学”的研究方法有很大的优点：它可以立刻推广到三維以上的空間去；因为每一多面体的結构，用系統的組合規則而不假借直观力之助，即可完全描写出来。

話虽如此，可是直接拿曲面作基础，更容易为直观接受。例如，球面的結构比多面体的簡单，环面的結构比棱柱块的簡单。因此我們想把多面体連通度的概念推广到任意曲面上去。

对于球面，連通度 h 应該定为 1，对于环面，則 h 是 3。要得到

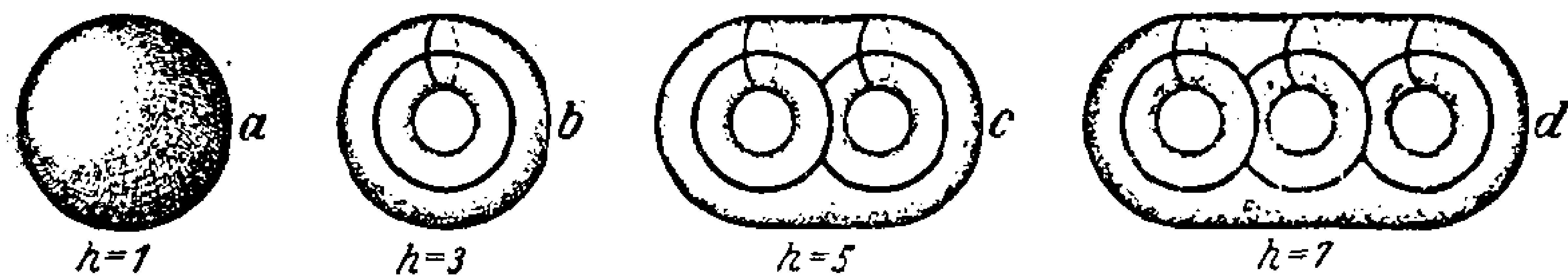


图 275

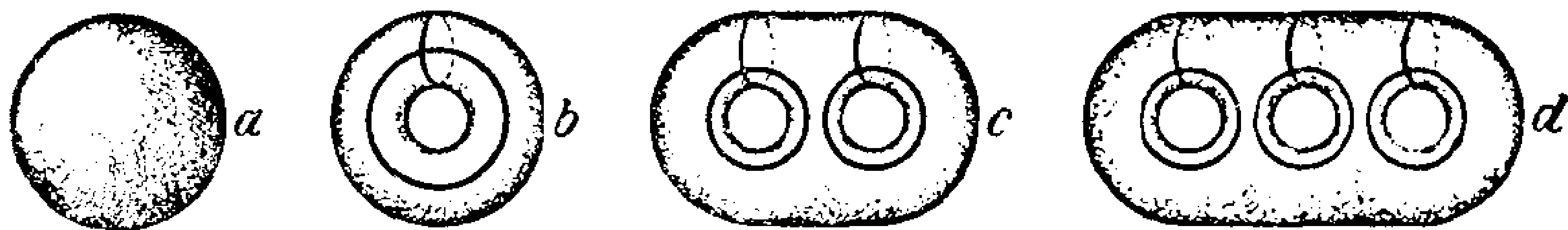


图 276

更高的連通度，可用容易揉捏的物质做成球，捏扁，再开上几个洞（图 275）。这种曲面我們称之为“圈餅”①。可以证明，有 p 个洞的圈餅，其連通度 $h=2p+1$。图上画出了几个連通度不同的圈餅。剖分不开曲面的曲綫的数目是 0，2，4，6，圈餅的連通度則分别是 1，3，5，7。容易看出，若是再任意作一条連接截口上两点的曲綫，就能把曲面分成两片了。

在一般曲面上选擇曲綫比在多面体上自由，因为在多面体上只能由棱折綫里挑选。因此我們可給曲面的連通度下不同的定义，下面的是其中的一个：

在連通度为 h 的曲面上，可作 $h-1$ 条閉曲綫，剖分不开曲面；但任一組 h 条的閉曲綫至少把曲面分成两片。

图 276 上表示对于 $h=1, 3, 5, 7$ 各种情形的曲綫組。

我們还可以加入另一个条件，就是要曲綫通过曲面上任意选定的某一点。这样就得到曲面的“典型截口組”，这对于某些目的甚为方便。第 298 頁和第 299，300 頁的图 285，286，287 是典型

① 圈餅是德国一种絞环形的脆餅干。——中譯者注。

截口組的例子。

另一方面，若限制閉曲綫組互不相交，上述結果須加修改。对于奇数連通度的曲面可以证明:

在連通度 $h=2p+1$ 的閉曲面上，有一組剖分不开曲面的 p 条，但不多于 p 条互不相交的閉曲綫。

这个定理的眞实性可从图 276 看出来。

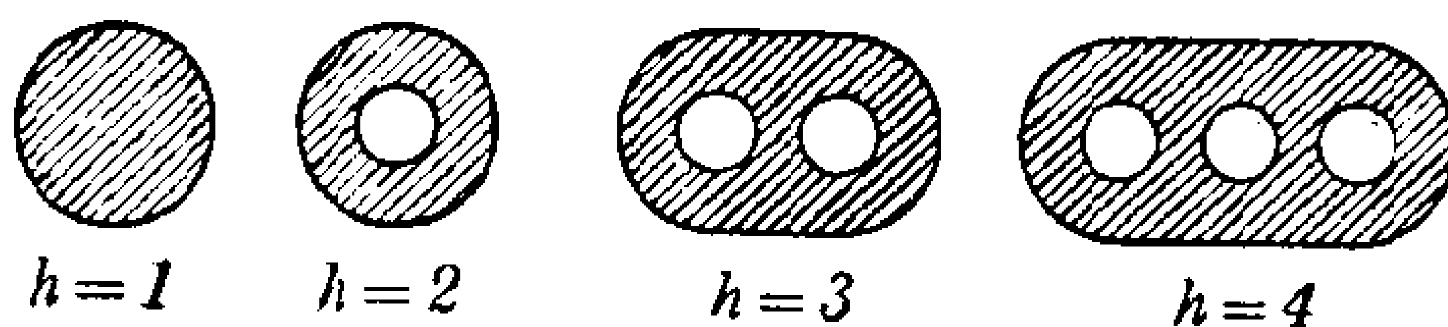


图 277

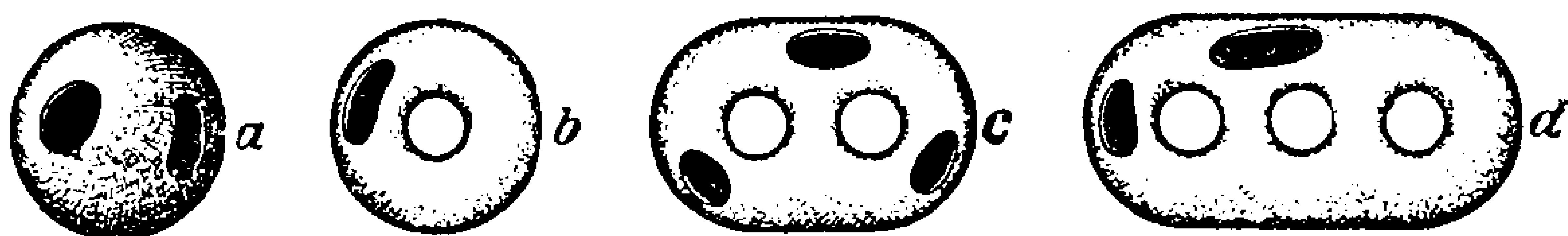


图 278

直到现在，我們仅仅研究了有限閉曲面(沒有边緣)。其实連通度的概念还可以推广到更一般的情形上去。首先，让我們假定曲面是有限的，但有若干个閉边緣曲綫。假定这些曲綫不跟自己相交，也不彼此相交。图 277 上画出一些这类的曲面片。还有一些这类的曲面可从图 275 和 276 的一些閉曲面得到，办法是把它們想像为中空的，并且挖开几个洞(参考图 278)。①

在有限有边緣的曲面中，同以前一样，也用一組曲綫来定义連通度，只有一点不同：第一条曲綫不是閉合的，而是連結边緣上两点的曲綫。至于后继的曲綫，可以以这組中前面的那些曲綫上的两点为起訖点，也可以連結边緣上的两点。按照这个定义，則图 278 上各曲面的連通度应該依次为 2, 3, 7, 8。

① 同图 277 的曲面相反，图 278 b, c, d 不能用一張紙剪几个洞經过变形而成。这种区别在几何函数論中甚为重要(簡单域和非簡单域)。

用閉曲綫来規定連通度的办法，不能直接推广到有边緣的曲面上去。

現在我們来考虑伸展到无穷远的曲面，而且它可以有边緣，也可以沒有边緣。这样曲面的拓扑結构要看曲面是安装在度量空間里或安装在投影空間里而定。

在度量空間里我們姑限于討論曲面的有限点。这样，就可設想空間好像被包圍在一个非常龐大的球面內，因而我們的曲面可換成它在球面內的那部分。这正是屬于有限又有边緣的曲面的問題，因而便可应用前面已讲过的理論。①

在投影空間里，情形完全不同。我們把每一直綫当作是閉曲綫，其上有一无穷远点，曲綫的二支就在这里汇合。除此之外，这一无穷远点认为同时屬于前一条直綫的所有平行綫。按照这些規定，則作为一个整体的投影空間也是在它自己的諸无穷远点处連通的。曲面包含一无穷远点的条件是：曲面上有一路綫，此路綫越来越接近于这个无穷远点所屬的某一直綫。这里不一定要求曲面在与此相反的方向上接近于某一平行綫。如果曲面同时在两个相反的方向上接近二平行綫，我們应认为曲面在无穷远点連通，但若曲面仅沿某一方向接近于一直綫，而不在相反的方向上接近于它的平行綫，則直綫上的无穷远点是一边緣点。其次，假如曲面有一条伸展到无穷远的边緣曲綫，則这条曲綫必在无穷远閉合；也就是說，曲綫若不是在相同的方向上或相反的方向上漸近地接近于二平行直綫，就是包含无穷远綫的一部分。因为一非閉曲綫不能作

① 必須假定球能选擇得这样大，使得任何更进一步的扩大都保持曲面在球內的部分的拓扑結构不变。不难找到不适合这个条件的例子。我們繞一个平面正方形点格的各点作无公共点的小圓，再从平面上去掉各圓的內部，則得一平曲面，对于这个曲面在任意已給球內的部分，容易計算出它的連通度。但是，显然这个連通度，在保持球心固定的条件下，随着球的增大而增大。

成曲面的边緣。例如在投影空間里，像图 279 上标出的介于一直綫和一折綫之間的部分平面不跟平面的其他部分分开，因为比如从 A 到 A' 可以取道无穷远。但在度量空間里，这一部分平面就好像以一条閉曲綫为边緣似的。

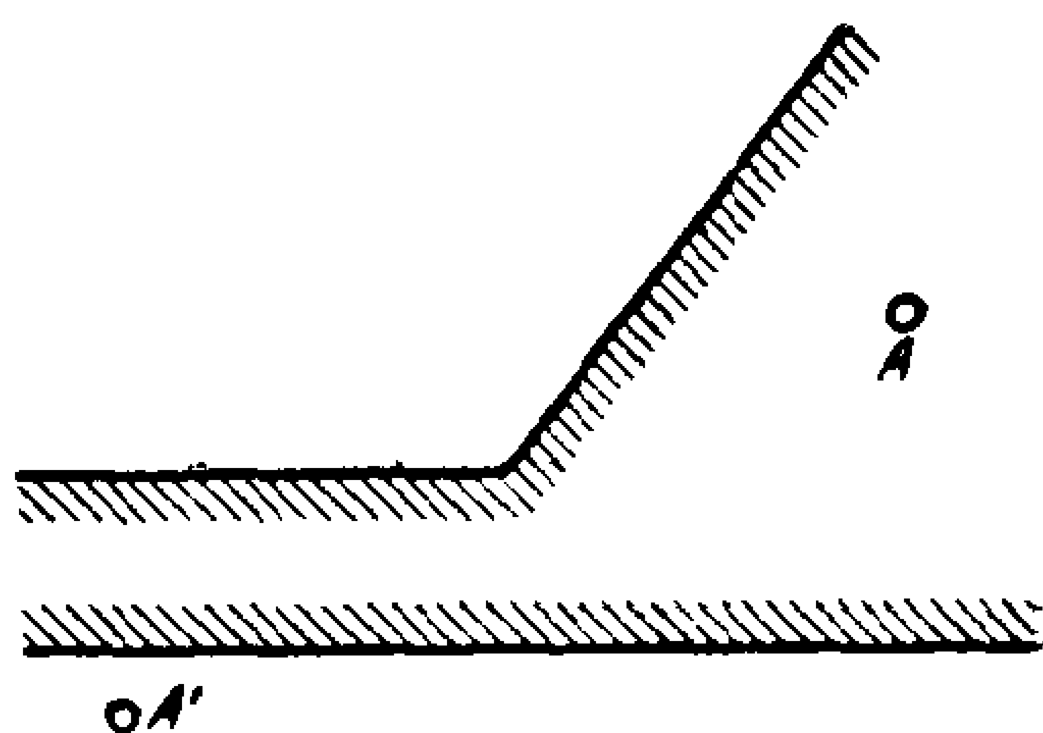


图 279

相当的說法也适用于作为一个整体的平面。度量平面以无穷远直綫为閉边緣曲綫，因此它同圓面拓扑等价。另一方面，投影平面是閉曲面。我們也可給投影平面作一个簡单的拓扑模型。为此，我們从前一章讲过的一个作法(第 237, 238, 241 頁)开始。在那里通过叠合半球面边緣上大圓的每对对徑点而建立投影平面的一对一映射。当然也可用圓面代替半球面，因为圓面总可以連續变形而成半球面。現在让我們把圓面变为正方形面。于是投影平面同正方形面拓扑等价(图 280)，但此正方形边緣上的每对对徑点(如图 280 上的 A 和 A' 等等)須視为叠合起来的。在这个模型中，同投影平面閉曲綫对应的不仅是正方形上的閉曲綫，还有一切連結一对对徑点的曲綫(如图 280 的直綫段 AA' 等等)。

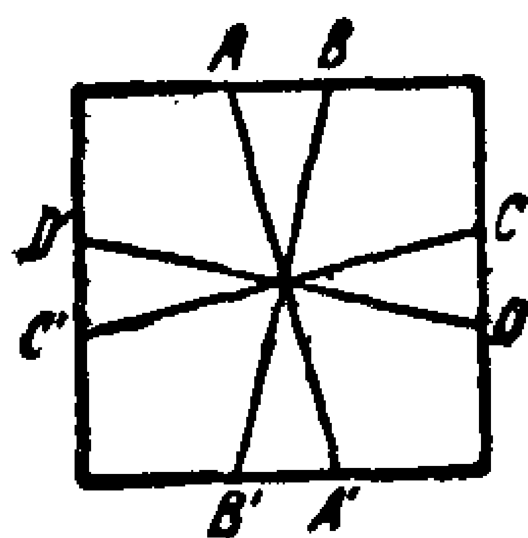


图 280

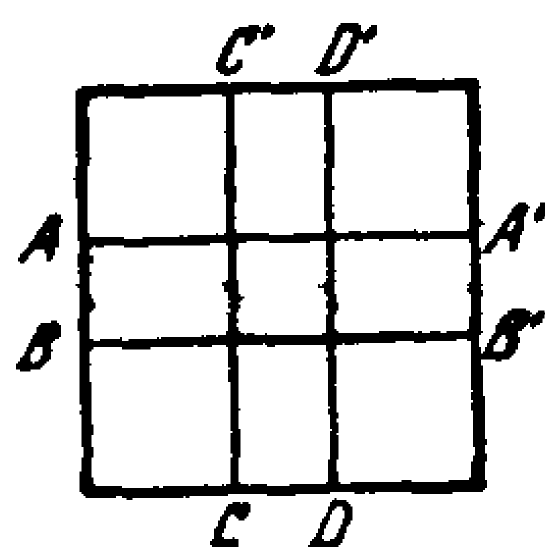


图 281

关于投影平面的拓扑探討擱到以后再继續讲(第 308 頁及以后)。此刻我們要考虑由图 280 的办法直接引出来的其它类似的作法。首先我們还是从正方形面或矩形面开始，但須按照图 281

表示的那样迭合对徑点。于是我們又得到一个閉曲面的模型。这一次我們容易从模型恢复所代表的曲面。首先把矩形弯曲成圓筒形(图 282, 283), 并将 1, 2 两边这样粘牢, 使得二边上每对叠合点

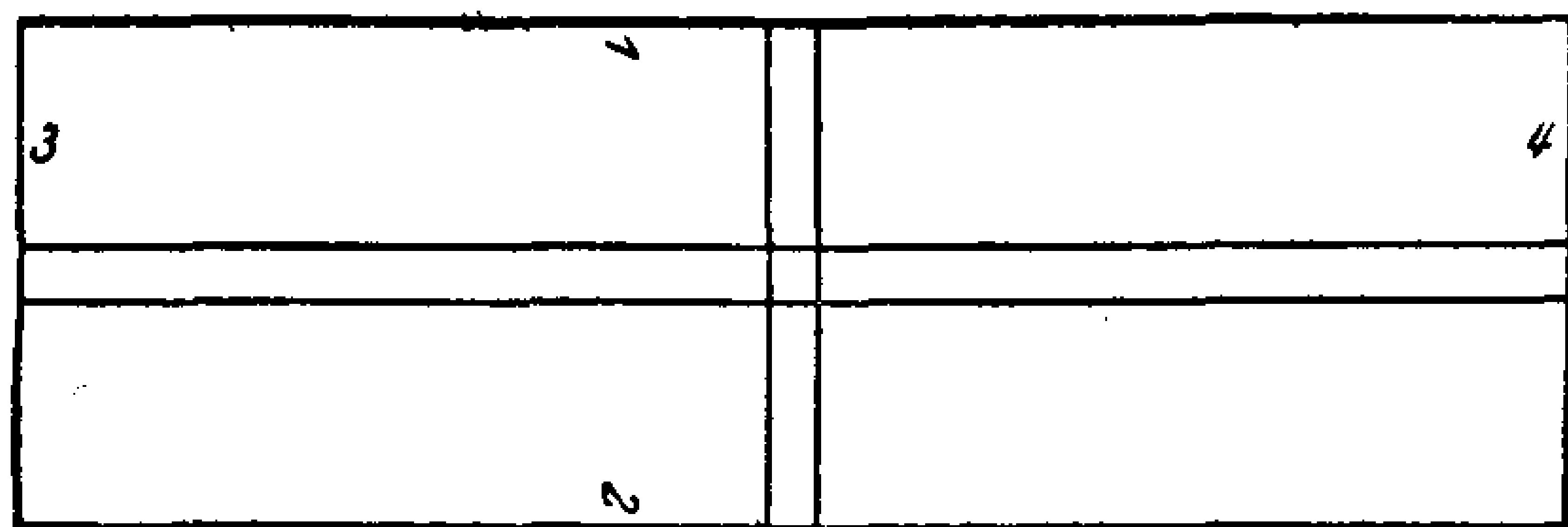


图 282

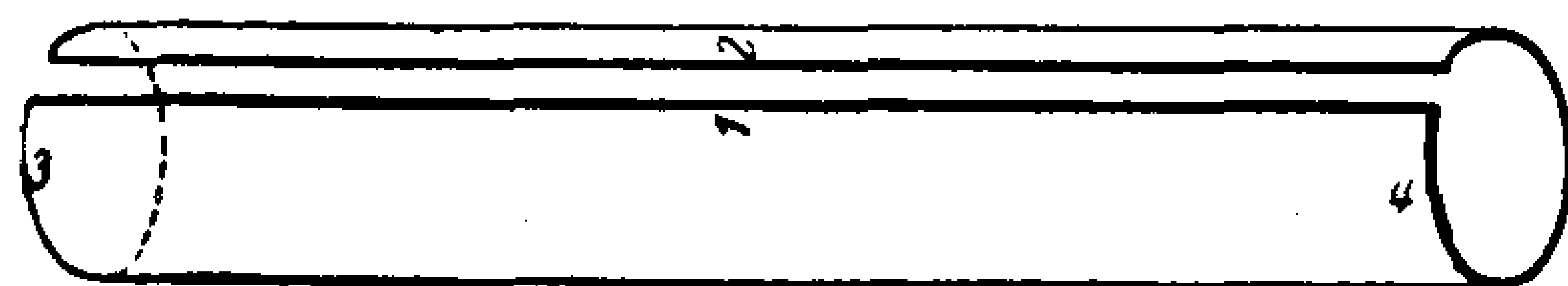


图 283

重合。这时 3, 4 两边变成了圓周, 再把这二圓周按同一規則粘在一起 (图 284)。最后得到环面, 这时原来的矩形面的边緣变为环面的"典型截口組", 其中每一截口相当于矩形面的一对对边(看图 285 和 275b)。反过来, 从环面开始, 将环面沿典型截口組切开, 則

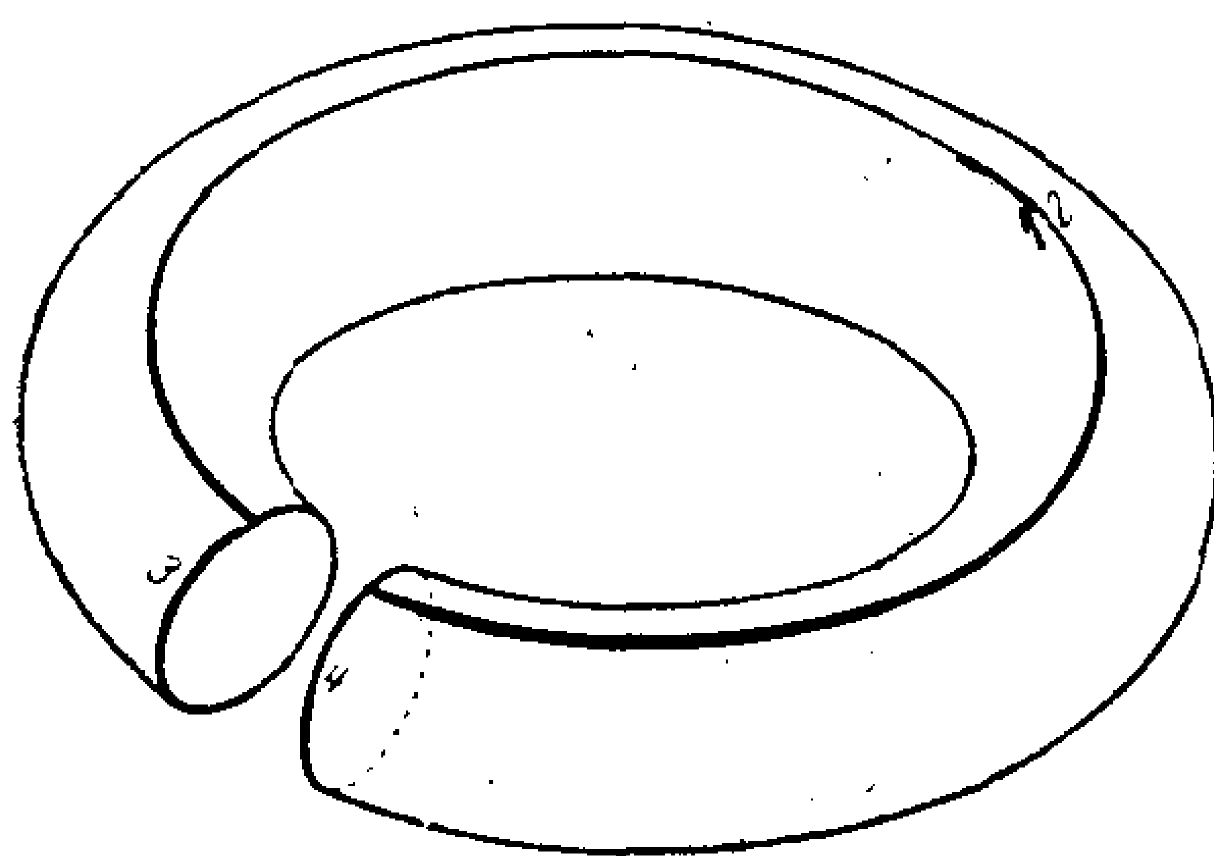


图 284

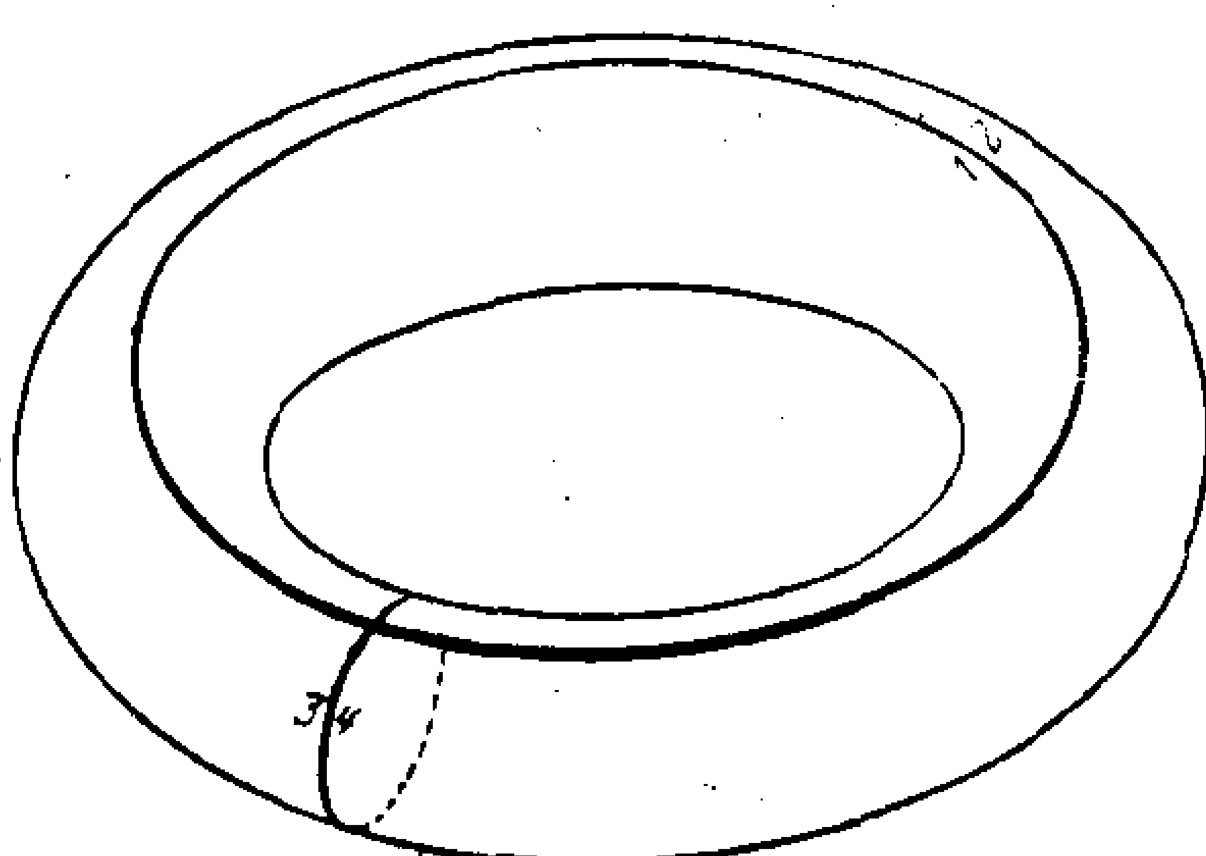


图 285

得一个图形, 它与对边按上述規則叠合的矩形面拓扑等价。这一作图方法也适用于所有的"圈餅"。对于連通度为 $2p+1$ 的圈餅, 典型截口組由 $2p$ 条曲綫組成; 沿这些曲綫剖开, 得到一个有 $4p$ 条

边的且各边按一定規則成对地叠合的多边形。图 286 和图 287 演示 $h=5$ 和 $h=7$(即 $p=2, p=3$)的情形的分步作法。

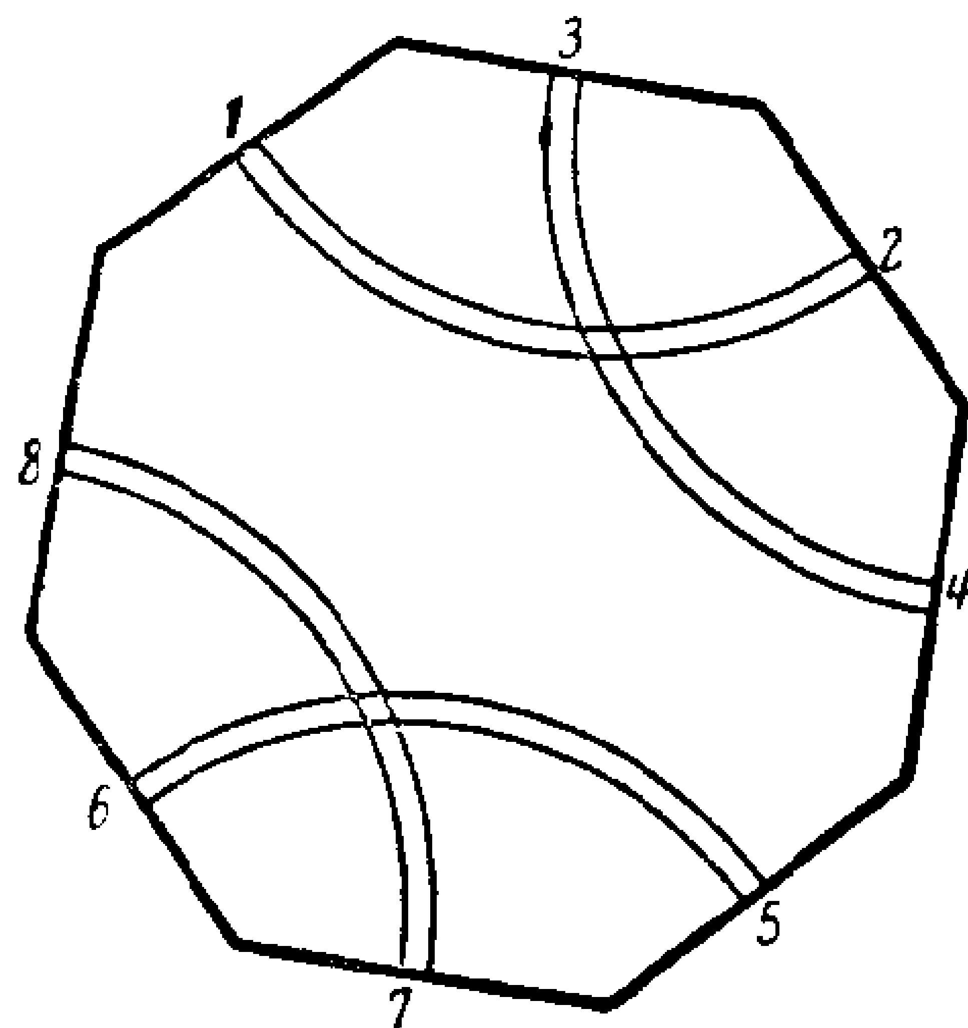


图 286 *a*

将圈餅映成 $4p$ 边多边形的映射，在連續映射理論(参考第 320 頁)和函数論中（参考第 330 頁）有重要的应用。两种应用都依据这样的事实：每一 $4p$ 边正多边形都是正則地复盖双

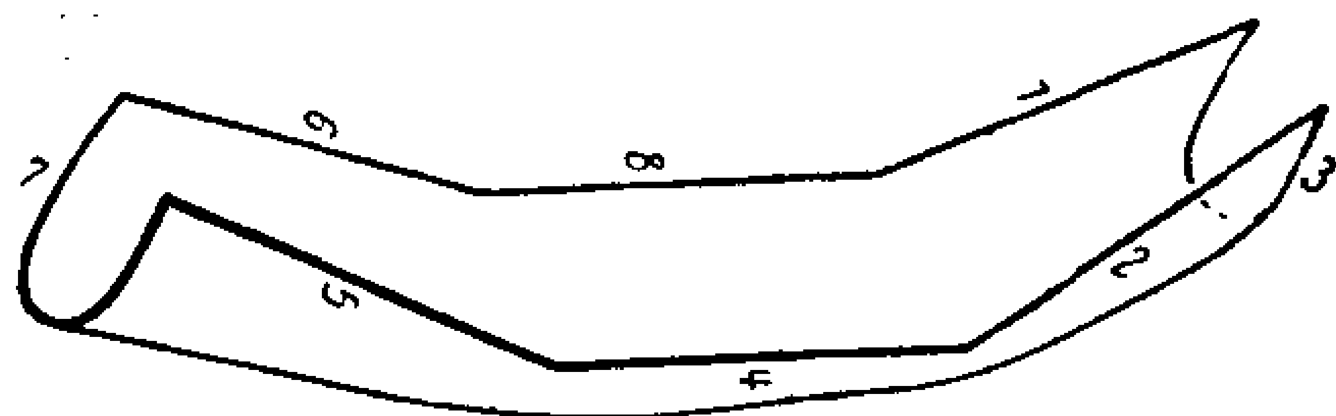


图 **286** *b*

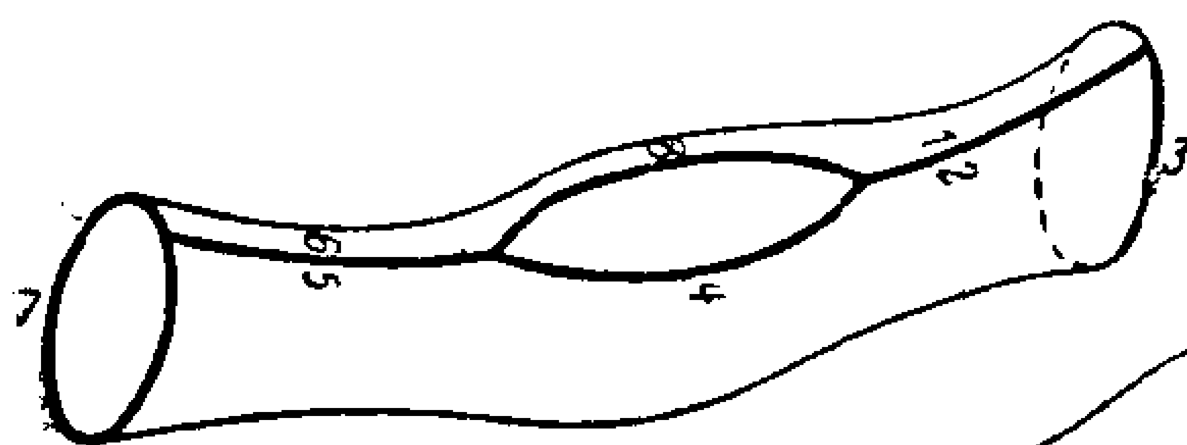


图 286 *c*

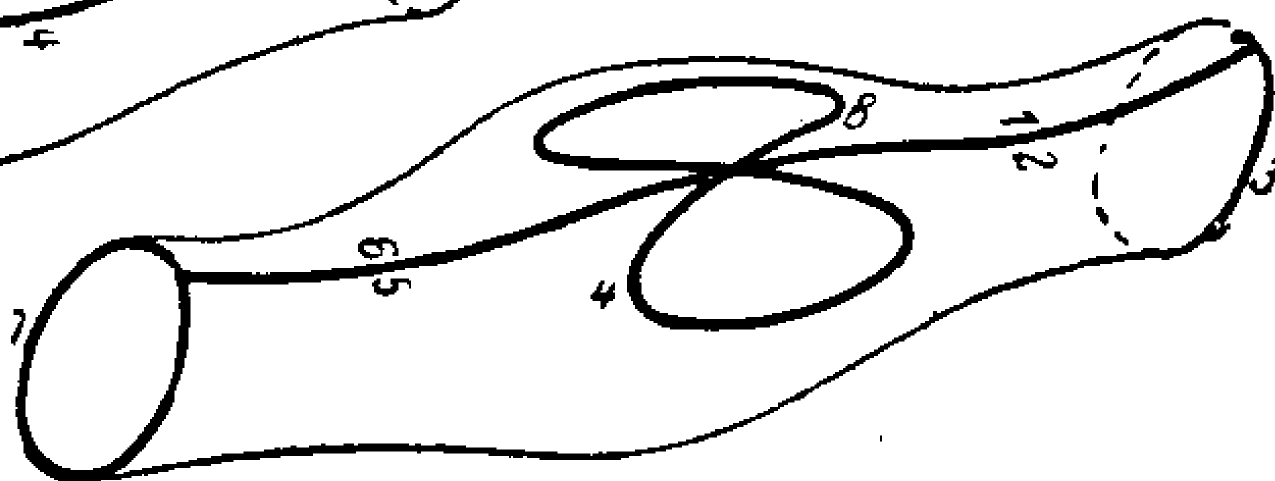


图 286 *d*

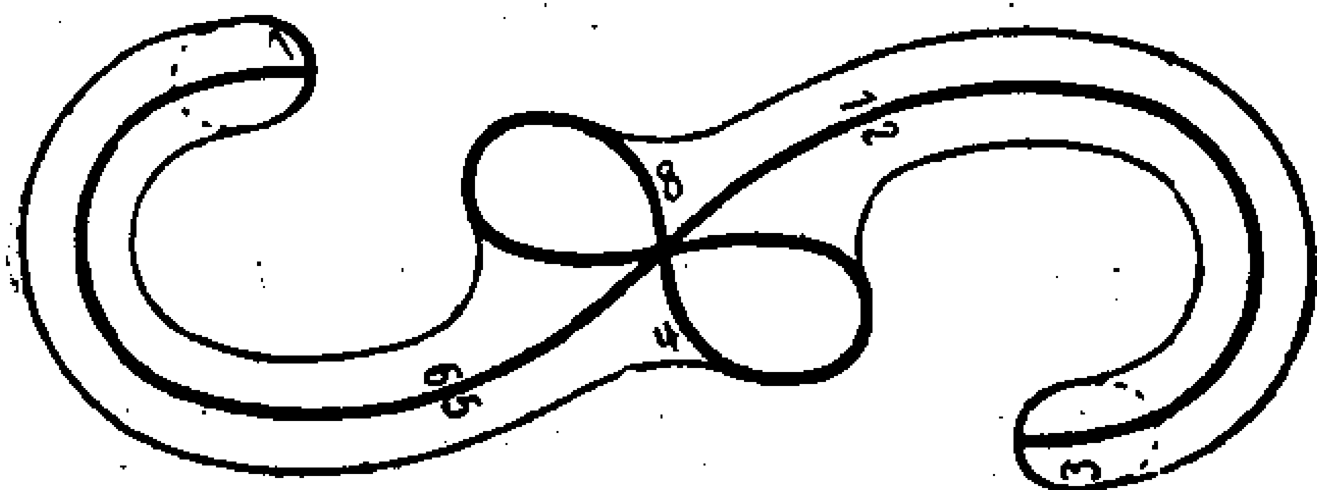


图 286 *e*

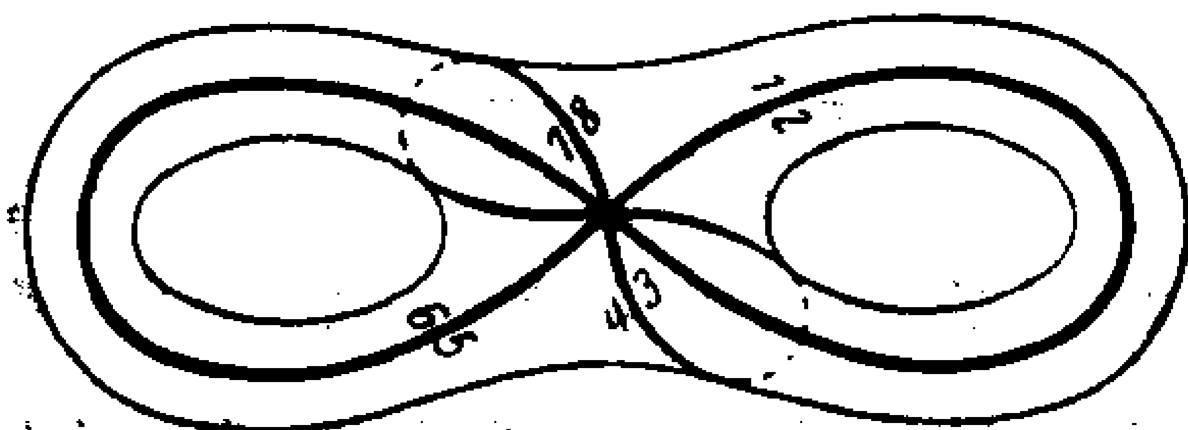


图 286 *f*

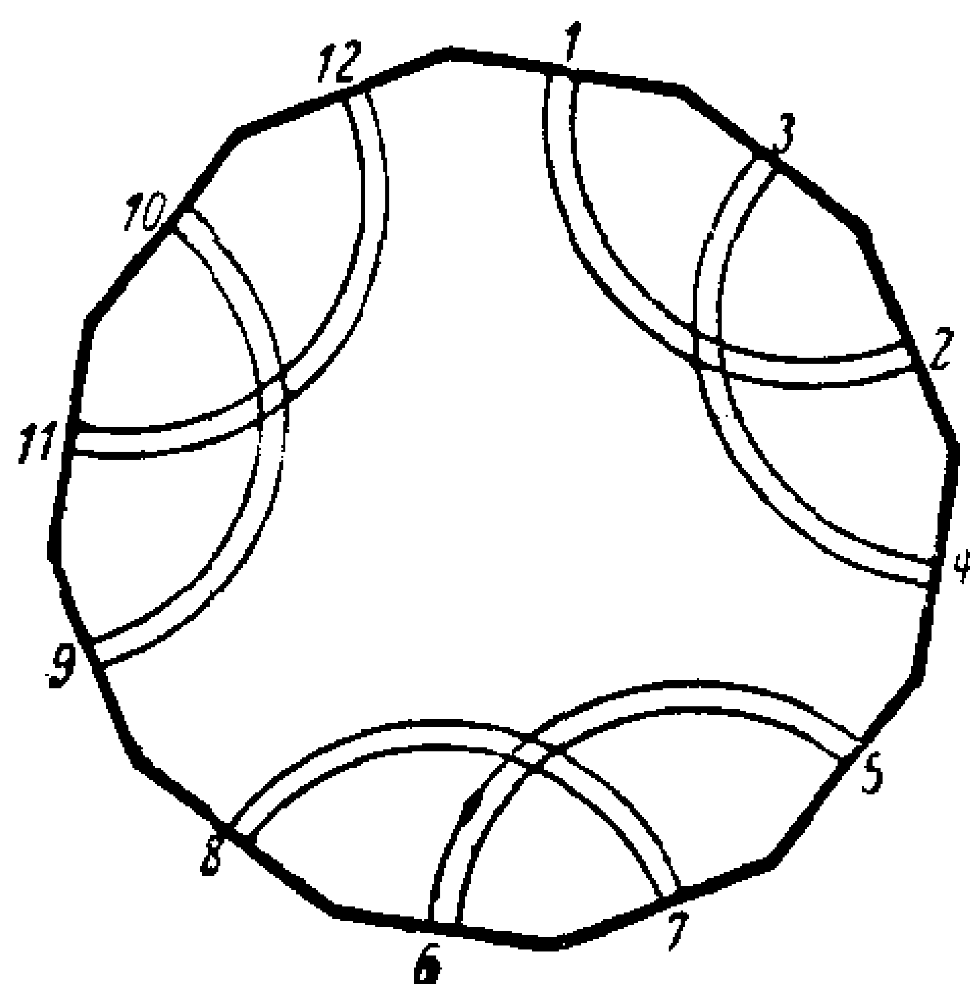


图 287 *a*

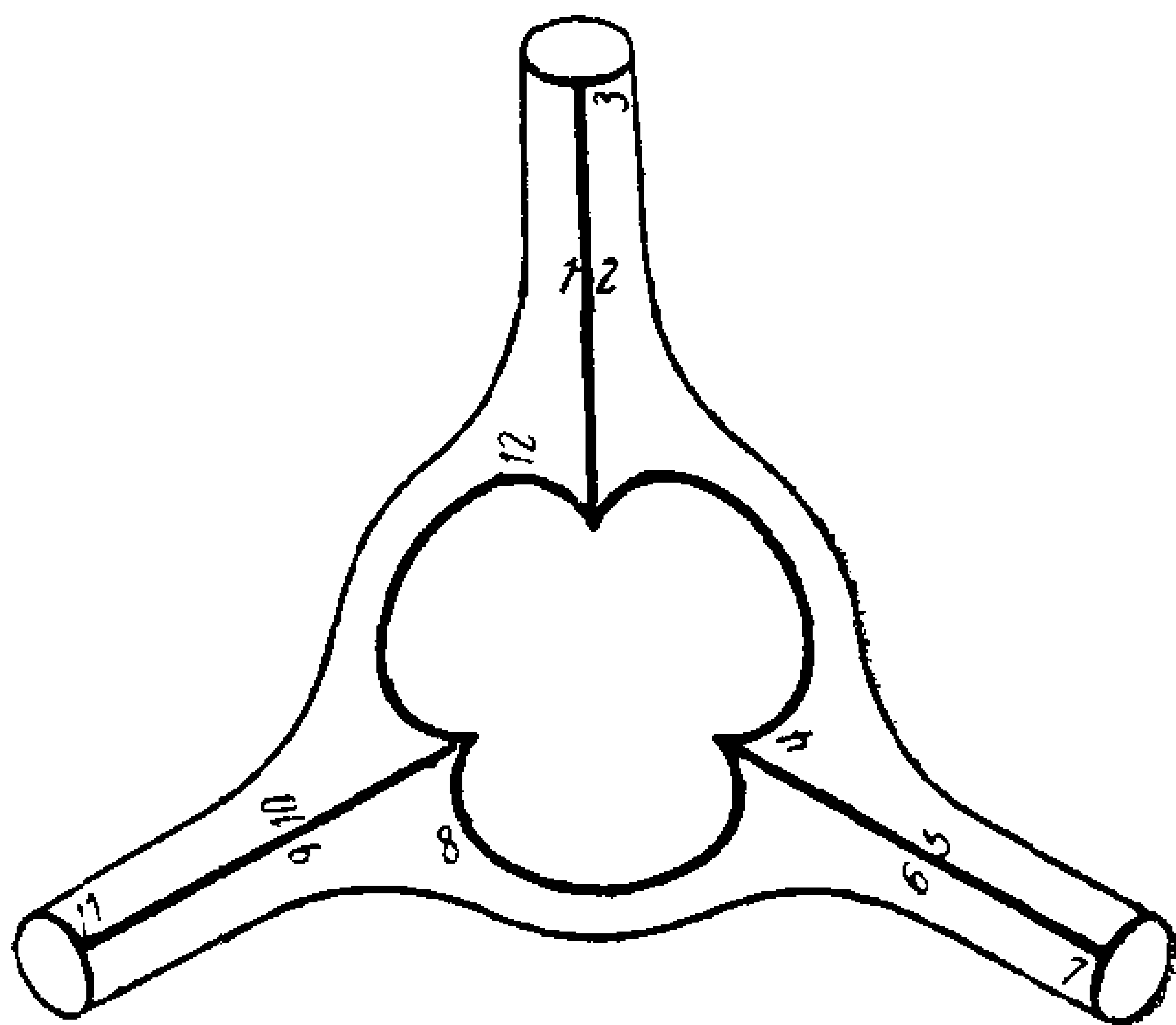


图 287 *b*

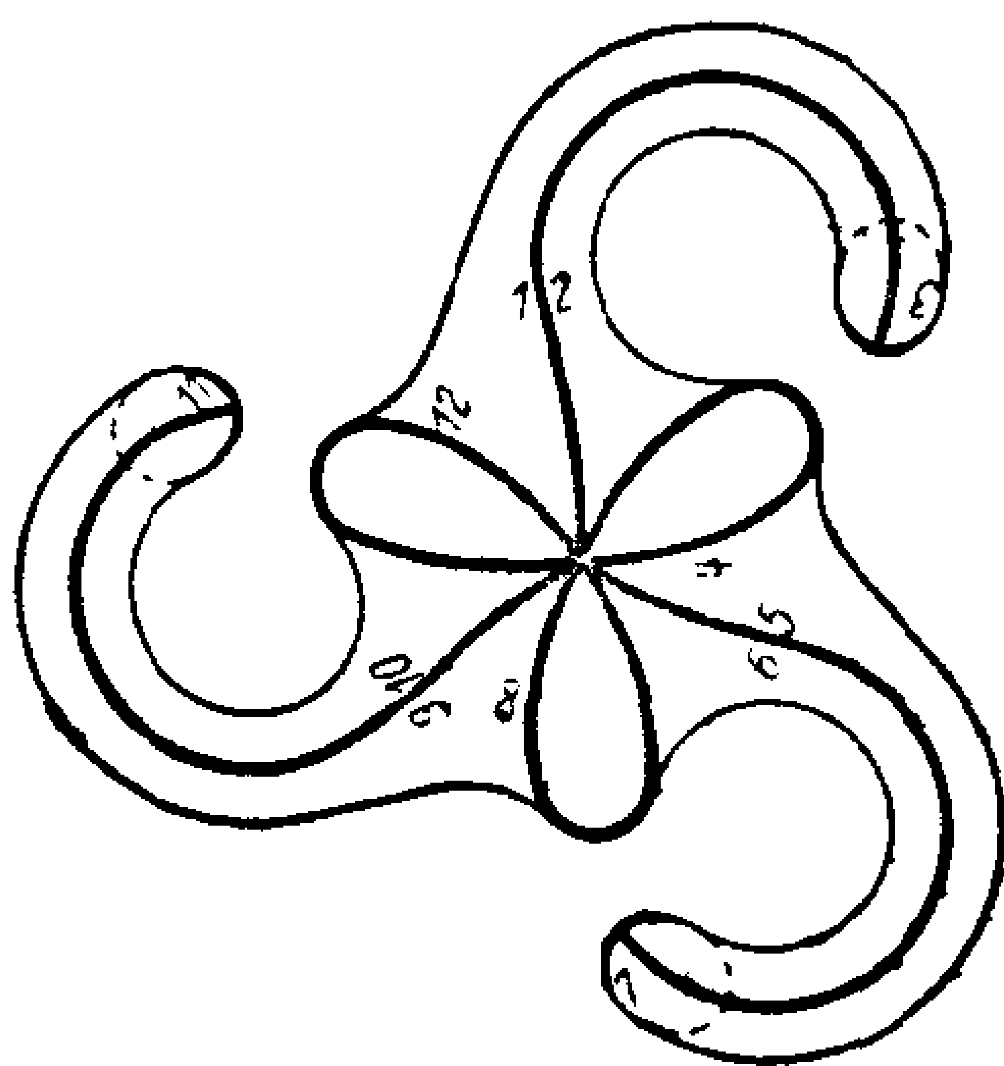


图 287 *c*

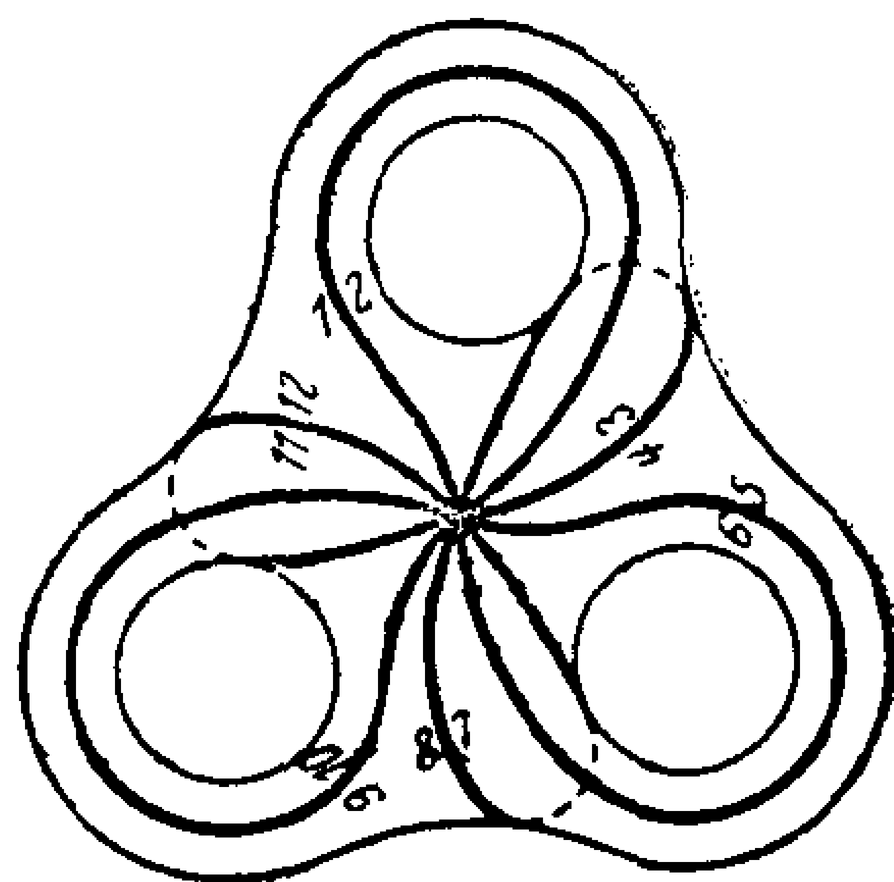


图 287 *d*

曲平面（若 $p=1$ 則为欧氏平面），这是我們在第 257—258 頁上見过的。

如果把 $4p$ 边多边形的各边以不同的方式叠合，則可得到圈餅之外的許多曲面。在下一节里我們准备讲几个这样的曲面。

§46. 单側曲面

所有以前我們討論过的多面体和閉曲面的連通度都是奇数。于是自然会发生这样的問題：有沒有連通度为偶数的閉曲面呢？換

句話說，有沒有按拓扑性质来說，介于球面和环面之間或者介于两个“圈餅”之間的曲面呢？

答案是肯定的。的确，我們可作出一个多面体——七面体，其連通度按多面体的欧拉定理等于2。为此目的，我們从有八个三角形面的正八面体开始（图288），增添由对角綫决定的三个正方形

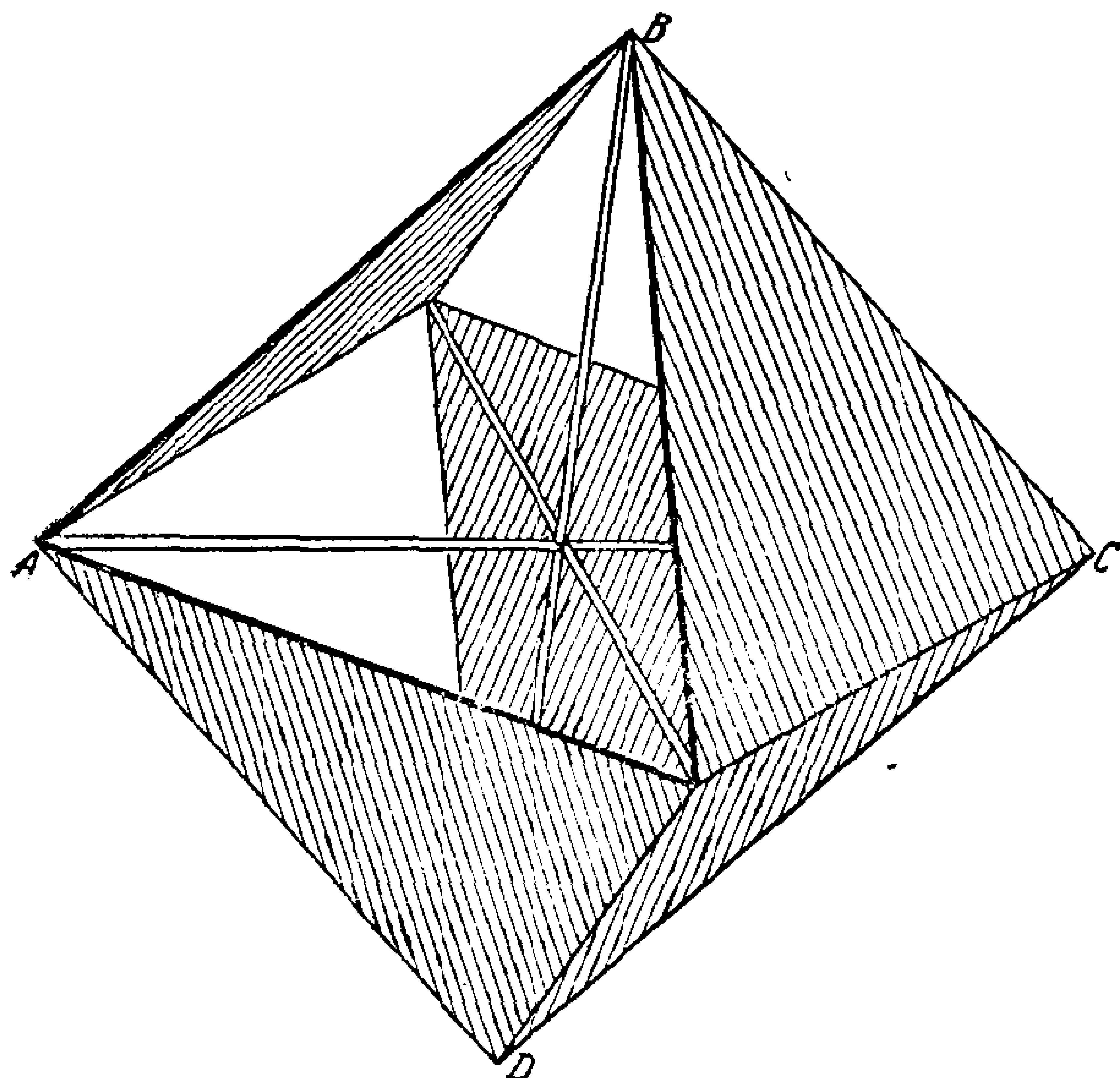


图 288

面（例如图288的 *ABCD*）。用这种方法得出含十一个面的图形，它不符合从前讲的多面体的定义，因为交于每个棱的面数是三个而不是两个。现在我們去掉四个三角形：从图形的前部（按照图288的位置）去掉左上角的三角形和右下角的三角形，从图形的后部去掉左下角的三角形和右上角的三角形。这样一来，只剩下了有阴影綫的四个三角形。总共我們得出由四个三角形和三个正方形組成的图形。这图形的棱和頂点是八面体的棱和頂点，但八面体的对角綫却不是我們的图形的棱而是面的自交綫。显然在每

一棱上恰有二面相遇，而且我們可从任一面开始走起，越过若干个棱而达到任一别的面。所以这图形是多面体。由于它有七个面，所以叫做七面体。跟八面体一样，七面体也有十二个棱和六个頂点。由推广的欧拉多面体公式得方程

$$E-K+F=6-12+7=3-h.$$

由此得出七面体的連通度 $h=2$。正像簡单多面体經过連續变形最后能变成球面一样，七面体經过連續变形也能变成一个簡单而閉合的曲面。这种曲面称为“罗馬式曲面”（图 289），是斯泰納(Steiner)研究过的。像七面体一样，这种曲面自交于三条相互垂

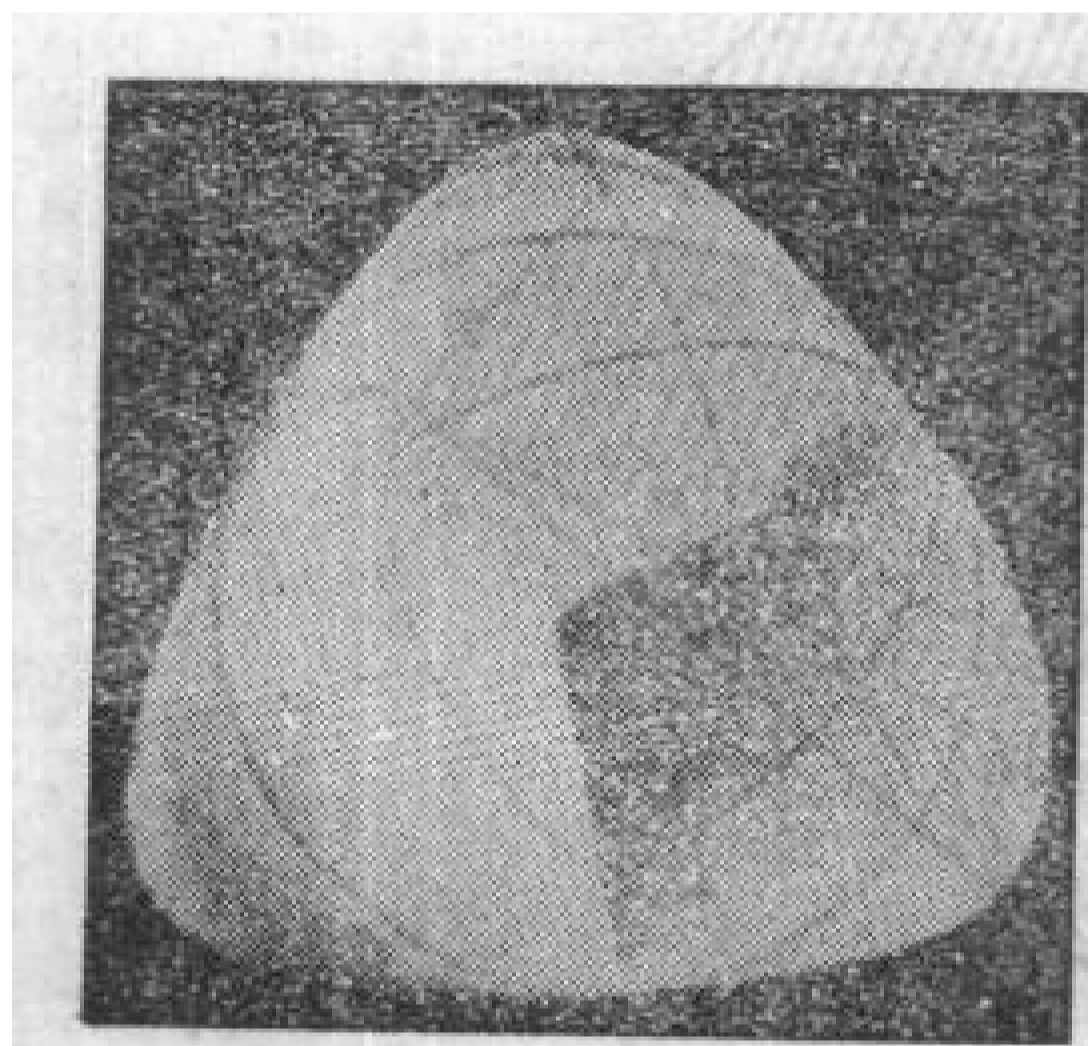


图 289 *a*

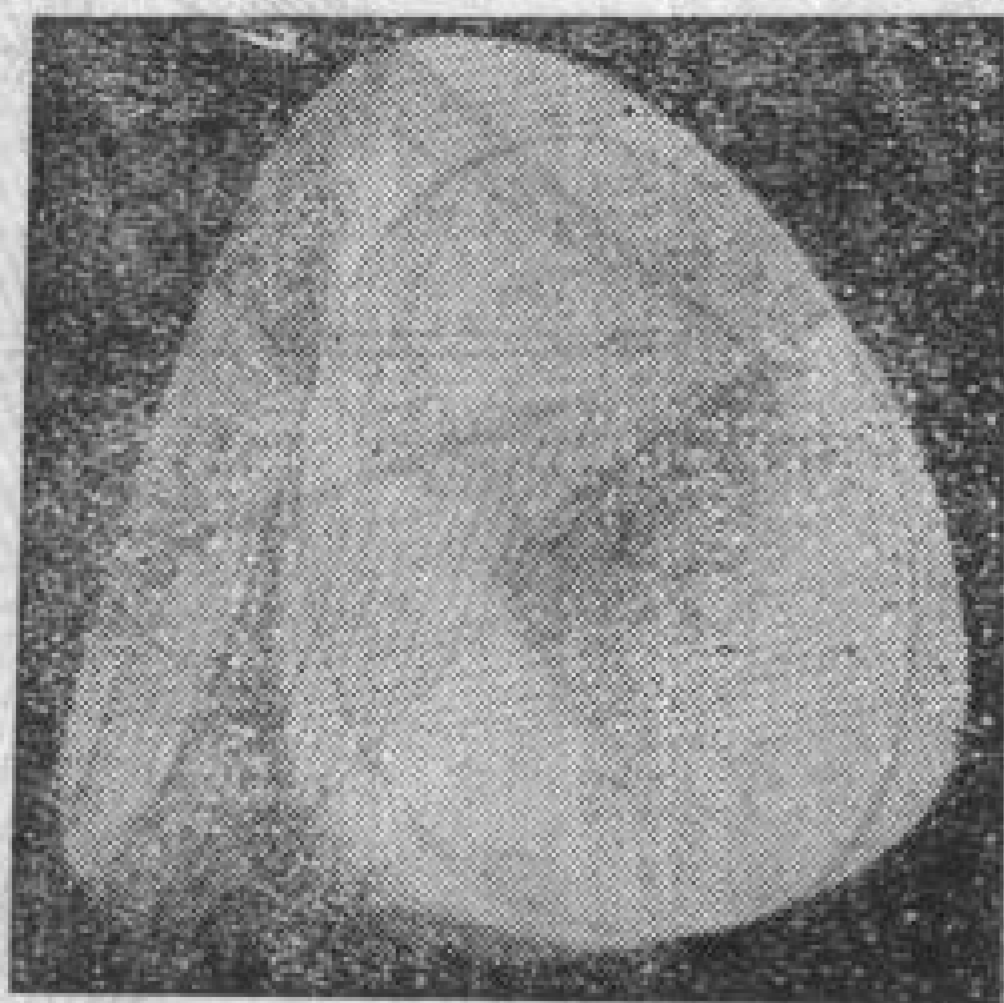


图 289 *b*

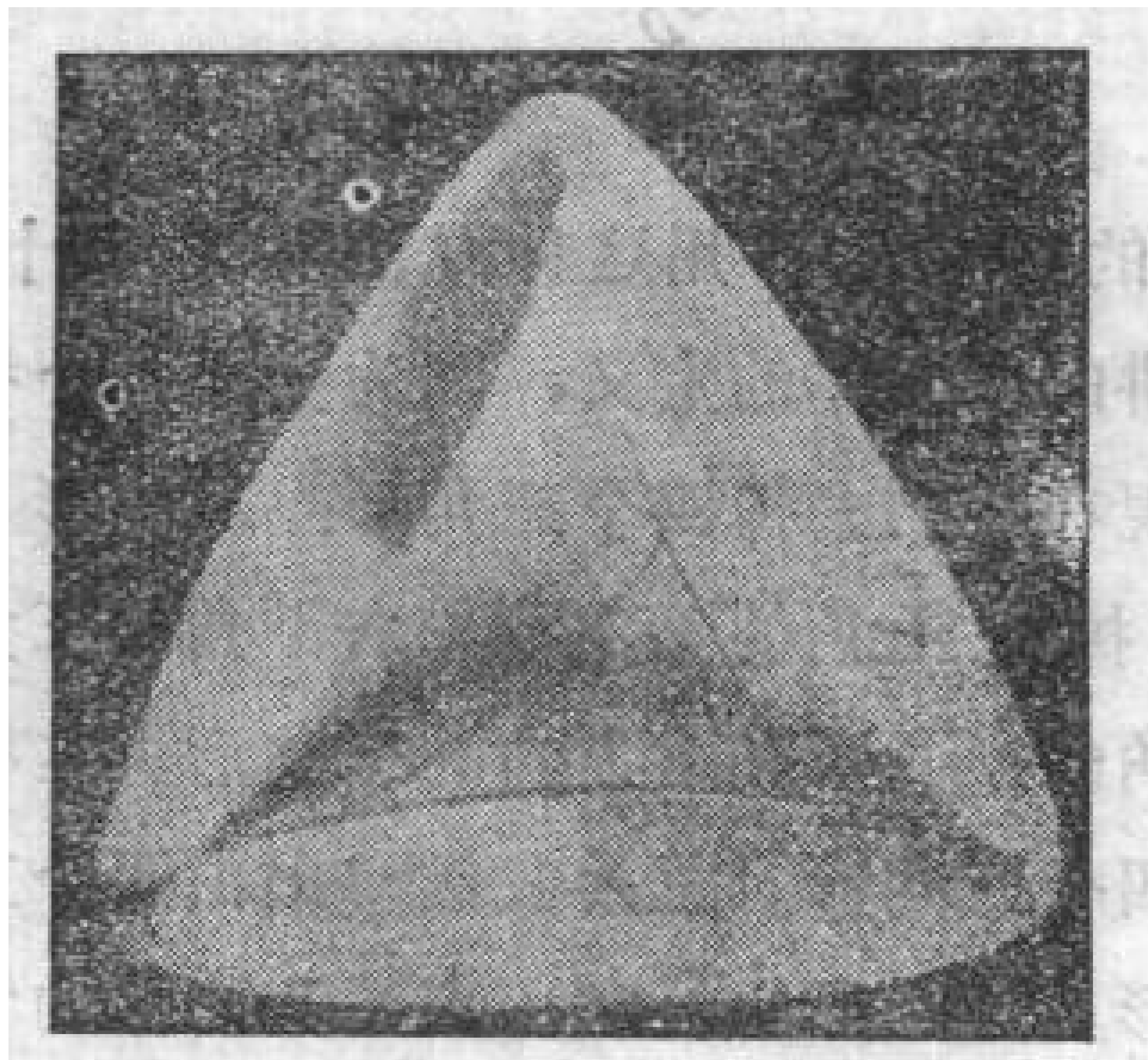


图 289 *c*

直的綫段。它的方程以直角坐标表示时是

$$y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+xyz=0,$$

可見它是四阶的曲面。

七面体除了有偶数連通度和自交綫外，还有前此我們未討論过的另一重要性质。設想七面体是用薄膜作的。有一个会爬的小动物，例如甲虫，从曲面上的一点P开始爬行。在薄膜的另一側正对着P点有另一点P'——如果薄膜换成原来的几何曲面，那末P'就和P重合了。可能有人会这样想，甲虫若不在薄膜的某处咬破一个洞就不能从P点爬到P'点。对于我們从前讲过的球面和一切“圈餅”来說，情形确实是这样的，可是对于七面体来說就不对了。在平行于图290的平面的正方形面朝着观察者的一側上选择一点P，作为甲虫的出发点(图290)。考虑七面体上从P点出发越过1，2，3，4諸棱又回到原来正方形面的一条道路。显然甲虫从正方形

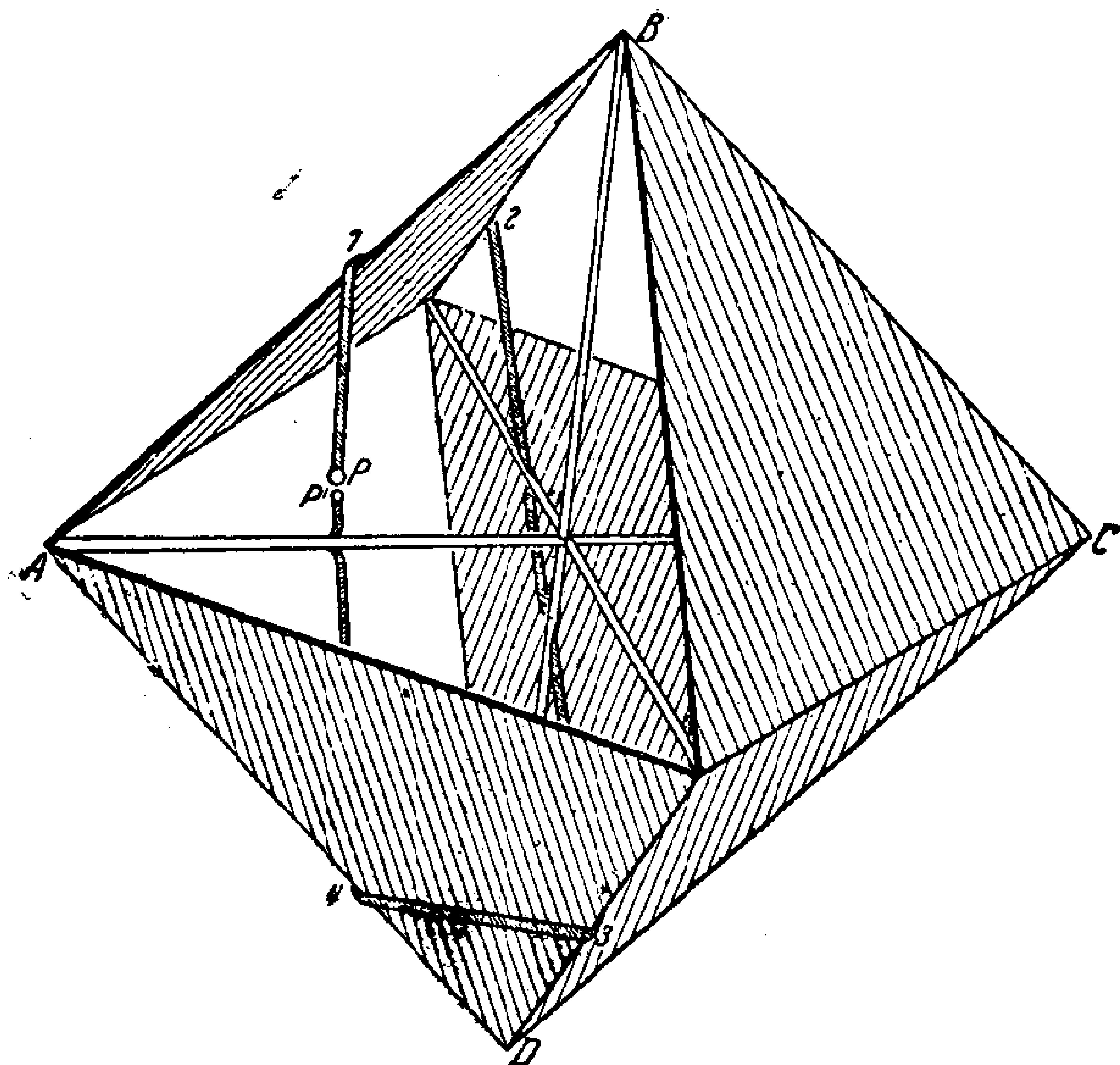


图 290

面向前的一側开始，順着这条道路爬行，越过标号 4 的棱到达原正方形面的背后。甲虫当然要在三个地方穿过薄膜，但每次被钻穿的面乃是在七面体自交綫上阻碍交通的那个面，而不是甲虫在其上爬行的面。

由于这种理由，七面体称为单側曲面，而球面和前面讲过的各种"圈餅"称为双側曲面。此种分类法也适用于有边緣曲面。設想有边緣曲面也是由薄膜制成的，試决定在薄膜上有沒有从一側出发到另一側的通路，中途不許越过边緣，也不許穿过薄膜。如有这种通路存在，則曲面称为单側的，否則称为双側的。前此我們討論过的所有有边緣曲面，例如圓面，都是双側的。但是也可以举出一个比七面体更簡单的有边緣的单側曲面的例子，这就是默比斯带。默氏带可用一張細長的长方形紙条作成，如图 291 所示。把两边 AB 和 CD 粘起来，使 A 和 C 重合，B 和 D 重合，則得到一圓筒形带，如前所述。这是双側有边緣曲面，另一方面，若在两端粘合之前，把一端相对于另一端扭轉 180°，然后再使 A, D 重合，B, D 重合，便得到默比斯带的模型（图 292）。容易看出，这种曲面是单側的。因为，在两端粘合之前作一条直綫，比方說是 PP'，平行于带子的长边，則在两端粘合之后，直綫 PP' 就变为从带子一側到另一側的通路 QQ'①。

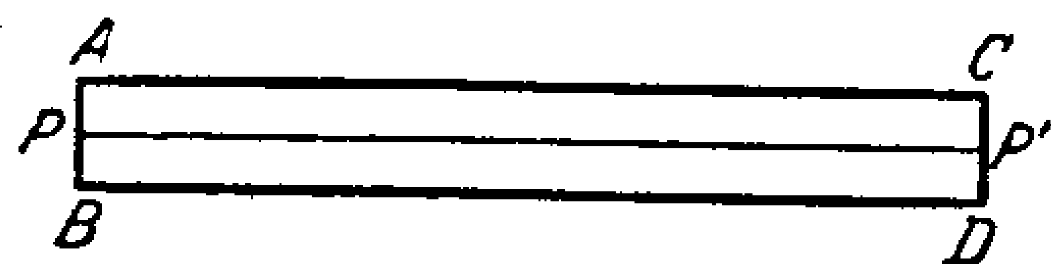


图 291

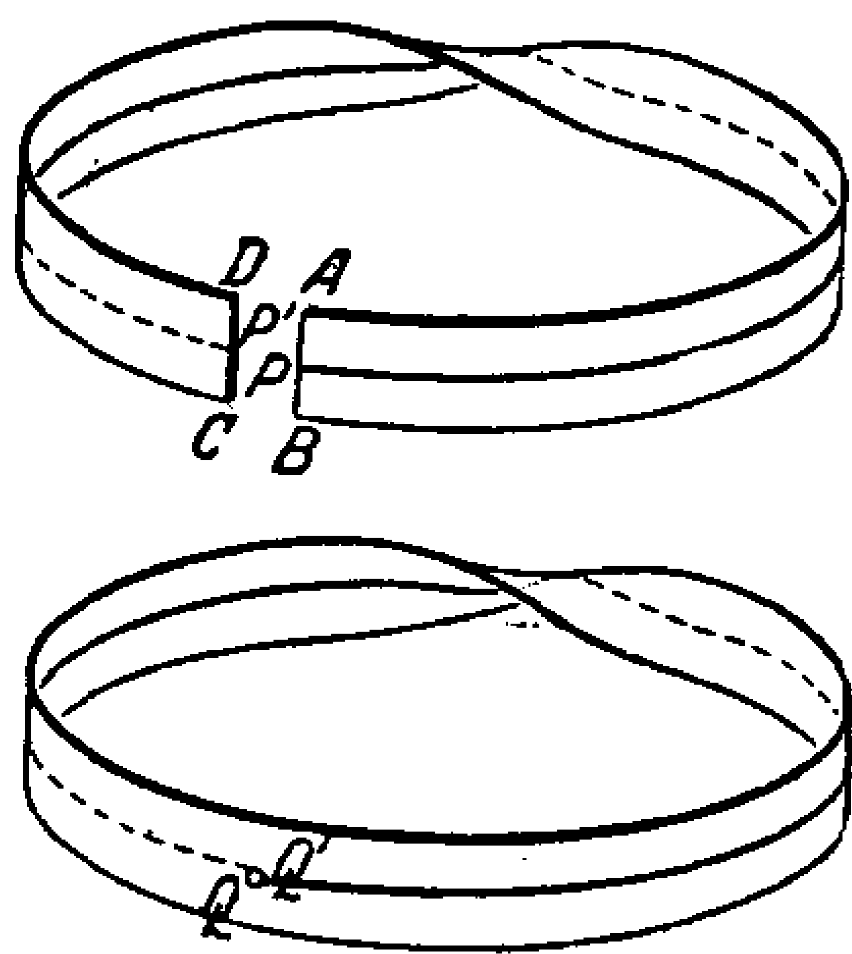


图 292

① 下面的两个性质也显出默比斯带与圓筒形带不同之点。第一，默氏带的边緣是一条闭曲綫，圓筒形带的边緣是两条閉曲綫。第二，默氏带沿曲綫 QQ' 剪开后不分离，圓筒形带則不是这样。

单側曲面也可以用另一种重要的拓扑概念来刻划，而不必假借曲面是由薄膜制成的。設想任一給定曲面上的每一点（边緣上的点除外，如果有的話）被完全在这曲面上的一条小閉曲綫所包圍。現在对所有的这些曲綫如此規定指向，使充分靠近的二曲綫的指向相同。如果規定这样一种行进的指向是可能的，則称这样的一个規定为曲面的一个**定向**，而曲面称为**可定向的**。現在我們证明，单側曲面不可定向。为了证明，我們考虑和曲面的单側性等价的一条閉路。比如說，在默比斯带上选好一条道路 QQ'，其中的 Q 和 Q' 二点还是当作叠合的。让我們給 Q 指定一个指向。指向既經确定，在整个道路 QQ' 上就一直沿用它。这样，当动点又来到 $Q'=Q$ 时，則伴随 Q' 的指向必同 Q 的相反。假如默比斯带是可定向的，这种現象便不会发生。所有别种形式的单側曲面也和默氏带有类似的情况。反轉来也可以证明，所有双側曲面都是可定向的。由此可知，曲面的双側与单側之分，和曲面的可定向与不可定向是一回事。

容易懂得，曲面之不可定向，等价于曲面上存在一条閉曲綫 s，当圓心在这条曲綫上連續运动时，有指向的小圓带着相反的指向回到出发点（例如图 292 中的曲綫 QQ'）。在这样的曲面上，沿着曲綫 s 的一側行进，虽然沒有越过曲綫，也将达到它的另一側。由于这种原因，s 称为单岸曲綫。虽則一个可定向的曲面上所有的曲綫都是双岸的，但单岸閉曲綫的存在却是不可定向曲面的特征。曲面的单側性同曲面上存在单岸曲綫是等价的。前一性质涉及曲面在空間中的位置，后一性质涉及曲綫在曲面上的位置。

七面体有自交綫，这一点跟默比斯带不同。那么試問任何单側閉曲面是不是都自交呢？假如曲面只有一側，就不可能把空間的一部分同其余的部分分开，即不能把空間分为"內""外"两部。不自交的閉曲面是不可想像的。事实上，所有单側閉曲面都要自交。

不过这句話的证明,必須另謀途徑。

并不是說无論什么曲面的自交都是拓扑性质。例如,考虑图293所画的曲綫繞虛綫为軸旋轉而得的曲面。这一曲面有自交綫,即点 A 所作的圓。但曲面經連續变形,可变成如图294中的曲綫所

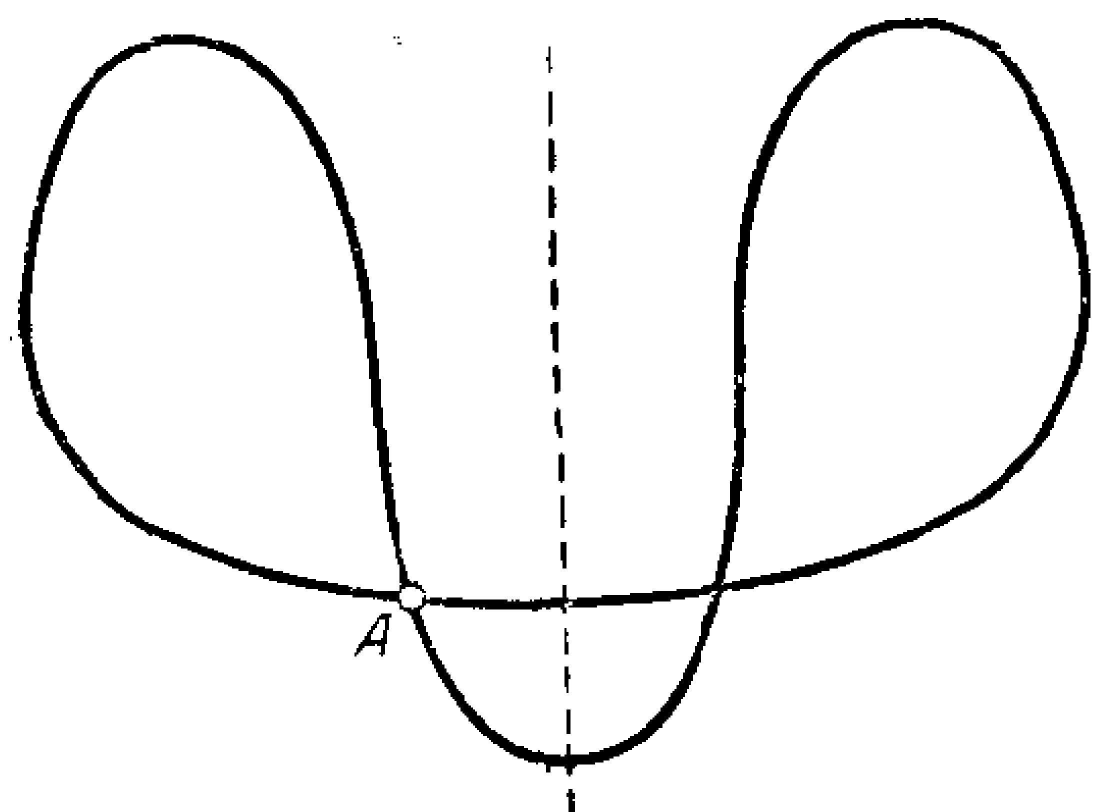


图 293

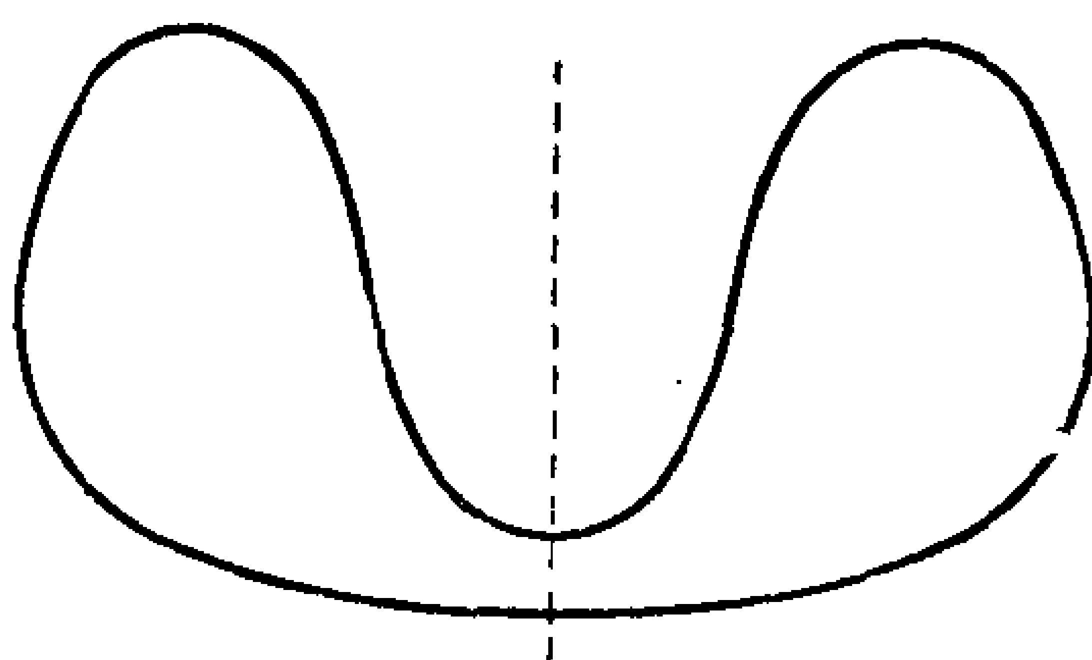


图 294

产生的回轉曲面。当然这个曲面沒有自交綫,因此同球面等价。反过来球面也可以經过变形而变为第一个回轉曲面。由此可見,自交綫的存在不一定就表示拓扑性质。在这个例子里,自交綫作成一閉曲綫。另一方面,七面体的自交綫有六个端点,即七面体的六个頂点。这些点其实应該当作奇点看待。因为曲面上任何正則点的邻域总可經过变形而成为圓面,但对七面体頂点的邻域則不可能这样作(参考图288)。所以七面体有六个奇点。从这里又引出一个問題:有沒有无奇点的单側閉曲面呢?

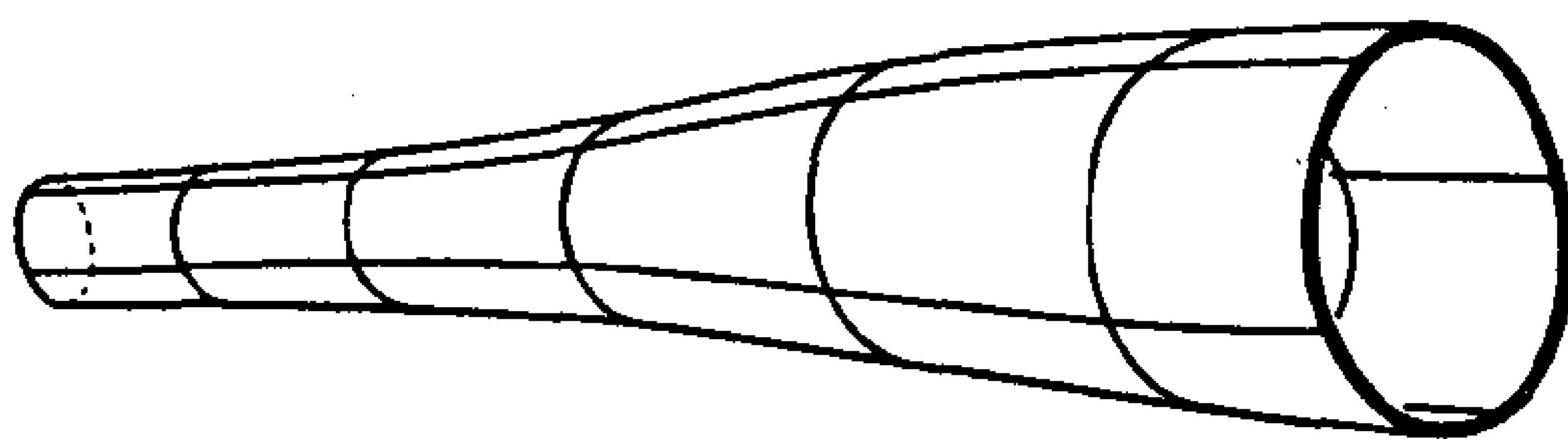


图 295

有的,这样的曲面第一次被克来因发現。我們从一个两头开口的管子出发(图295)。前面讲过从这种管子可得到环面:把管子弯曲,一直弯曲到两端相遇,然后将二圓口粘在一起。

现在我們改用另一种方法将两端粘合。先将管子的一端捏得比另一端稍細一些，将細的一端掉过头来插入粗的一端的管壁內，使二瓶口作同心圓状(图 296)。随后将小口放大，大口縮小，使二口重合在一起。最后把它們粘起来。这样得到的曲面沒有任何奇点；它叫做克来因曲面(也叫做“克来因瓶”)，其形状如图 297。这种曲面显然是单側的，并且在細端插入管壁处沿一閉曲綫自交。

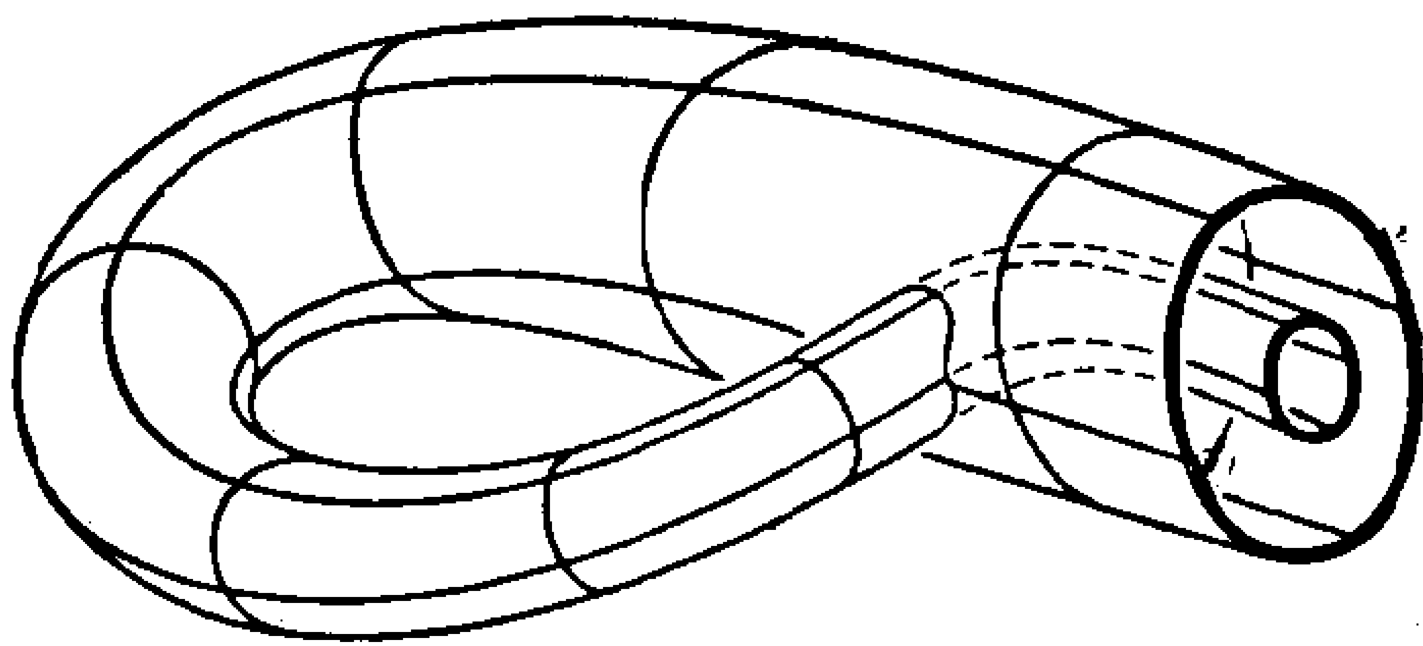


图 296

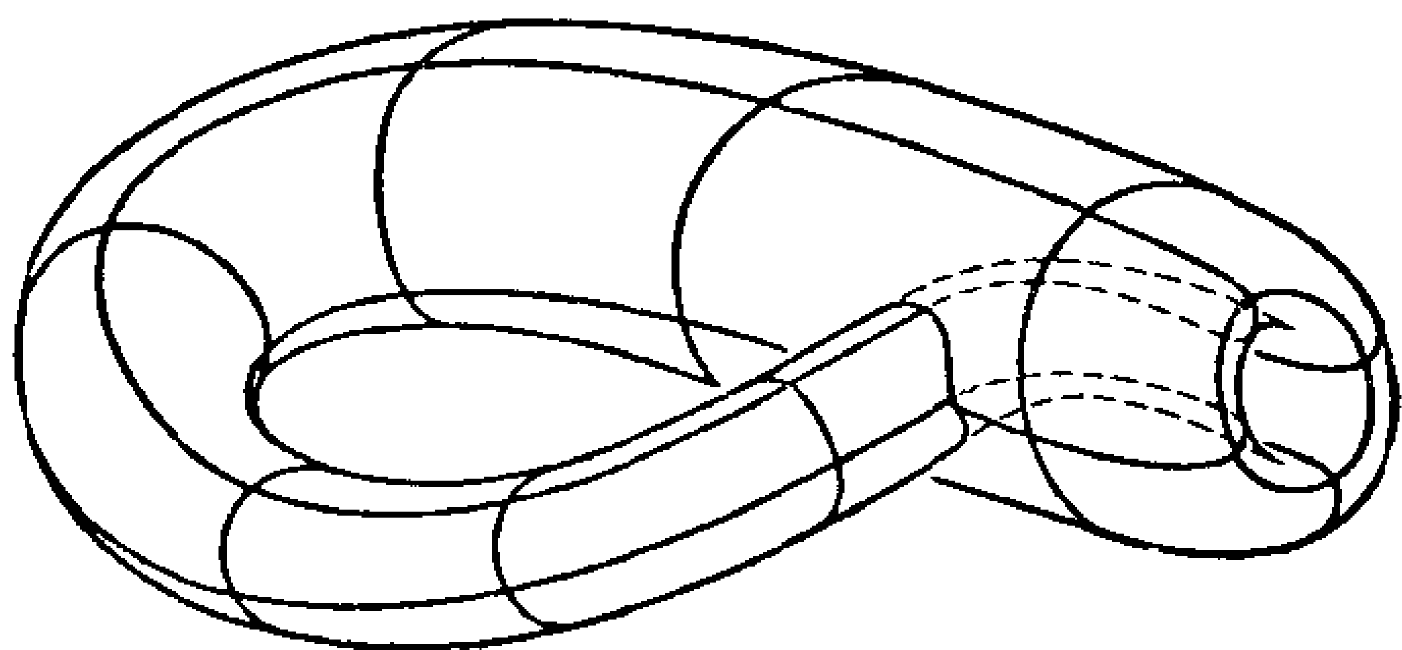


图 297

第一个单側閉曲面的例子——七面体，跟前面討論过的各种双側閉曲面不同的地方，在于七面体有偶数的連通度。那么我們可不可以抱着同样的希望，說克来因瓶的連通度也是偶数的呢？不可以。事实上克来因瓶的連通度跟环面一样，是 3。为了证明，我們也可以象对待环面那样，来选擇克来因瓶的典型截口組。可以选擇瓶子两端的接縫作为組中的第一条閉曲綫。沿着这条曲綫剪开，把曲面拉直使成为圓筒形，然后选擇圓筒上的一条母綫作为組中的第二条曲綫。沿着这条母綫将曲面剪开，于是克来因瓶就变为矩形，象环面一样。再过矩形边緣上任意两点作曲綫，曲面就被分成两片了。应用連通度的一般定义于克来因瓶，可知 $h-1=2$，故 $h=3$，这正是我們要证明的。

現在，我們已能以不同的方式叠合矩形(或正方形)的对边，得

出五种不同的曲面①。下面的表列出这五种曲面及其相应的特征。其中有关投影平面的部分，以后将予以证实。

	圆筒面	二条边緣曲綫	$h=2$	双侧的
	默必斯带	一条边緣曲綫	$h=2$	单侧的
	环面	閉曲面	$h=3$	双侧的
	克来因瓶	閉曲面	$h=3$	单侧的
	投影平面	閉曲面	$h=2$	单侧的

这張表指出，默比斯带的模型可以从克来因曲面消去一組对边的叠合关系而得出。因此一定能够把克来因瓶沿着一条适当选擇的閉曲綫剪开，使成为默比斯带。至于如何剪法，留給讀者作为练习(用模型来試)。图 298 表示用另一种方法把克来因瓶剪成二条莫氏带。建議讀者作出正方形模型的对应演变过程。

在我們討論过的一些单側閉曲面里有連通度为偶数的（例如七面体)，也有連通度为奇数的(例如克来因瓶)；另一方面，我們讲过的一切双側閉曲面的連通度都是奇数。进一步可以证明，幷无連通度为偶数的双側曲面。

正像正方形一样，一切其他的正 $4p$ 边多边形也可以用不同的叠合方式由它得出許許多多的曲面模型，其中包括有边緣和无

① 在投影空間里单叶双曲面看作是在无穷远連通的閉曲面。从这种观点出发，再参考这張表，讀者可以决定单叶双曲面是与克来因瓶还是与环面等价。

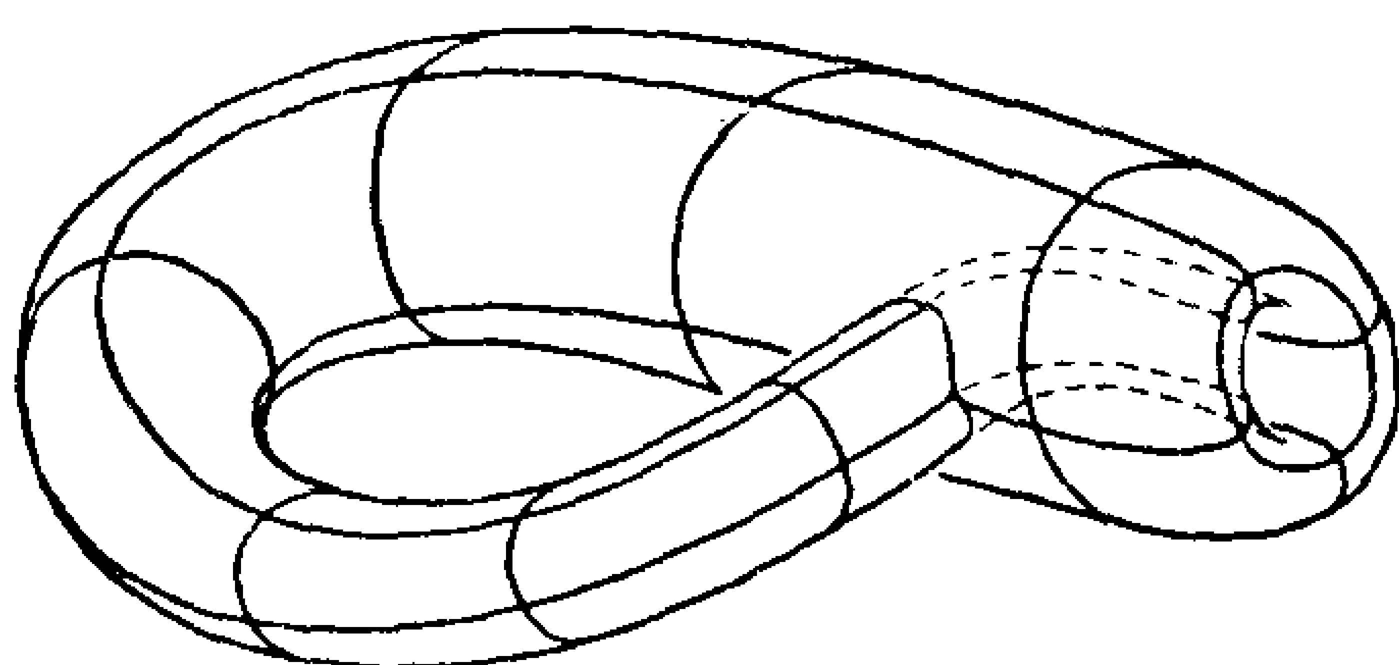


图 298 *a*

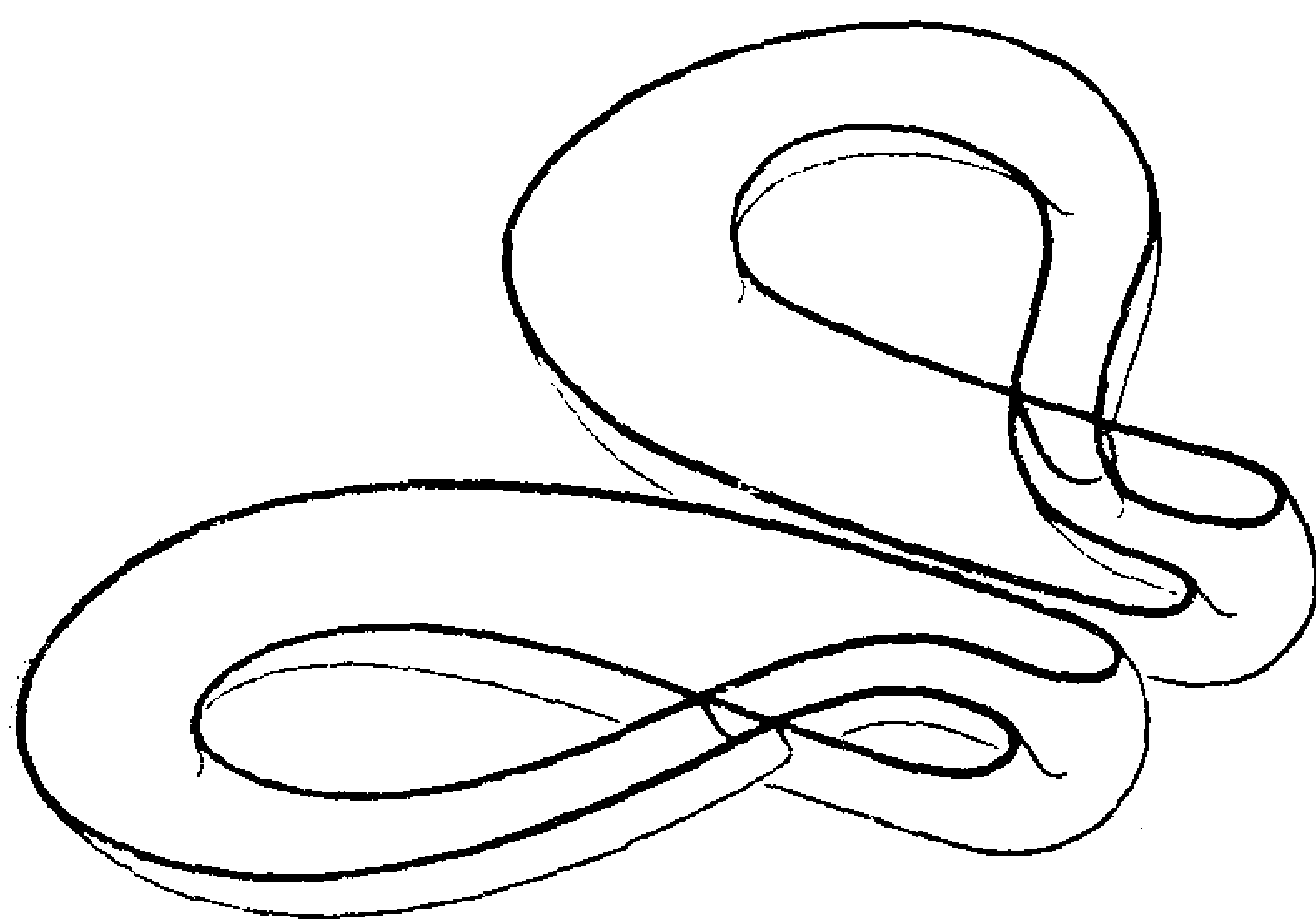


图 298 *b*

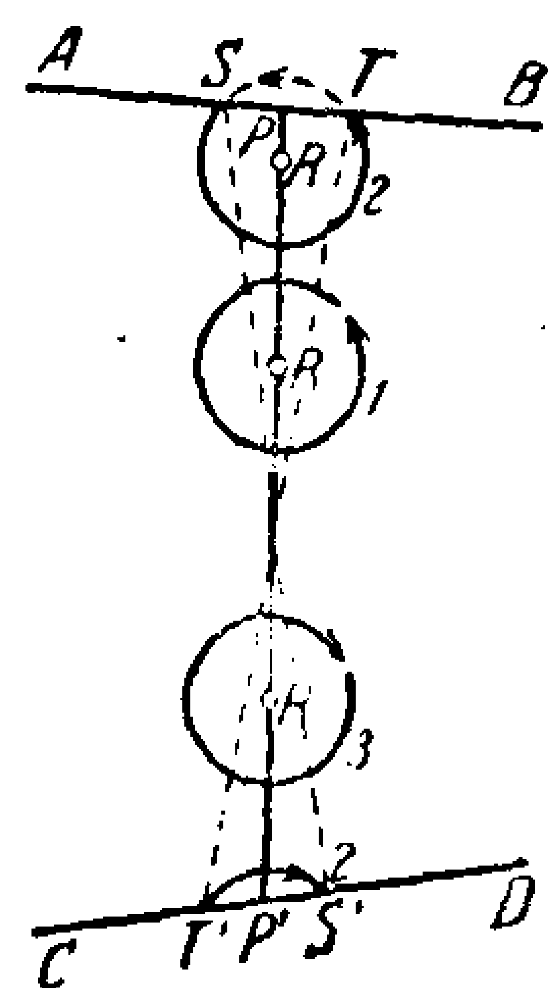


图 299

边緣的，单側和双側的。如果在图 299 上的 AB 和 CD 是 $4p$ 边形中将要叠合的二边，則有两种可能的叠合方式：(1)連結对应点的二直綫不相交，(2)这样的二直綫相交。例如在图 299 上，第一种情形由叠合 A, C 而得，第二种情形由叠合 B, D 而得。現在我們断言：如果 $4p$ 边形的任意二边是按照第二种方式对应的，則无論其他的边如何对应，所得的曲面永远是单側的。

为了证明这句話，我們利用第 305 頁上介紹的方法，即证明多边形所代表的曲面不可定向。設 P 和 P' 是在叠合中 AB 和 CD 上的二对应点(图 299)。那末直綫 PP' 代表曲面上的一条閉路。用

R代表在曲面上沿这条路綫运动的一点，R先經过P，又由P'回到原处。让我們給曲面上R点指定一个繞行指向，这个指向在R行进时沒有任何不連續的变化。为此我們以R为圓心作一小圓，并以箭头表示它的指向，把小圓随着R連續移动。只要整个圓在$4p$边形內，它就是多边形代表的曲面上一閉曲綫的象。当R接近P时，只有圓弧ST仍留在$4p$边形內。要想得到曲面上閉曲綫的象，必須利用在直綫CD上和S,T对应的点S',T'。但因为AB和CD的叠合是第二类的，S和S'在直綫PP'的不同側，T和T'也如此。这样一来，在曲面上带有繞行指向的閉曲綫由二有向弧$\overset{\frown}{ST}$和$\overset{\frown}{T'S'}$代表。当R达到P然后从P'回到原来位置时这条曲綫沒有不連續的变化。随着动点R与P'的距离逐漸增加，弧ST逐漸消失，而弧$S'T'$变为整个圓。但是这圓的指向同原来圓的相反，这就证明了曲面是不可定向的。

作为这个定理的特例，我們得到投影平面是单側的結論。因为，在投影平面模型里，所有的对应关系都是第二类的。

反轉来容易证明，如果所有的对应关系是第一类的，則模型永远代表双側曲面。

我們已經从球的表面得出投影平面模型，另一方面，我們見过克来因瓶同环面也有关系，虽然这种关系不同于球面和投影平面的关系。我們現在指出，事实上也可以在克来因瓶和环面之間建立像球面与投影平面之間一样的对应关系。一般地，对任何单側曲面，必有一双側曲面同它对应。

要想从球面得到投影平面，必須把球面的对徑点叠合起来（参看第237和297頁）。現在我們把类似的作法应用于环面。从环面任一母圓的圓心作环面的軸的垂綫。这二直綫的交点M叫做环面的中心（图300）。設P是环面上的任一点，則P对于M点的对称点P'也必在环面上。环面上每对对于M点对称的点叫做对徑点。

把每对对徑点看作一点，环面就变成一新的曲面 F。今证明 F 便是克来因瓶。

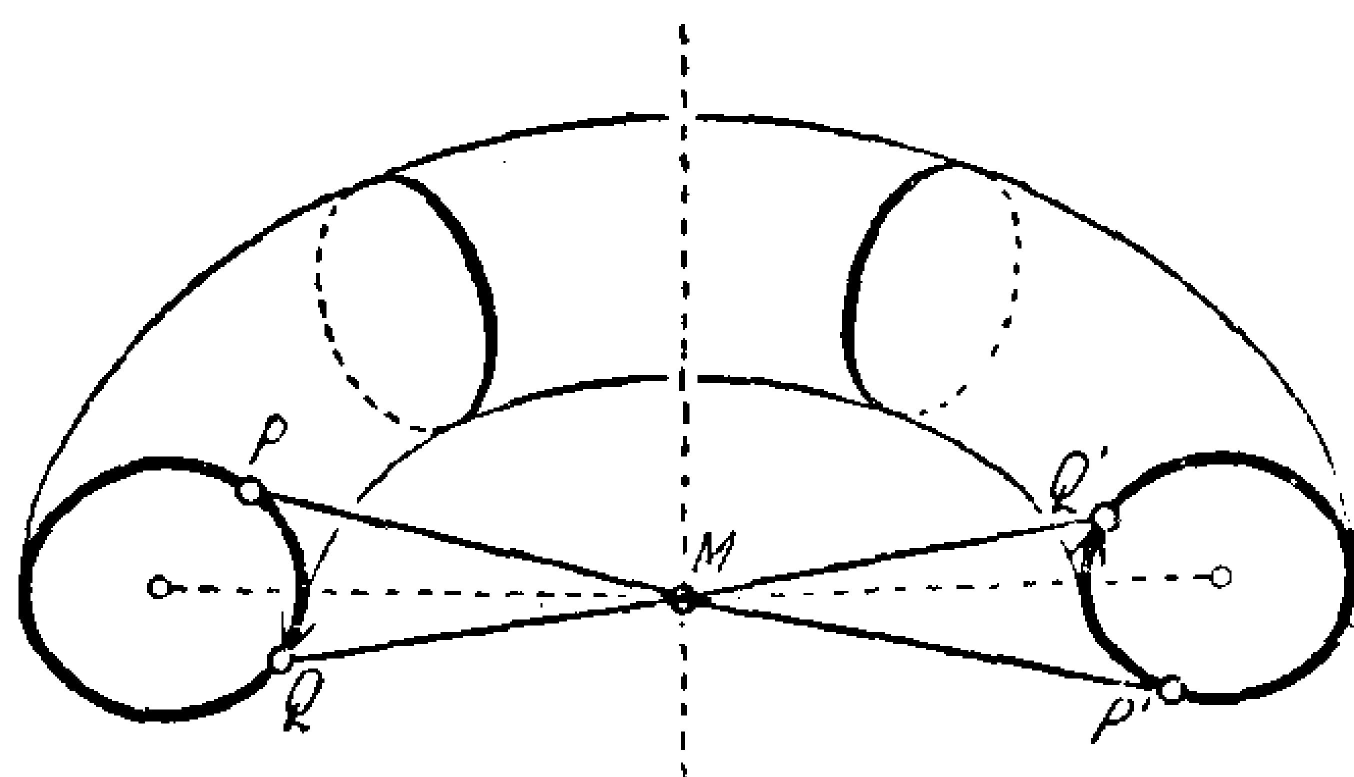


图 300

試考虑环面上的一母圆。这母圆对应第二个母圆，如图 300 所示。二母圆把环面分成两半。曲面 F 是由去掉环面的一半，并把剩下的一半的边緣圆周上的点如图上指出的方式叠合而成的。相仿地，我們曾經用半球面代替球面来构成投影平面。考虑到二叠合圆的繞行指向，可知半环面由叠合而变成克来因瓶。

显然第二个半环面可以复盖在第一个半环面上，使原来的每对对徑点現在都重合。但是，这里必須把第二个半环面的里面翻到外面来，像翻手套一样。如果再把这两个半环面粘起来，最后就得双重复盖的克来因瓶[1]。由于这种理由，环面可叫做克来因瓶的双叶复盖曲面。同理，球面叫做投影平面的双叶复盖曲面。一般地可以証明，每一单側曲面有一双側曲面作为它的双叶复盖曲面。

§47. 作为閉曲面的投影平面

为了决定投影平面的連通度，我們应用多面体的欧拉定理于正方形模型。通过正方形的中心点 M(图 301) 作两边的平行綫 PQ 和 RS。于是正方形被分为四个小正方形 1, 2, 3, 4。由于大正方形的叠合关系，正方形 1 和 3 表示投影平面的

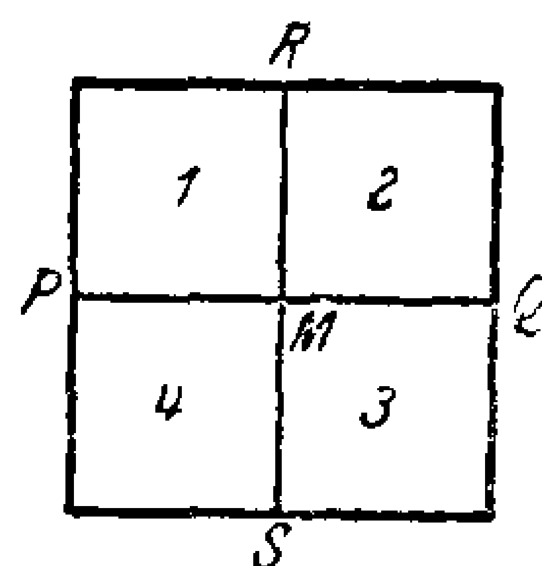


图 301

① 这种作法不能从环面的簡单变形得到。必須把环面剪成两半，把一半的里面翻到外面来。

同一多边形。同理，对于正方形 2 和 4 也是一样。其次，綫段 PM 和 QM 必須看成一个棱，因为 P 和 Q 表示同一个点。同样，RM 和 SM 也应該看作一个棱，因为 R 和 S 表示同一个点。頂点只有一个，即 M。因此在欧拉公式里須令

$$E=1,\quad K=2,\quad F=2.$$

代入公式后，得 $E-K+F=1=3-h$，从而得投影平面的連通度是 2，这正是第 308 頁表中所列出的。

在解析投影几何里，用三綫坐标可得投影平面的另一种划分法。这种划分法如图 302 所示，其中当作投影平面的模型的不是正方形面而是圓面，不通过同一点的三个圓弧划分圓面为七个区域。假定每个圓弧交圓周于二对徑点，从而区域 2 和 5 表示一个三角形，3 和 6，4 和 7 也各表示一个三角形。可以看到，不通过同一点的任何三条直綫必如此划分投影平面为四个三角形[①]。現在将 $E=3, K=6, F=4$ 代入欧拉公式里，也得到 $h=2$。

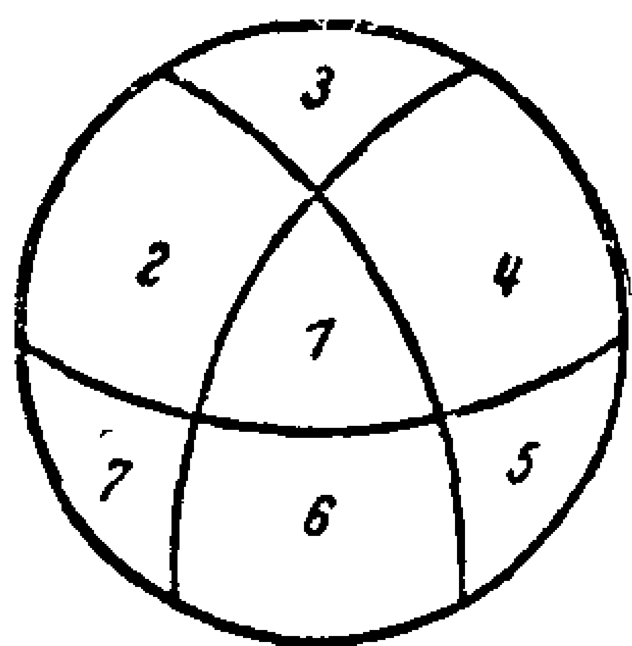


图 302

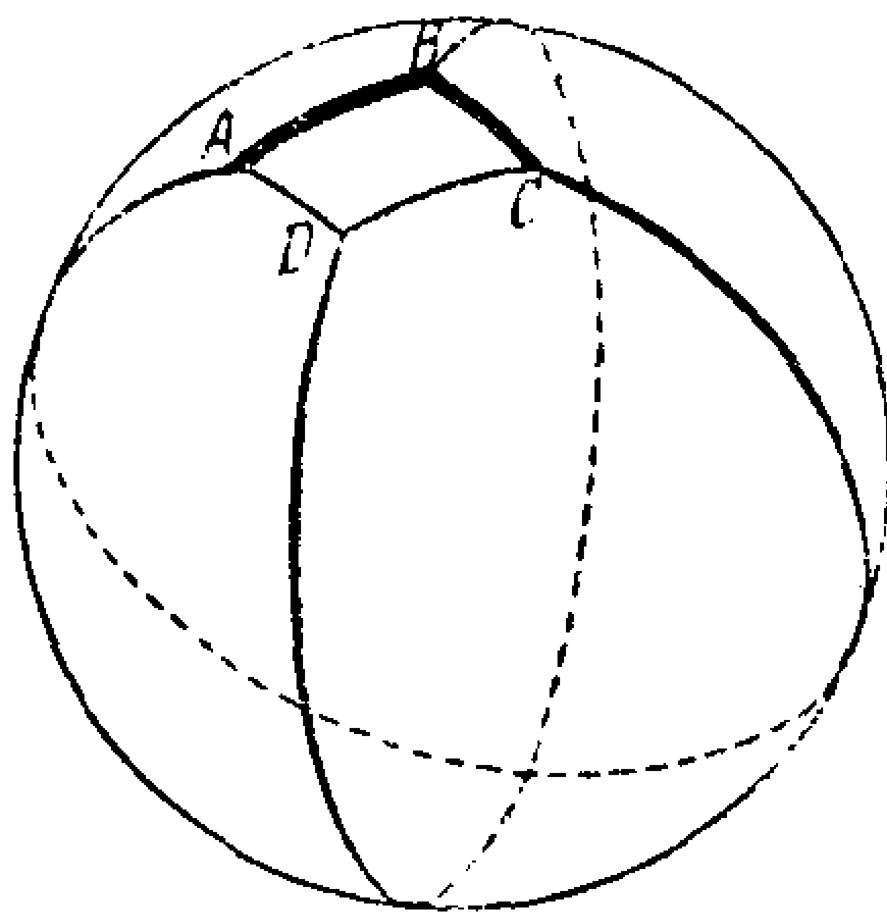


图 303

我們曾經把正方形模型的对边粘合而得环面和克来因瓶，应用同样的方法，也可以由正方形模型得到投影平面。为此先把正方形变形使成球面，挖去一小块四边形 $ABCD$（图 303）。再把 AB

① 在图 301 和 302 上表示的投影平面的划分，以前在第 149 頁和第 152 頁曾作为八面体的投影而得出。

和 CD 粘合，DA 和 BC 粘合。这一步可以这样做：提高 A 和 C，拉下 B 和 D，然后将这二对点分别合在一起(图 304)。結果就得出自交于一直綫的閉曲面(图 305)。这曲面跟投影平面拓扑等价。

的确存在具有这种形状的代数曲面(图 306)，其方程为

$$(k_1x^2+k_2y^2)(x^2+y^2+z^2)-2z(x^2+y^2)=0.$$

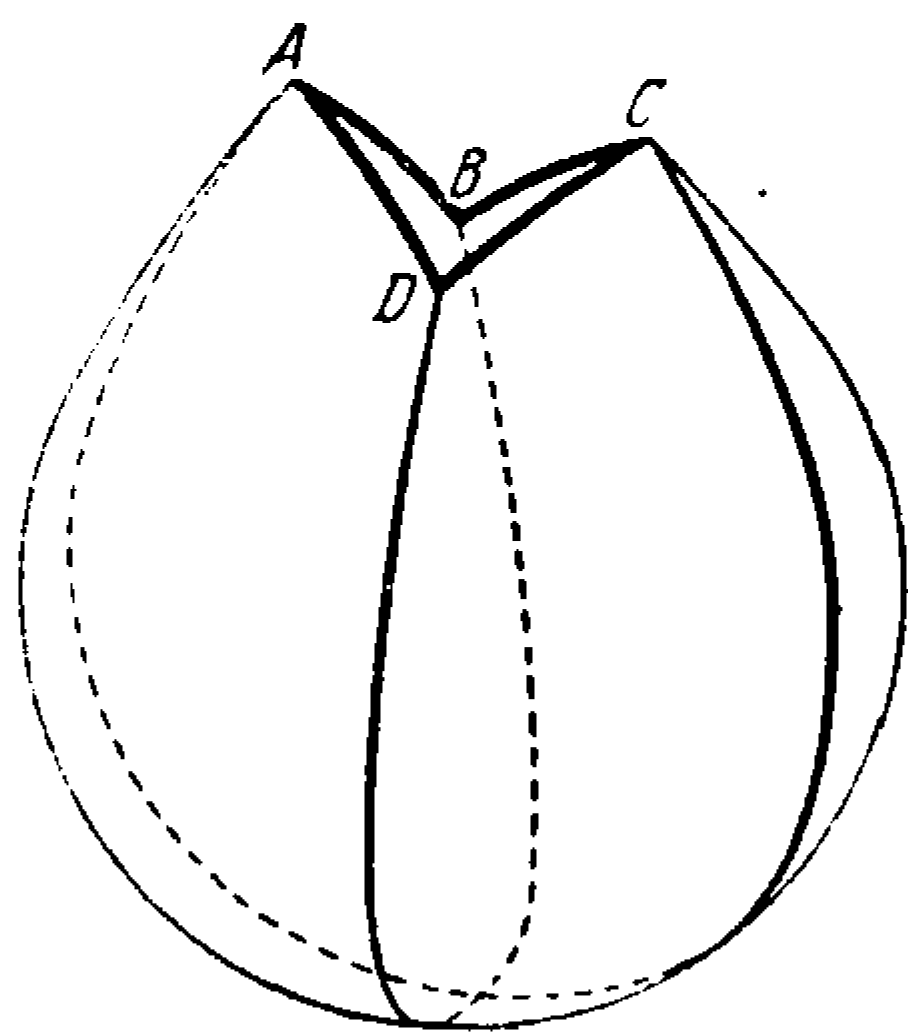


图 304

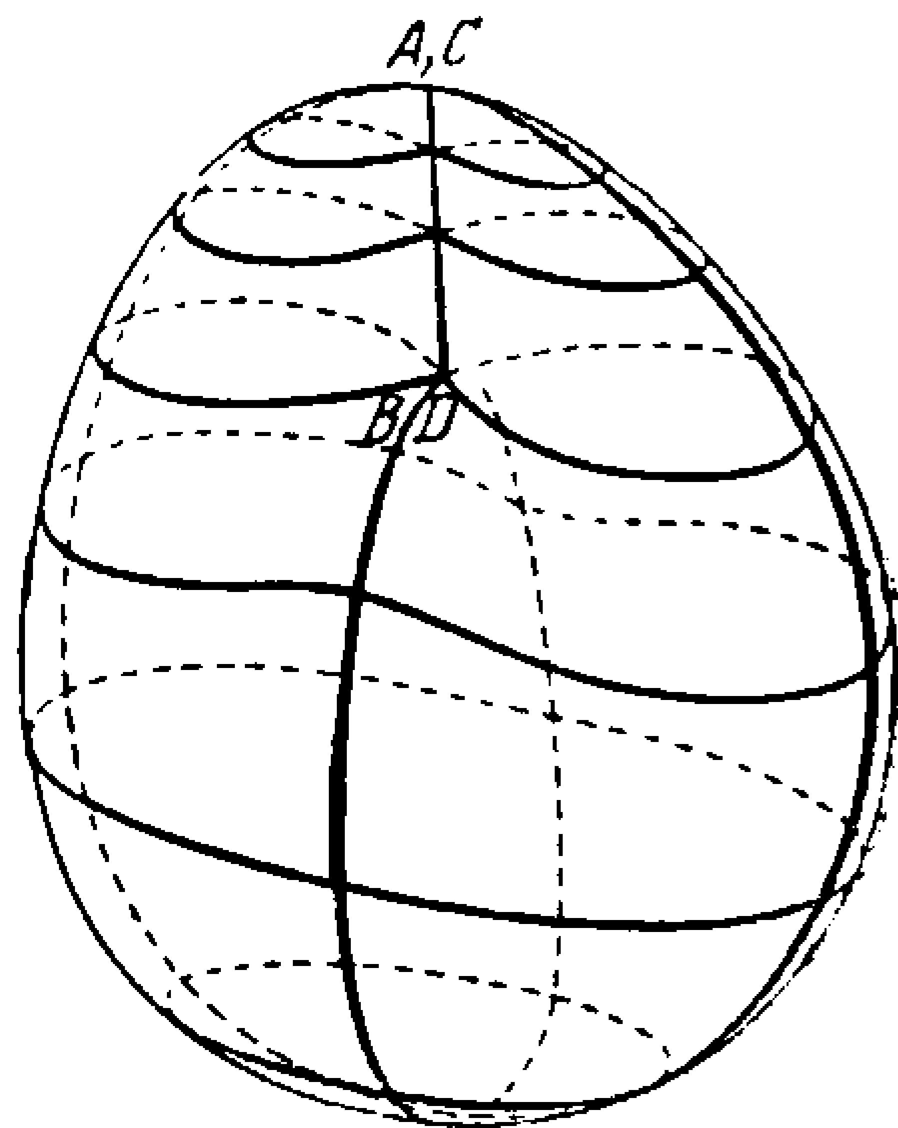


图 305

这个曲面同微分几何中一个作图有关。我們从任一曲面 F 上曲率为正的一点 P 开始。作 P 点处所有正截口的曲率圓(参考第 187—189 頁)。則这族圓所扫过的曲面就如图 306 所示，而它的自交綫是曲面 F 在 P 点的法綫的一段。上列方程系对于直角坐标系而言，此坐标系以 P 为原点，以曲面 F 在 P 点处的二主方向为 x 軸和 y 軸，k_1 和 k_2 則为 F 在 P 点的主曲率。

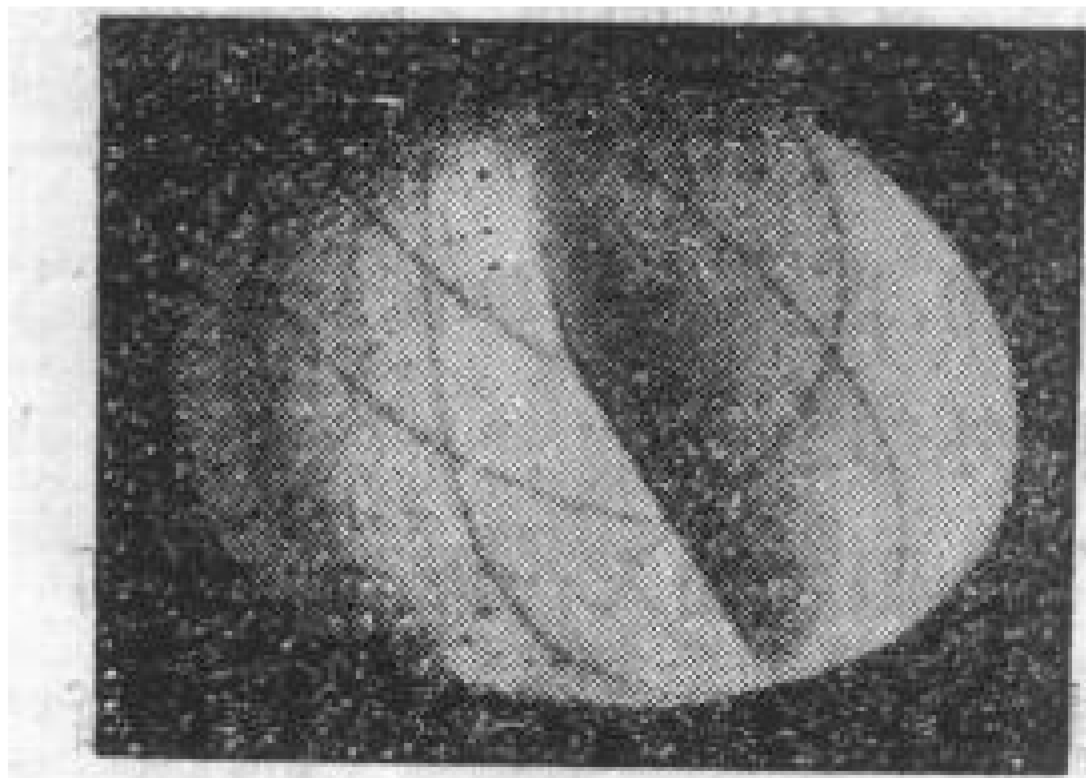


图 306 a

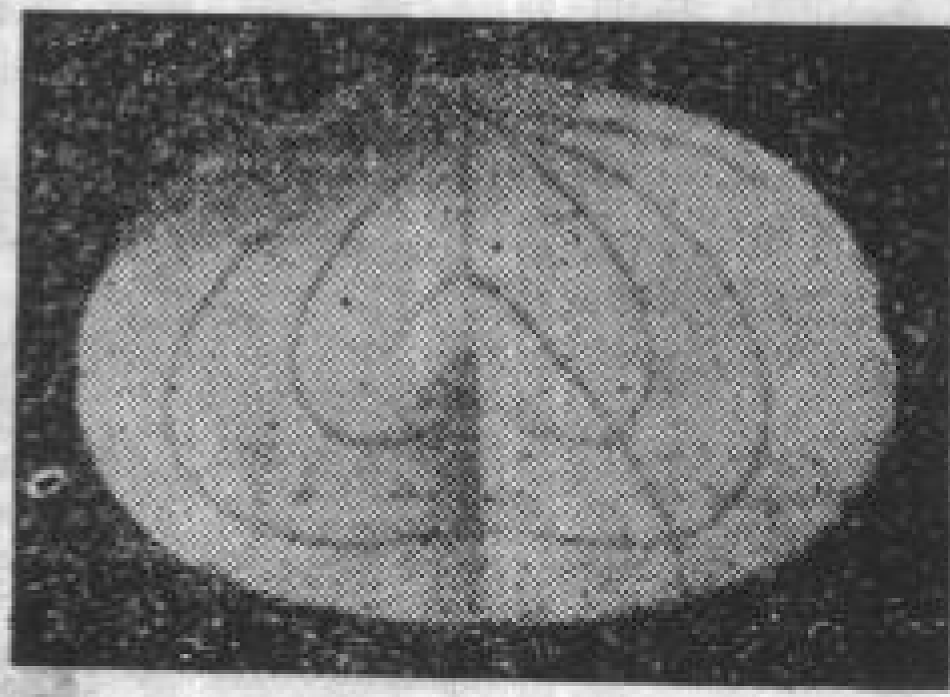


图 306 b

如果我們再从图 304 出发，但現在只把 AB 和 CD 粘合而不把 DA 和 BC 粘合，便得到跟默比斯带拓扑等价的曲面。因为这种叠合对边的方式，根据定义，正是变换正方形为默必斯带的叠合方式。新曲面的边緣系从弧 DA 和 BC 得来。但因为 A 和 C 重合，B 和 D 重合，所以这二弧做成一閉曲綫，这曲綫的形状，可以——比方說——作成圓形（图 307）。显然这个曲面沒有自交綫。在 A, C 和 B, D 重合的二点处，曲面的曲率不連續。但若把这两点的邻近加以变形，则得一到处連續弯曲的曲面。图 308 和 309 表示这种曲面。

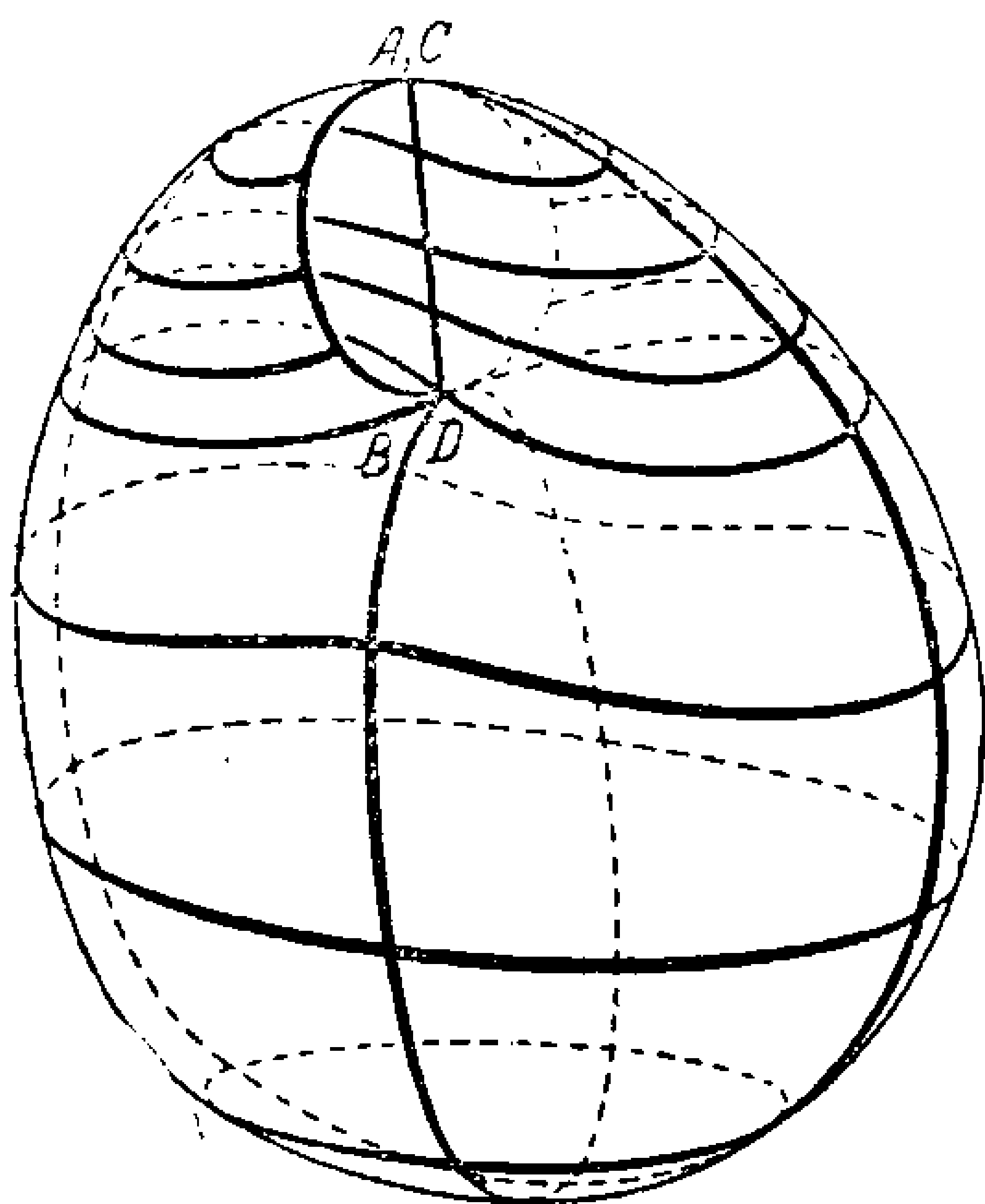


图 307

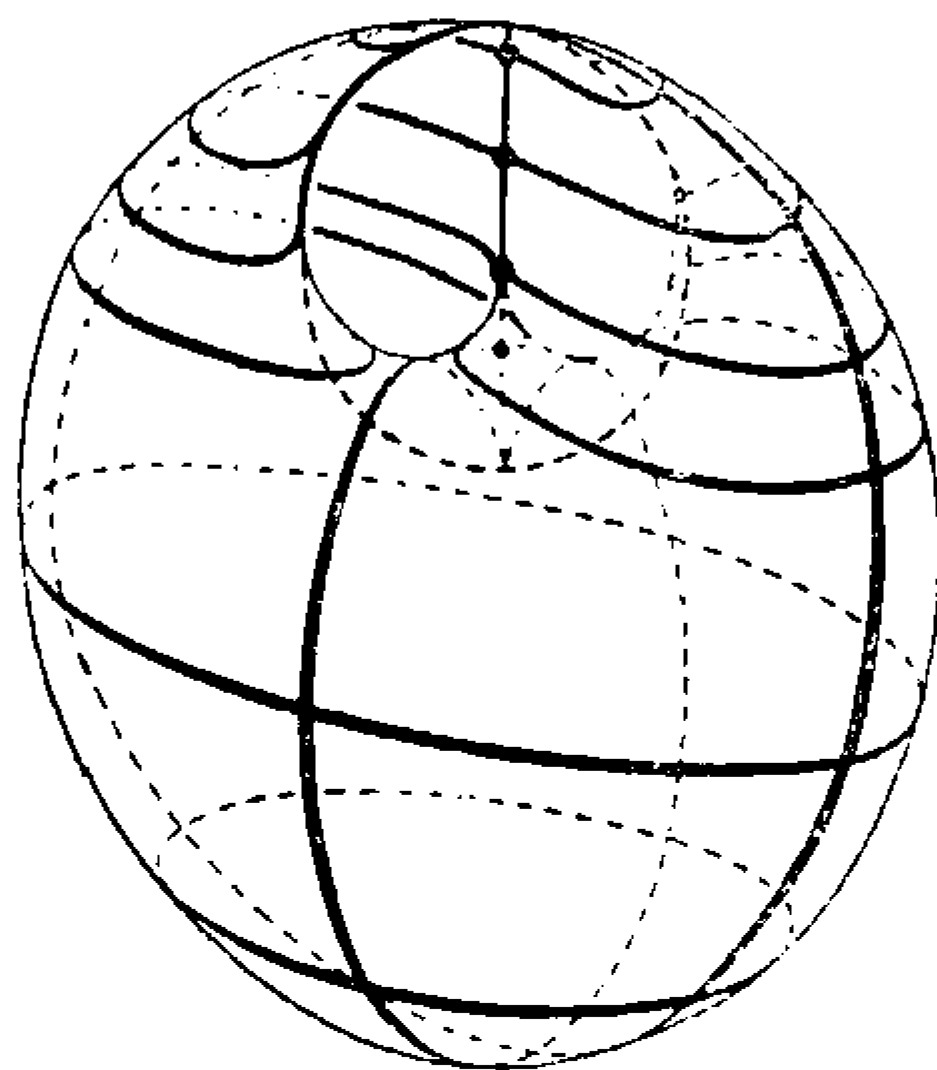


图 308

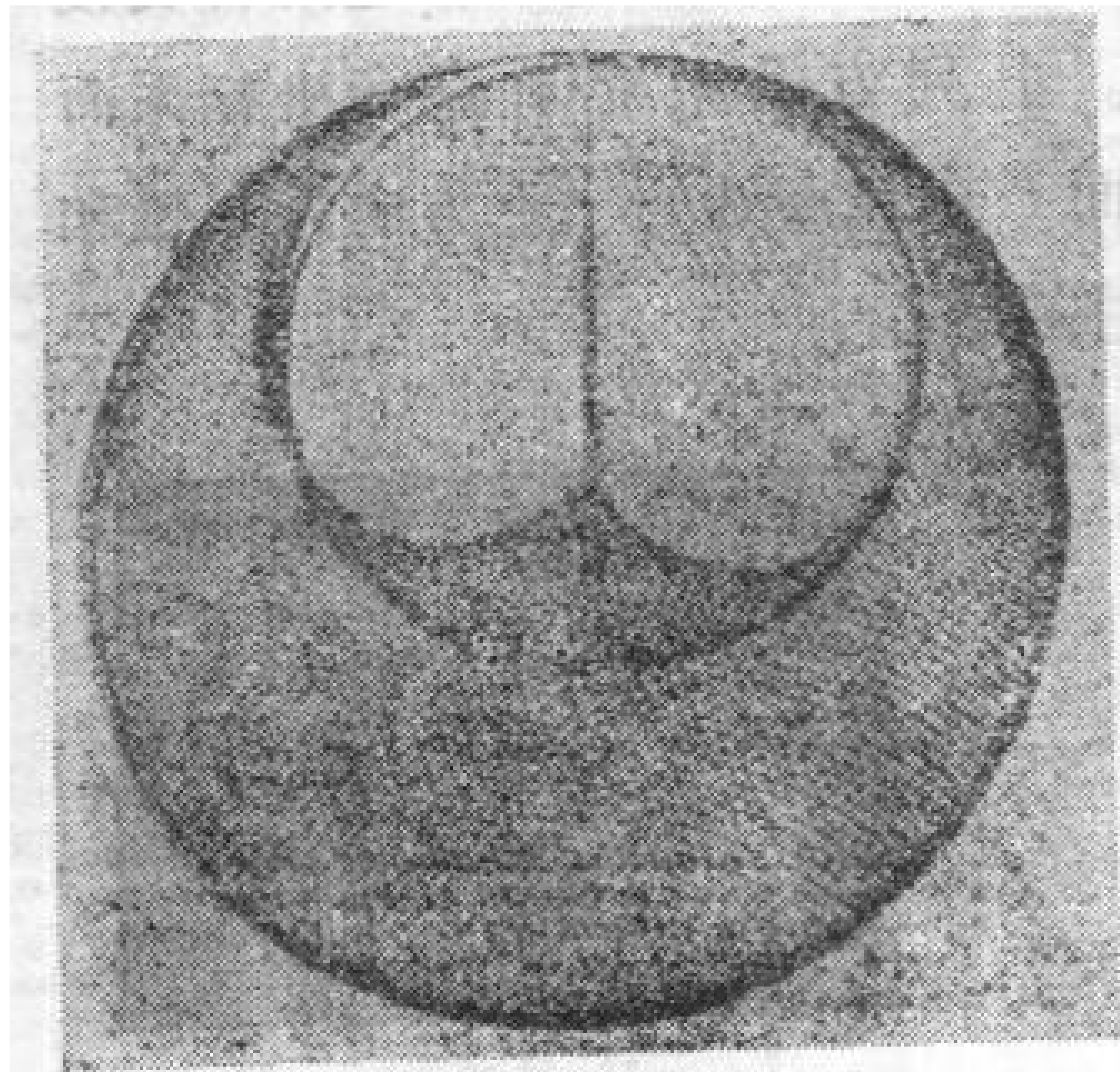


图 309

这样的曲面，尽管边緣是圓形的，却不能拿它作容器用，因为它是单側的，沒有內外部之分。

假若插入一圓面将曲面封閉，便重新得到投影平面模的型，这一点不难从图

307和305看出来。反过来，如果从投影平面的模型挖掉一片圓面，結果得一默比斯带的模型。挖开的洞不管在图305的曲面上什么地方都可以，因为球面上各对对徑点是类似的，投影平面上各点的位置也就沒有区别。特别，如从图305的曲面去掉底部，剩下一个特别显眼的形象。这曲面名为"交叉帽"，如图310所示。交叉帽是以圓周为边緣的一种新的默必斯带的模型。虽然曲面是单側的，可是显然能作容器的盖子用。其所以可能，是因为它有自交綫。

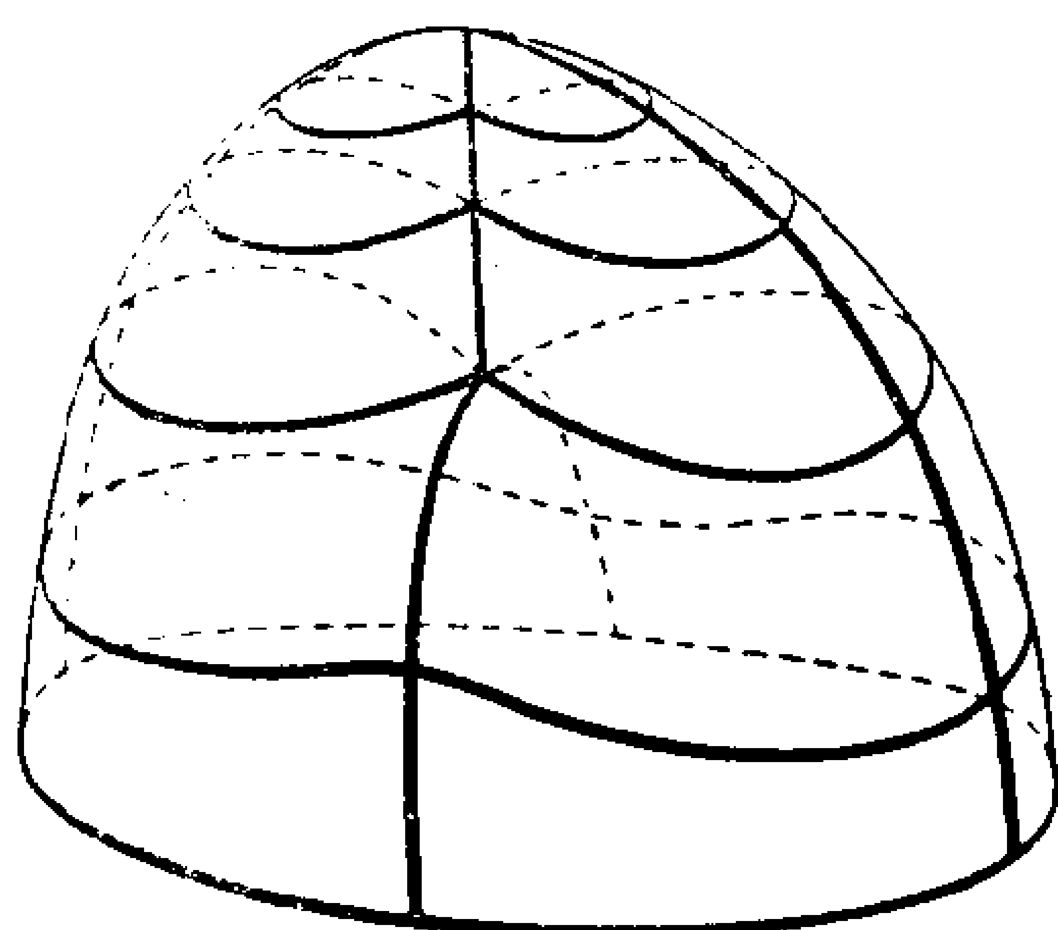


图 310

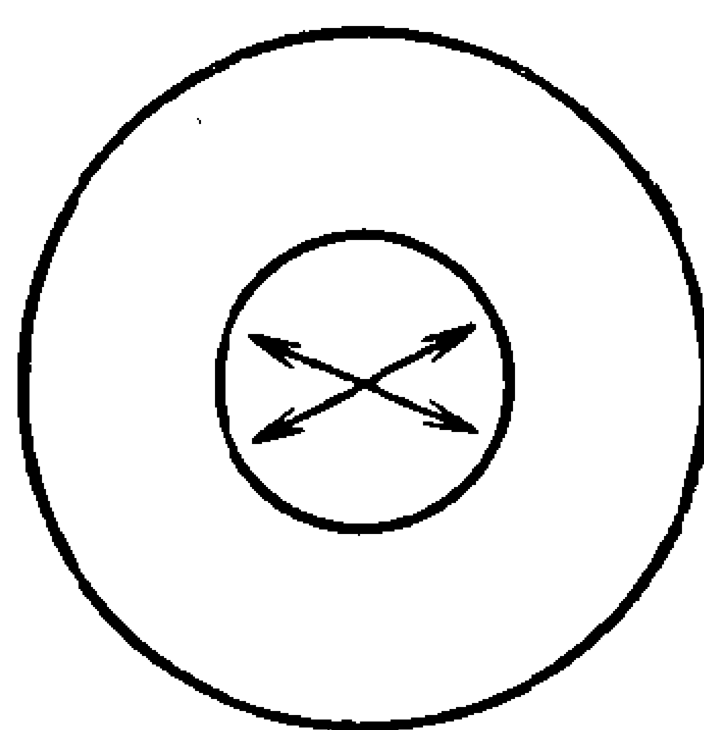


图 311

假如将交叉帽沿自交綫剪开，再作适当的变形，結果得一有四边形孔或圓形孔的圓面：这只要把图303—305上的变换逆推即得。因此我們可从介于二同心圓的平面域出发，把小圓的每对对徑点粘合起来而得出默必斯带的模型(图311)。最初看来，似乎认不出这图形所代表的曲面就是在第308頁表上正方形模型所代表的曲面。但是正方形模型确实可以从图311得出：把平环面剪

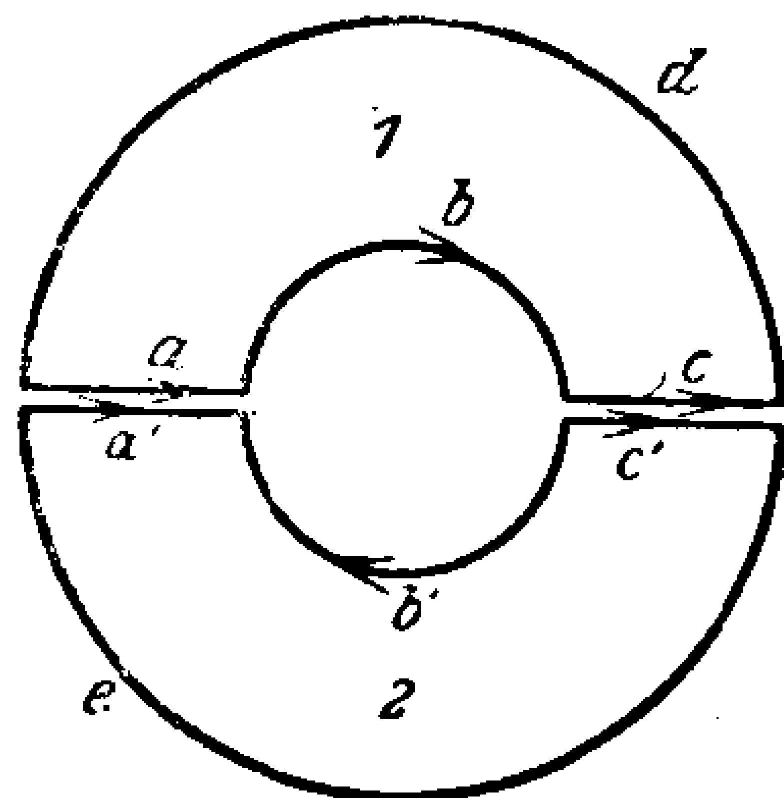


图 312

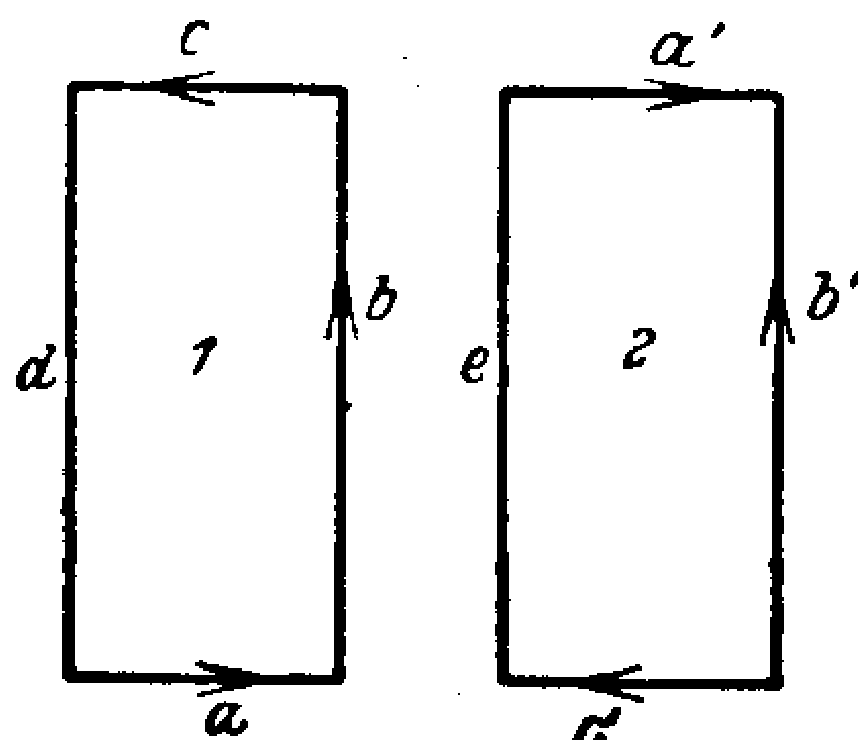


图 313

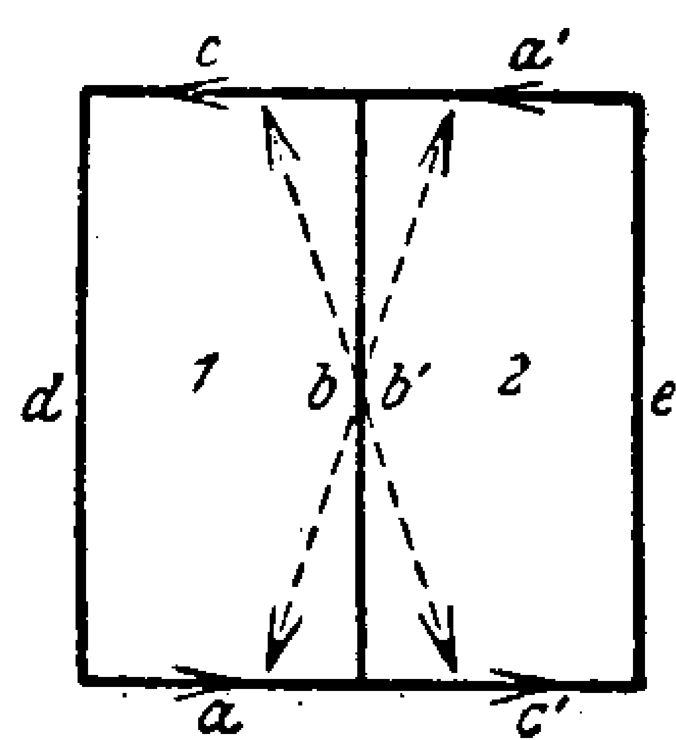


图 314

成两半(图 312)，加以变形(图 313)，翻轉一半 (即对調图 313 上 e 和 b' 的位置)，最后把原来在一起的一部分棱实在地粘合，另一部分則抽象地作成对应(图 314)。

在我們的投影平面的模型里，有两点——自交綫段的端点——是奇点。鮑埃 (W. Boy) 作成了投影平面的旣无奇点又处处連續弯曲的模型。

为了作鮑埃曲面，我們不从正方形开始，而从正六边形开始。六边形边緣上的对徑点仍旧当作是叠合的。把六边形变形使成球面，球面上有一球面正六边形孔。新图形跟原来的六边形一样，可剖分为对于一軸对称 (图 315)的三片合同图形。然后，把三片分离，每片再經一次变形。至于如何变形，等一下再讲。如此我們得到三片合同的成某种形状的曲面，把它們拼在一起，最后得到鮑埃曲面。这曲面也有三重对称軸。自然，这一方法的目的就是設法叠合球面的六边形洞的棱上的对徑点。

首先，把一片曲面 $ScAaBbCdS$(图 315)的三点 A, B, C 重合在

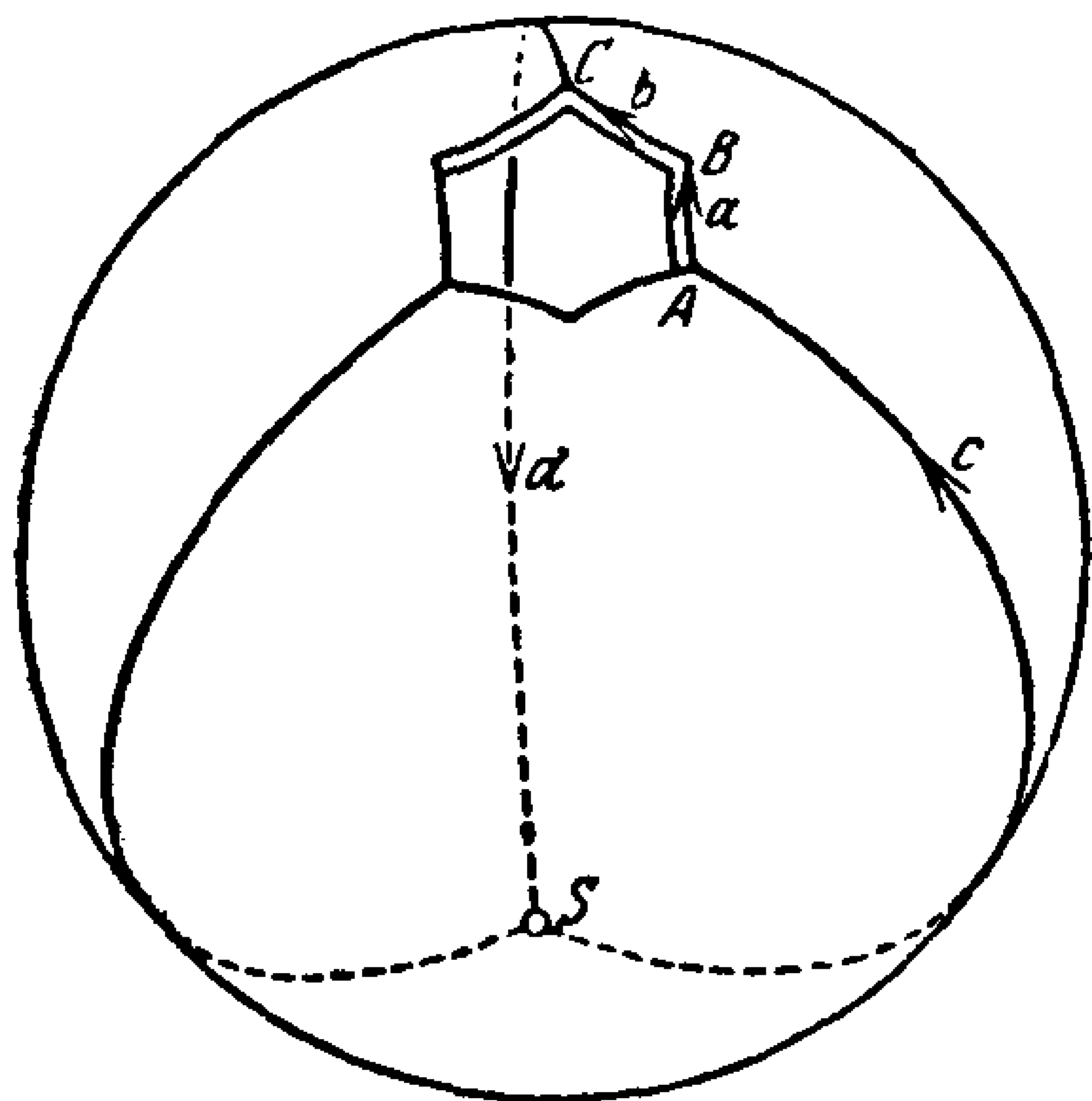


图 315

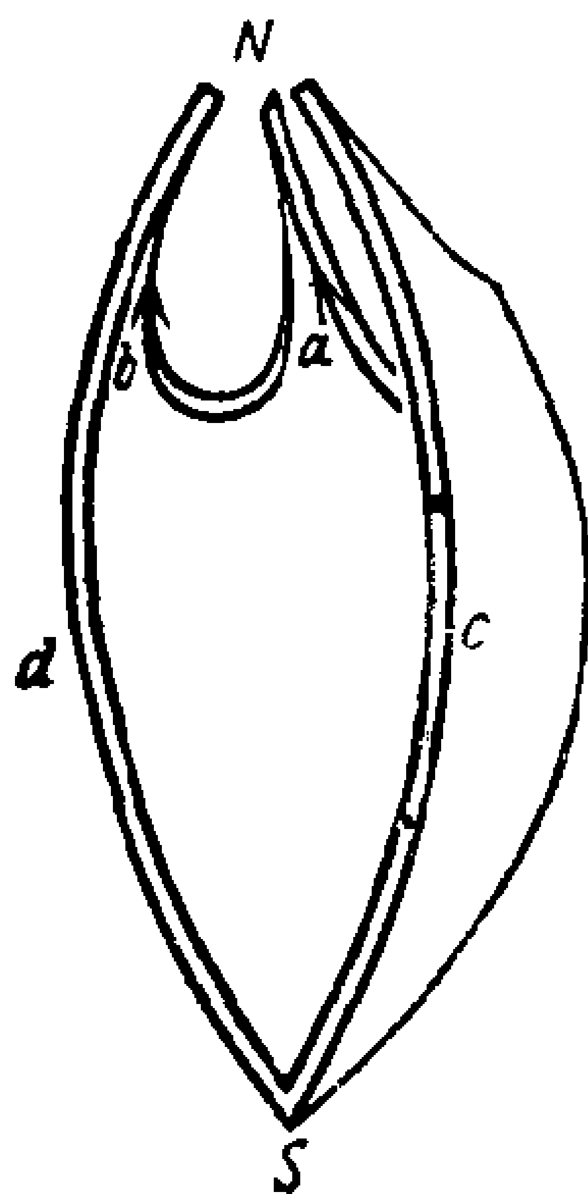


图 316

N 处(图 316)，但不当作是叠合的，因为不符合原来的叠合規則。現在保持点 S, N 和棱 b, c, d 不动，把閉棱 a 提高 (图 317)到如图

318 的位置。在这一步手續中 c, a 間的部分曲面自然要拉长一些，使它几乎成为平面。然后把弧圈 b (图 318) 向右上方拉，使它处

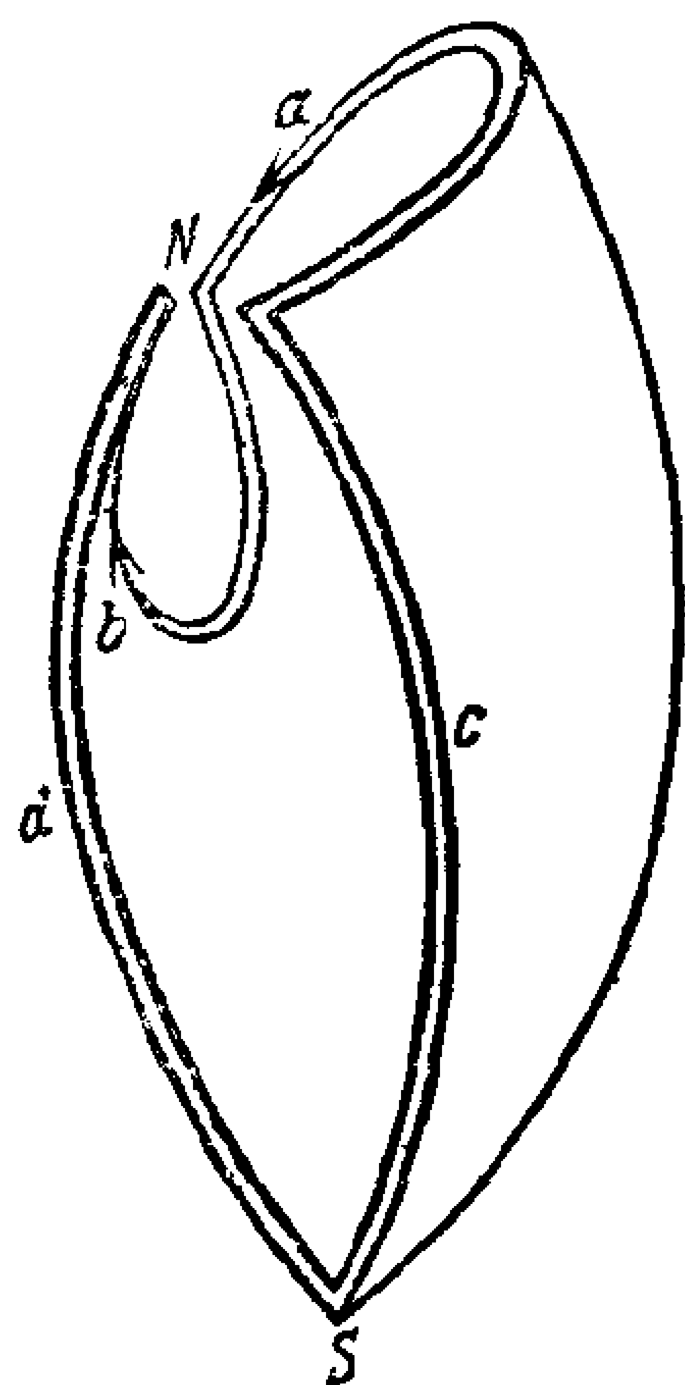


图 317

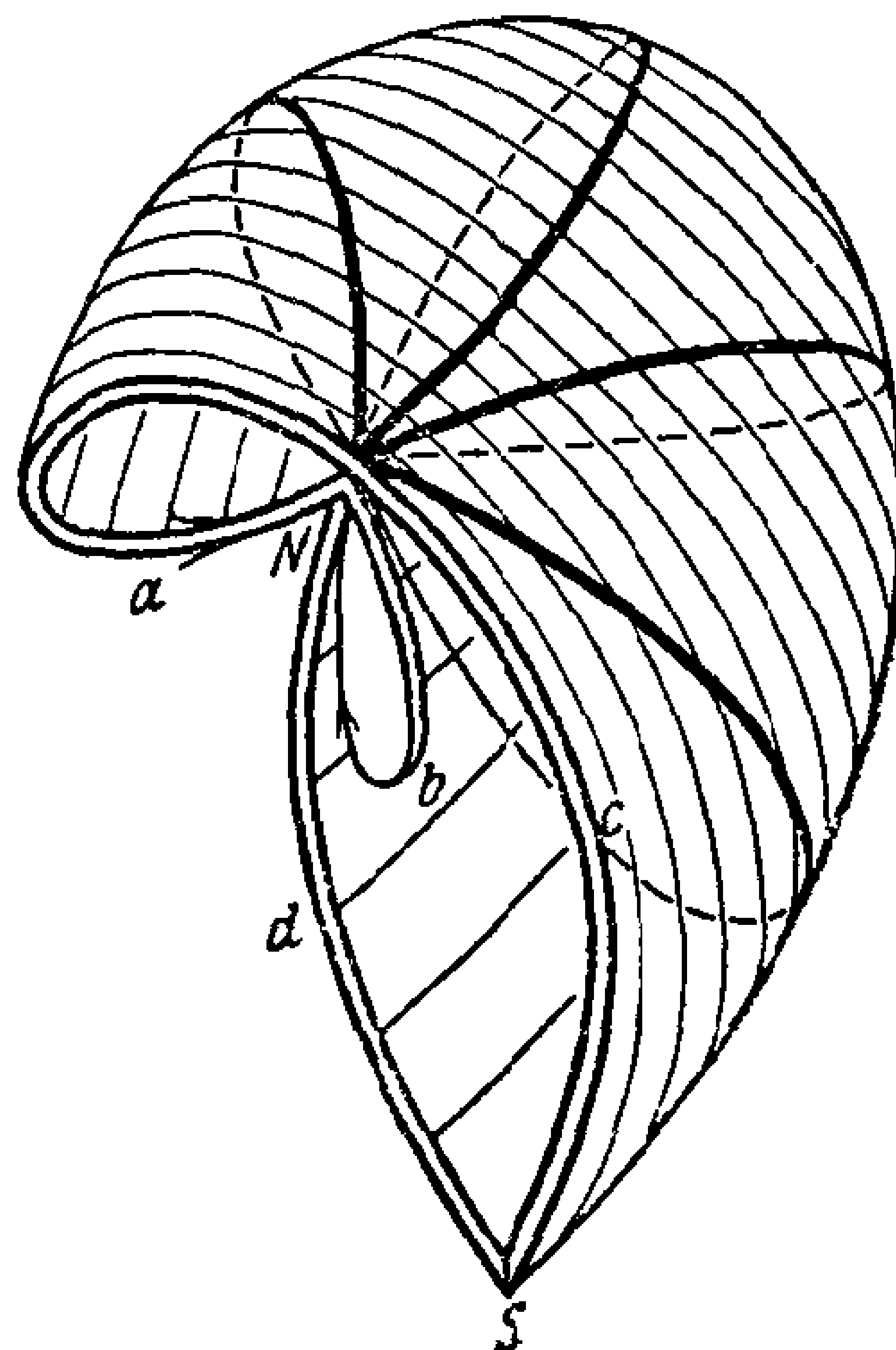


图 318

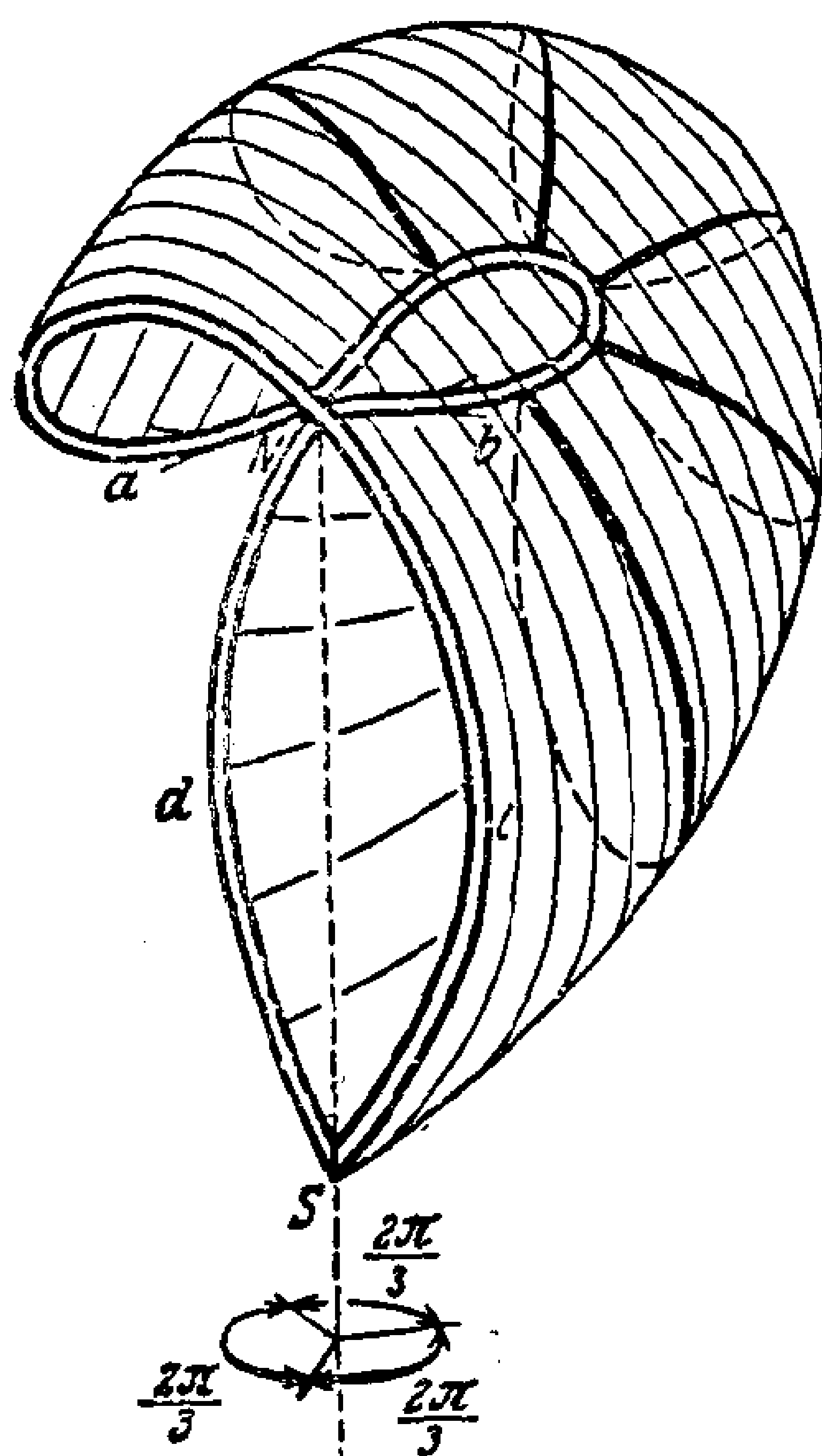


图 319

于剛才所說的那部分曲面的下面，如图 319 上的位置。这最后的位置应使弧 c, d 合同，弧圈 a, b 合同，并且当曲面繞軸 SN 作 $\frac{2\pi}{3}$ 角的旋轉(如图中所画的指向）后，c 重合于 d, b 重合于 a (图 319)。我們再作一片与第一片合同的模型，它的对应部分以 a', S' 代表。把这片模型粘在第一片上，使 d' 和 c 重合(而且 S' 和 S 重合，N' 和 N 重合)。于是 a' 和 b 自然重合。把这二棱粘在一起。現在，这两片模型的接縫綫 Nb 变为新曲面的自交綫，从图

319 上可以看出。新曲面的边緣由 c', a, b' 和 d 組成，这只要回头看看原来的正方形即可知道(图 320)。

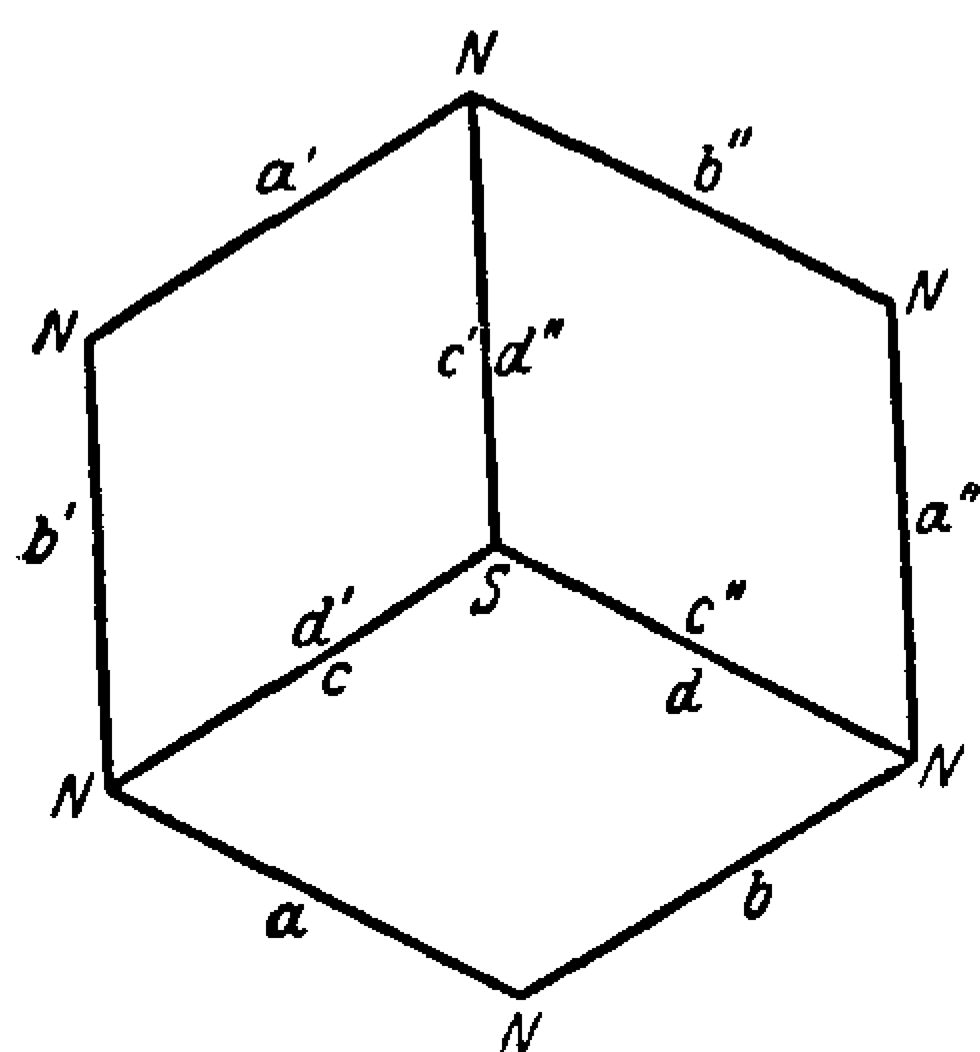


图 320

显然，我們还可在这条边緣上粘上第三片模型，使 d 和 c'' 重合，a 和 b'' 重合，b' 和 a'' 重合，c' 和 d'' 重合(記号的意义同前)。至此，鮑埃曲面塑造成了。从图 320 上容易看出，鮑埃曲面跟投影平面等价。图 321 系用金屬絲編織的网状模型。曲面的自交綫是有三个弧圈的曲綫，它通过 N 点，而且同整个曲面一样，对称于 SN 軸。仔細分析图 320，可知有三片曲面通过 N 点。这三片曲面在 N 点有連續切面的必需和充分的条件是在弧圈的六个端点汇聚的 N 处有三条相互垂直的切綫。如果曲面在其他接縫的地方有縐紋或曲率不連續的情形，可把曲面弄平来除掉。在图 312 上，模型的自交綫以粗金屬絲做成。至于其他的粗金屬絲只是为了作支架之用。这个模型用一个螺絲釘釘在 S 点。模型与我們的作法之間的关系，看图 321 便十分了然。

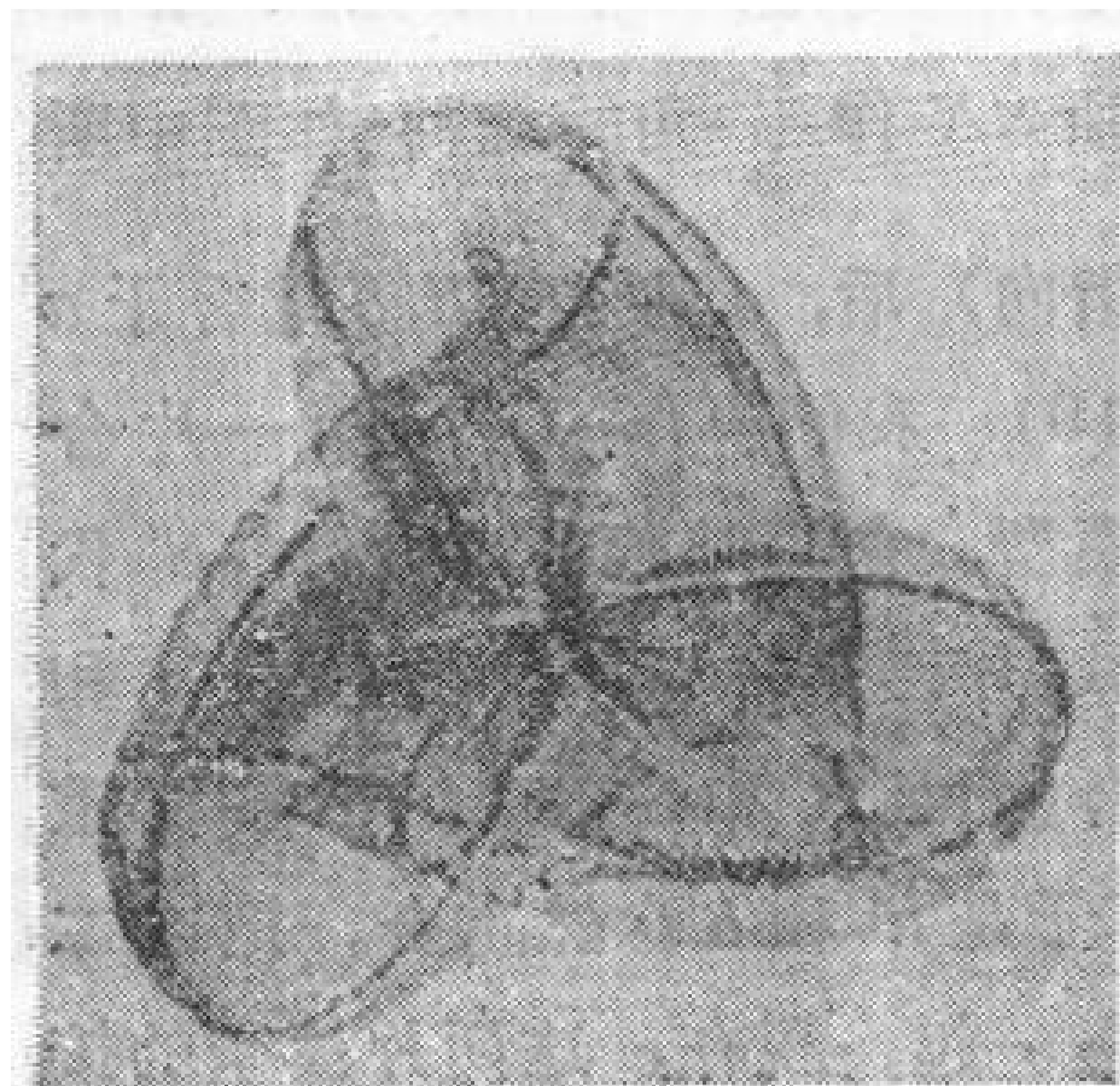


图 321 *a*

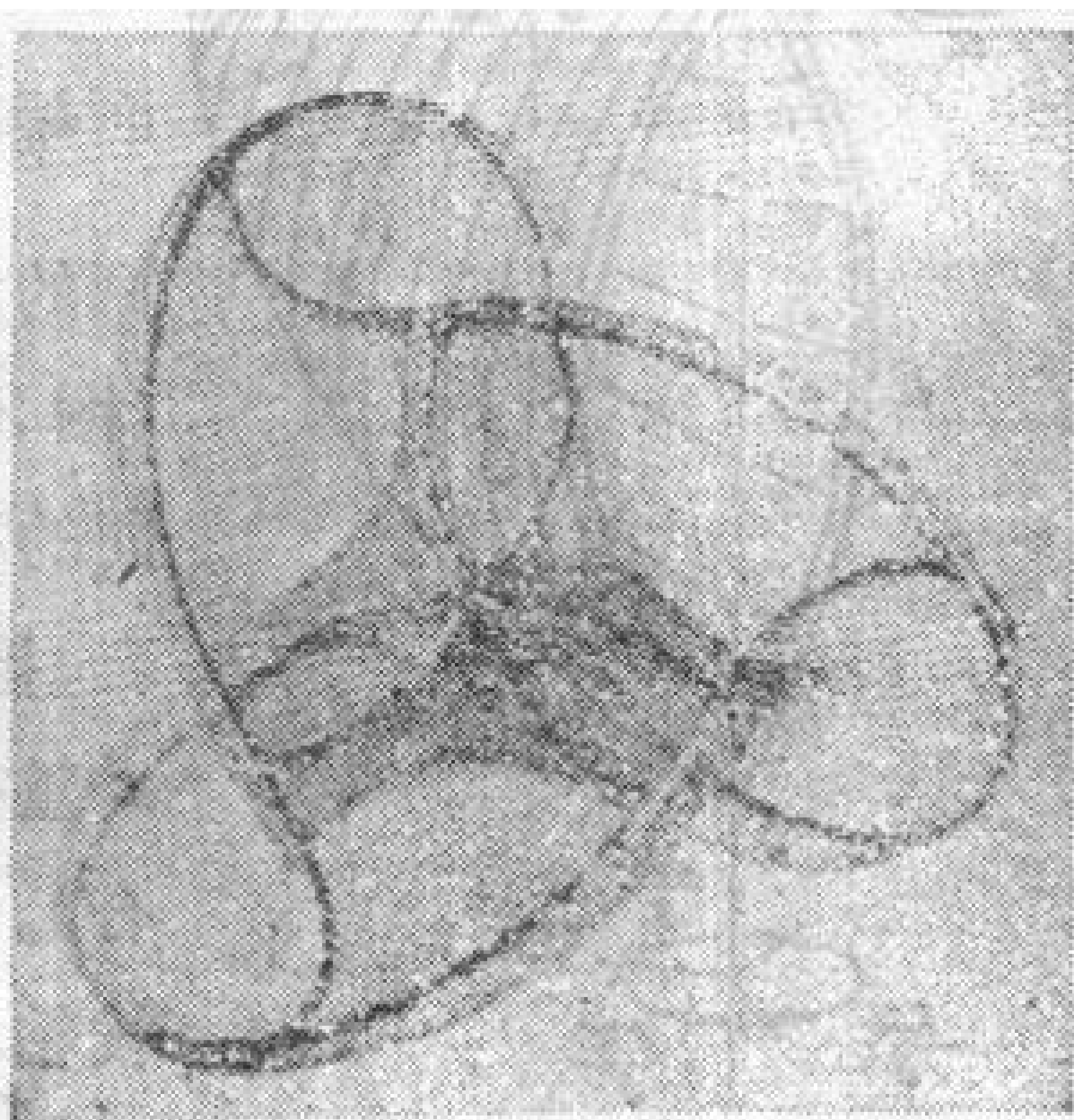


图 321 *b*

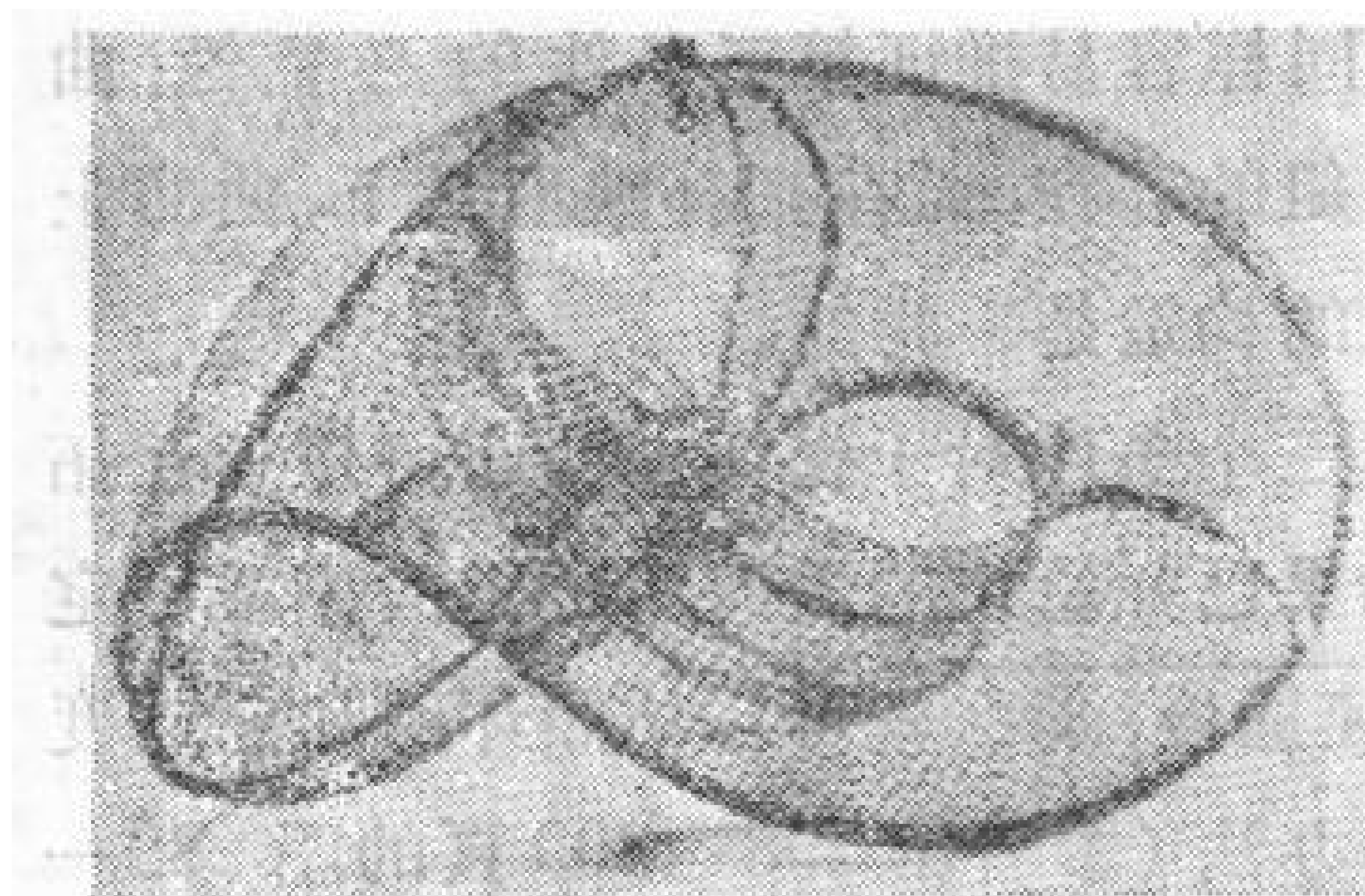


图　321 *c*

根据前面的討論，可知鮑埃曲面的球面象处处連續。可惜現在还沒有弄清楚球面象是怎样分布的。假定我們从任意法矢量出发，連續作出象点，則由于曲面是单側的，終于会达到这点的反方向法綫矢量。这样，在球面映射之下，鮑埃曲面上任何一点对应球面上的一对对徑点。但由于在这样的叠合方式之下球面重新变回投影平面，可見鮑埃曲面的球面表示产生投影平面到自身的映射。当然映射不是相互单值的，因为显然鮑埃曲面上几个点对应球面上一对点。

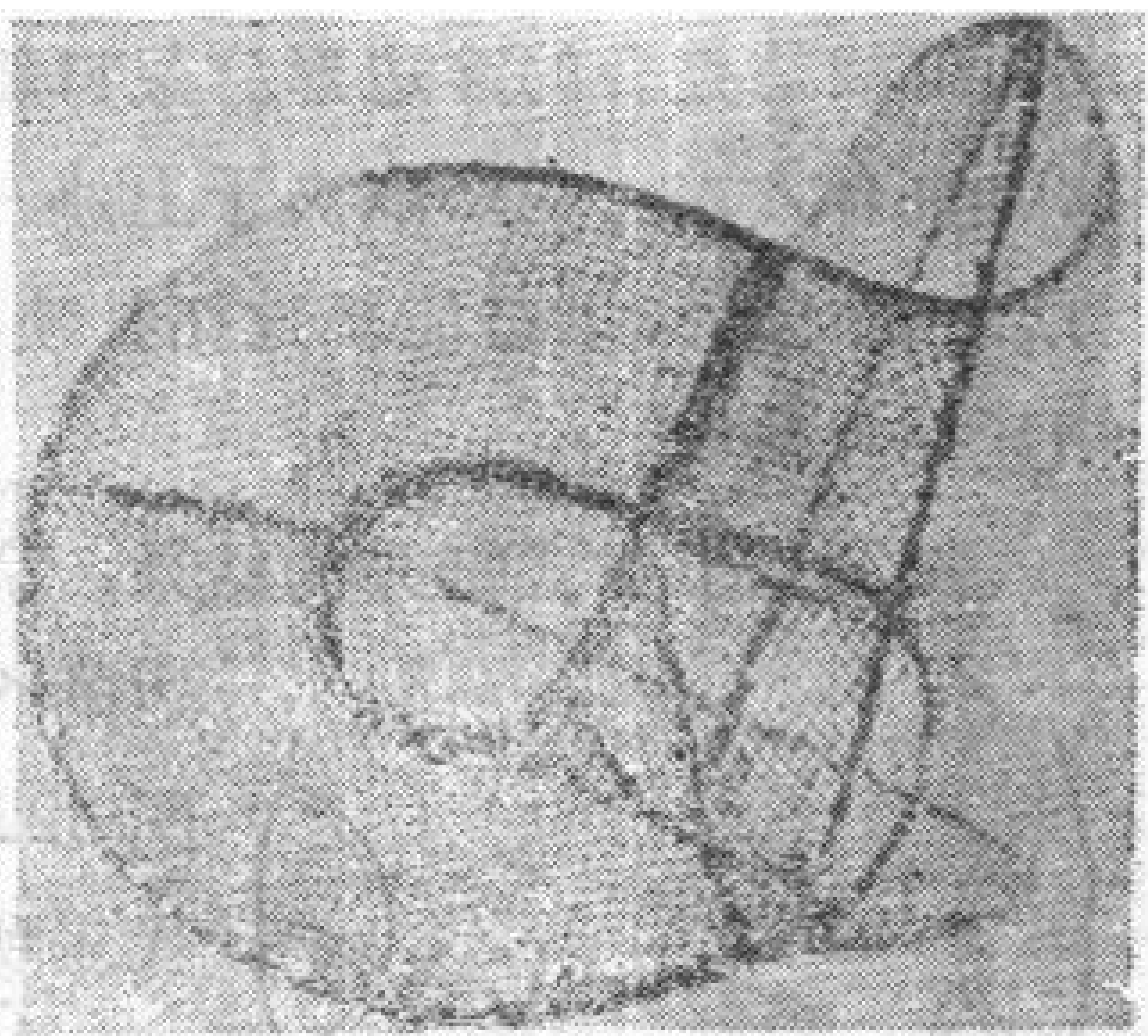


图　321 *d*

§48. 有限連通度曲面的标准形式

我們把所有能互相拓扑映射的曲面划为一类。具有有限連通度的屬于同一类的二曲面，其必需条件为：

1）二曲面或者都是閉合的，或者有同样数目的边緣曲綫。

2）二曲面或者都可定向，或者都不可定向。

3）二曲面的連通度相等。

第一个条件的必需性很明显。第二个条件的必需性可以这样表述：凡可以拓扑映射成可定向曲面 G 的曲面 F，它本身也必可定向。在这种說法下，命題容易证明。事实上，曲面 G 的定向經过

拓扑映射而变为 F 的定向。同样容易推证第三条件的必需性：曲面的連通度决定曲面的截口組的存在，而在拓扑映射之下，曲面上的截口組和曲面象的截口組的构造是一样的。

进一步研究表明，上述三个条件对于保证二曲面可以相互拓扑映射也是充分的。因为如果已知給定的曲面为可定向或不可定向的，又知其边緣曲綫数和連通度，那么就可以仿照环面和連通度为 5 和 7 的可定向閉曲面的办法（参看第 298—300 頁的图 282—287），沿适当的截口組把曲面切开。切开后曲面总可以变为有一部或全部棱是叠合的多边形。截口組的构造，以及多边形的棱数和棱的叠合方式，完全取决于上述三个条件。因此二曲面如果同时符合三个条件，则必能經过拓扑映射而变成同一多边形域，因而能相互拓扑映射。

按照以上方式剖分的結果，亏数为 p 的可定向閉曲面变为 $4p$ 边的多边形，其叠合边配对的情形如图 322 所示。这些 $4p$ 边多边形作成代表所有可定向閉曲面的一个**标准**形式組，因为任何这类曲面的連通度是奇数 $h=2p+1$。我們见过的另外一个完全标准形式組是球面、环面以及有 p 个洞的圈餅。

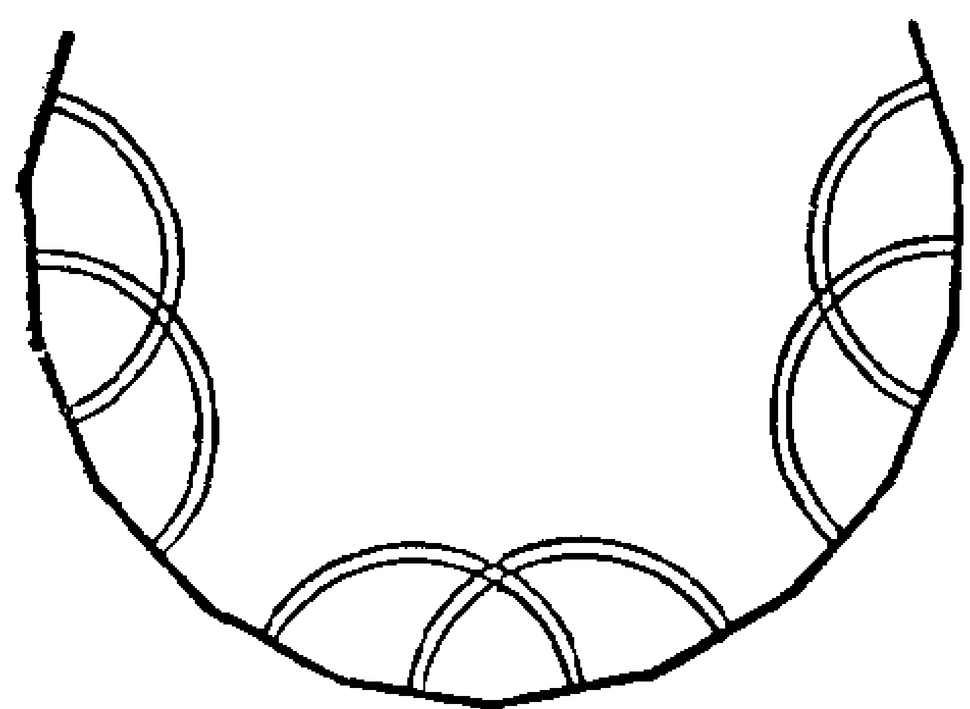


图 322

在函数論中有几种黎曼曲面包括在这种分类之內，虽然从直观形象看不出这种可能性。这些曲面，类似大多数极小曲面的球面象（参看第 269 頁），把球面复盖了好几层，并且各层在支点处互相連通。这些曲面都是可定向的，因为球面的定向可变为复盖在球面上黎曼曲面的定向。当且仅当函数是代数函数时，对应的黎曼曲面是閉合的；所有超越函数都产生非閉黎曼曲面。我們不再細讲，有許多关于几何函数論的好书可供参考。

对于有边緣曲面，也可能找出一組多边形，使得边緣由有限条曲綫組成的而且具有有限連通度的任一曲面，都恰可拓扑地映成这些多边形之一。圓筒面和默必斯带的正方形模型是这样的多边形的两个例子。对于可定向的有边緣曲面，还可把球面、环面和圈餅随意挖上几个洞(第295頁图278)，得到更为直观的标准形式。为了对于不可定向曲面作出类似的标准形式，可以利用交叉帽，这种曲面我們曾經在第314—315頁上作为默必斯带的模型而作过了。在一球面上开若干个洞，然后用交叉帽把其中的几个洞封閉起来。任一具有有限連通度的不可定向的曲面都等价于用这种方式作出的曲面。交叉帽的数目和洞的数目唯一决定于边緣曲綫的数目和連通度。

交叉帽有一条自交綫和两个奇点。克来因瓶和鮑埃曲面則提供了无奇点的单側曲面的例子。关于其他一切不可定向的閉曲面是否都能以无奇点形式在空間里实現的問題，似乎尙未解决①。当然这类曲面絕不能沒有自交綫，这一点我們早已提过了。

然而，在四維空間內，所有不可定向曲面都可以表作旣无奇点又不自交的曲面。今用 R_4 代表四維空間，用 R_3 代表三維空間。我們可以想象 R_3 安装在 R_4 中就像平面安装在 R_3 中一样。現在先在 R_4 中作一个无自交綫和奇点的交叉帽。为此目的，設想在 R_3 中有一交叉帽，并設想它安装在 R_4 中。然后在交叉帽上选擇一个以自交綫为直徑的圓面 e (参考第314頁图307)。在 R_3 中，我們可让任何圓面的圓周固定，而将圓面的其他部分弯曲，使所有点都离开圓面的平面。同样，在 R_4 中可把圓面 e 变形成为曲面 f，使圓周保持在 R_3 中的交叉帽上不动，而 f 的內部伸出于 R_3 之外。經过这次变形，交叉帽变为 R_4 中的曲面 F，而 F 显然是无自交綫和奇

① 俄譯本将这句話改为"其他一切不可定向的閉曲面都能以无奇点的形式实現，如果对于克来因曲面或鮑埃曲面安上适当数目的手柄的話"。

点的。如果現在我們把有若干个洞的球安装在 R_4 中，不用交叉帽而用像 F 那样的曲面来盖住几个洞口，那么就得到一組既无自交綫又无奇点、代表所有有限連通度不可定向曲面的标准形式。

另外一个問題是用最低次数的代数方程表达具有已知拓扑結构的曲面。例如，我們从前讲过斯泰納曲面是代表投影平面的模型。那么有沒有代表鮑埃曲面的代数曲面呢？这个問題尚未解决。投影平面可以实現为 R_4 中的一曲面，曲面的方程很簡单，而且无自交綫和奇点。推导过程見本章附录 1。

拓扑等价問題已經从曲面推广到三維和更高維的結构。这問題引起倍蒂(Betti)群的研究。在倍蒂群論里，曲面連通度和可定向性的概念是从更一般的观点来处理的。讀者可以参考第 287 頁脚注中所提及的亚历山大罗夫的著作。

§49. 将曲面映成自身的拓扑映射。不动点。映射类。环面的汛复盖曲面

将曲面映成自身的最簡单的拓扑映射是一个連續畸变，它把曲面整个变成自身，这类的映射叫做形变。平面到自身的运动是形变，但平面对于一直綫的反射則是映射而不是形变。因为，反射反轉了每个圓的指向，而形变則不然。

在映射之下映成自身的点叫做映射的不动点。現在我們证明，将圓面(包括圓周上的点)映成自身的任何連續映射，至少有一不动点。用反证法证明。假定圓面 e 上有一个将它映成自身但无不动点的連續映射。那末我們可給 e 中的每一点 P 加上一个箭头，使箭头的方向指着象的方向（这个規則仅对于不动点才不适用）。因为由假設，映射是連續的，从一点到另一点箭头方向的改变一定也是連續的。現在考虑在圓周上一点的箭头，幷让这点以順时針方向繞圓周一圈；显然这点上圓的切綫同时以順时針方向轉了整

整一圈。我們現在断言，这点的箭头方向也以順时針方向恰好轉了一圈。首先，箭头轉过的圈数必然是整数(也可以是零)，因为它要回到原位置。因为圓周上一点的箭头永远指向圓的內部，切綫和箭头的夹角不能等于零，也不等于π的任何倍数。但是如果箭头轉过的圈数和切綫轉过的圈数不同，那么在圓周上至少有一次应該碰到或者相同或者相反的两个方向。其次，用同样的方式我們考虑和上述圓同心且在其內部的任一同心圓k上箭头所轉过的圈数。这里也是一样，当一点以順时針方向繞圓周一周时，它的箭头也以順时針方向恰好轉了一圈。假如不然，則在外圓周連續地收縮到k的位置的过程中箭头轉动的圈数至少有一次起不連續的变化，这就跟圓內箭头分布的連續性矛盾。另一方面，如果k連續地收縮到圓面的圓心M处，則在k上所有点的箭头的方向必将趋近于一个方向，即M点的箭头方向。因此对于充分小的圓来說，圈数应該等于零。这就引出了矛盾。所以将圓面映成自身的連續映射不能沒有不动点。

同样，我們可以证明，将球面映成本身的任一連續映射必有一不动点，或者有一映成对徑点的一点。假如不然，每一点将唯一地决定連接这点及其象点的大圓的弧。这样势将得出球面上的一个箭头場，它是处处連續的，可是若考虑到箭头的旋轉圈数，可以证明这样的場是不可能的。由此可知，我們不能够在地球上竪立指路牌，使指路牌方向处处連續变化。

如果把对徑点叠合成一点的球面解釋为投影平面的模型，我們得到——作为上述球面映射定理的推論——将投影平面映成本身的任一連續映射必有一不动点。

要想更好地了解将已給曲面映成本身的拓扑映射的全貌，可以把所有的这些映射分类。如果二映射只相差一个形变，把它們列入同一类；諸形变本身作成恒等类。把球面上任一点映成它的

对徑点，就得到不屬于这类的映射的例子；因为在这样的映射之下，小圓的指向显然反轉了。如此，到現在为止，我們知道球面映射有两类。进一步研究可以证明(但离題太远)，在球面上再沒有别的映射类。由此可知，投影平面的所有拓扑映射都是形变。

另一方面，在环面上有无穷多类。为了考察其中几个类，設想把环面沿經綫切开，拉直使成柱面，其二边緣为圓。然后将一圓固定，把圓柱面扭轉，使圓柱面变成自己，而另一圓繞其軸旋轉 k 圈；这样就将柱面的每一母綫变成繞柱面的軸旋轉了 k 圈的螺旋綫。今将柱面再弯曲过来使成环面，并将二边緣圓粘在一起，結果是一个将环面映成自身的拓扑映射，同时边緣圓上所有叠合起来的点是不动点。其他諸点的映射决定于柱面的映射：柱面的母綫对应环面的緯圓；此外，若是将二曲面的对应关系扩充到位于它們內部的部分空間，則可使柱面的軸对应环面的“心軸”(心軸即环面母圓中心描出的軌綫)。如此作出的环面在本身上的映射将緯圓变为环面上繞心軸 k 圈的螺旋状閉曲綫。不論以后将环面怎样变形，都不能改变与这种曲綫相伴随的数 k。因此环面上面两个有不同的 k 值的映射不能屬于同一类。

假如认为由此可以类推，說克来因瓶也有无穷多的映射，那就錯了。在圓柱面上的螺旋綫对应在克来因瓶上的閉曲綫，这些曲綫，即使 k 的値不同，也可以相互变形。要問何以克来因瓶和环面有如此差别，这可借正方形模型来說明。事实上，克来因瓶仅有有限个映射类。

上述方法未能包罗所有的环面映射类。我們可以借助环面的汎复盖曲面，以概括这些映射类的全貌。为此，我們設想把欧几里得平面包裹无限长的圓柱面；自然，这时圓柱面被平面包裹了无穷多次。从前我們不止一次地把有二边緣圓周的有限长柱面弯曲成环面。同样，无限长的柱面也能够变成环面。在弯曲的过程中，柱

面的軸要繞环面的心軸无穷多圈，而柱面則被套进它自己无穷多次。用这种方法，能够把欧氏平面拓扑映射成为一个复盖环面无穷多层的无皺痕无支点的曲面。这种曲面就是环面的汎复盖曲面。

每繞环面的經圓或緯圓一圈，复盖曲面从一层进到另一层。我們在环面上作典型截口組(包含一經圓和一緯圓)，而以通常的方法将环面变作以一定方式叠合了对边的矩形面。現在如果在复盖曲面上标出所有在典型截口組上的点，然后将复盖曲面变回成平面，那么标出的点将形成一直綫組，它們划分平面成无穷多的矩形，其排列的情形正象平面平移結晶群的基本区域(参考第72頁图72)。每一矩形相当于复盖曲面的一层。为了弄清楚这一点，让我們換一种方法来作汎复盖曲面。今以对边有一定叠合方式的正方形代表环面。仿照平面正方形点格的作法(参考第33頁)，把这些正方形拼在一起作成长条S，以二平行直綫a, b为边緣，向两方无限延伸。若将S适当地弯曲，使a, b重合，則S变为无限长的圓柱C。組成长条S的若干正方形划分C为以圓周为边緣的許多区域。将組成边緣的二圓周叠合，可从这样的一个区域又变回环面。如果采取像上面所讲的方式，把柱面复盖在环面上，則所有区域将相互重叠，而且每一区域恰好复盖整个环面一次，其全部边緣綫重合于环面的典型截口組。現在我們也像作正方形点格一样地继續作下去：把整个平面用S那样的相邻长条盖满。如果把平面包裹C无穷多次，使S又变为C，則盖滿平面的所有长条显然重叠在S之上，而所有长条的正方形剖分和S的剖分重合。現在把C再复盖在环面上，則平面上的諸正方形相互重叠，而且它們的边緣落在环面的典型截口組上，这正是我們要证明的。

第二种作法指出可用一种特别簡单的映射把环面的汎复盖曲面U变成平面E。因为如果把U上复盖环面同一点的那些点称为

等价点，則U上的任何等价点組都能用E上的正方形点格代表。将U映成自身的拓扑映射中那些将任一点变为一等价点的映射組成一个群，我們把它叫做环面的基本群(f)。如此說来，$U\to E$显然将(f)变换为变正方形点格成自身的平移群。

設g是将U映成自身的另一拓扑映射，对这映射虽不要求一定把任一点映成它的等价点，但要求它永远把等价点偶映成等价点偶。于是g对应将环面映成自身的一定的拓扑映射h。为了看清这一点，我們注意环面的任一点P被曲面U上某一无穷等价点組(Q)盖住。但根据g的定义，点組(Q)的所有的象(Q')盖住环面的单一的点P'，因此g决定将环面映成本身的拓扑映射$P\to P'$，它可用h来代表。反之我們也可以证明，对于环面的任一已知映射h，能够在复盖曲面上找到同h的关系有如上述的映射g。这样g只能在群(f)中的任一映射的限度內被决定。

应用上面的結果，我們能够得到将环面映成自身的映射类的全貌。这里只敘述結果而不加证明。設每一映射g被E上的映射γ所代替，而γ是g經映射$U\to E$得到的。設$ABCD$为和(f)对应的在E上的平移群(t)的正方形基本区域。設$A'B'C'D'$为在映射γ之下$ABCD$的象；則平行四边形$A'B'C'D'$必然是(t)的一个基本区域。于是环面的映射h是一形变的必需和充分条件是，$ABCD$可經平移而重合于$A'B'C'D'$。环面的其他映射类对应于点格的一母平行四边形所能取的其他形式(比較第33頁图39)，以及将正方形$ABCD$映成自身的旋轉与反射①。

汛复盖曲面的概念，对一切曲面均可确定。对于可定向閉曲

① 如果点格定义作在笛卡儿坐标下整数点的集合，而且如果A'經平移已与原点重合，則平行四边形$A'B'C'D'$由B'点的坐标a,b和C'点的坐标c,d来决定。为了刻划环面的全部映射类，必須賦予a,b,c,d以适合条件$ad-bc=+1$或-1的所有整数值。

面，我們这样得到汎复盖曲面：把一些$4p$边形連接起来，并在它們之間建立一种对应关系，其方式和在环面的情形对正方形的做法差不多。不过，当$p>1$时，基本群不能以欧氏平移群代表；但是能够以双曲平移群代表，并以$4p$边形为基本区域(对于$p=2$的情形，参看第258頁图249和第299頁图286)。对于有边緣的曲面，需要引入具有开的基本区域的欧氏平移群或双曲平移群。对于不可定向曲面为了基本群在度量几何中能实现，必須在欧氏和双曲平移之外再补充以欧氏和双曲滑动-反射。

§50. 环面的保角映射

在§39里我們提过这样的問題：一个曲面能否保角地映成自身或者映成另一曲面？如果能够的話，究竟有多少种映射方式？当时我們限于研究和一圓內部或一圓面(包括周界)或一球面等价的曲面。汎复盖曲面的概念使我們能够对所有其他曲面討論类似的問題。这里只讲如何去找将环面映成本身或映成别的环面的所有的保形映射，因为对环面所用的方法也适用于其他曲面，而且环面的情形比較容易想象。在这里和以后，我們所讲的环面不仅是指一圓圍繞在这圓所在平面上且不与圓相交的軸旋轉出来的回轉曲面，也指与环面拓扑等价的任一曲面。

在§39中我們讲过一个“非此即彼”的定理，它是說任一曲面，凡是同圓的內部等价，也就是同欧氏平面等价的，能够保形映射成双曲平面或者欧氏平面。我們可以把这个定理应用于环面T的汎复盖曲面U，因为这一曲面适合定理的条件。因此，設U保形映射成平面E，让我們首先提出这个問題：E是欧氏平面还是双曲平面？

現在，基本群(f)必是将U映成自身的保形映射群，因为在(f)的映射之下，U的任一区域的象甚至和那个区域合同。因此在保

形映射 $U \to E$ 之下，群 (f) 变换成将 E 保形映成自身的一个群 (t)。但是所有将平面映成自身的保形变换为已知：若 E 是双曲平面，它們是双曲剛体运动；若 E 是欧氏平面，它們是欧氏剛体运动和相似变換(参考第 262 頁，第 267—269 頁)。此外，我們知道群 (t) 和欧氏平面的結晶平移群有某种亲屬关系：(t) 中所有的映射，除恒等变換外都沒有不动点，而且群的基本区域是四边形。假如 E 是双曲平面，(t) 必是具有有限基本区域的不連續的双曲平移群。但在第 257—258 頁上讲过，而且設法使讀者相信，这样的群的基本区域至少有八边，因此 E 非是欧氏平面不可。可以用初等方法证明，任一不是剛体运动的欧氏相似变換有一个不动点。这样說来，群 (t) 除了包含恒等变換外，只能包含沒有不动点的剛体运动，这是說，它是平移。又因为 (t) 是不連續的而且有一有限基本区域，所以 (t) 一定是第 72—73 頁上討論过的那种結晶平移群。

現在应用同样的論证于任一其他的环面 T'：設 U' 为 T' 的汛复盖曲面；設保形映射 $U' \to E$ 将 T' 的基本群变为 E 的結晶平移群 (t')。我們曾經讲过将环面变为自身的任一映射能够扩張到汛复盖曲面。同样，任一保角映射 $T \to T'$ 能够决定保角映射 $U \to U'$，使得 U 和 U' 的对应点永远复盖 T 和 T' 上的对应点。映射 $U \to E$ 和 $U' \to E$ 变換 $U \to U'$ 为将 E 映成自身的保形映射 a，a 必然是欧氏剛体运动或相似变換。而且，a 必然把平移群 (t) 变为 (t')。

这样我們证明了，将 T 映成 T' 的保形映射仅当群 (t) 可以經过剛体运动或相似变換成为 (t') 时才行。这个条件可用几何形式表出：令 t_1 是群 (t) 的最短平移。令 t_2 是 (t) 的不平行于 t_1 的平移中的最短平移。設 m 是 t_2 和 t_1 的长度之比 $\frac{t_2}{t_1}$，因而 $m \geqslant 1$。設 α 为这二平移所夾的角；为使 α 唯一决定，只要假定 $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$。設 m' 和 α' 为群 (t') 中的对应数值。則存在一相似变換把 (t) 变到 (t')

的充要条件是 $m=m', \alpha=\alpha'$。(证明是初等的，留給讀者)。因此我們对于任一个环面 T 可对应以二数 m 和 α，使 T 只能保形地映射到有此相同二数的那些环面上。这二数（或另一对和它們按某种一一对应关系联系起来的数)叫做环面的模数。

要使环面 T 和 T' 間存在保形映射，二模数相等不仅是必需的，也是充分的。因为如果条件滿足，則在 E 上有一相似变換或一剛体运动 a，变 (t) 为 (t')。容易看出，屬于 a 的保形映射 $U\to U'$ 决定一保形映射 $T\to T'$，因为映射 $U\to U'$ 变換 U 的等价点——只是这些等价点而已——为 U' 的等价点。总結上面的結果，我們可以說环面对于保形映射来說作成双参数族。

如果环面的空間形式沒有什么特别的正則性，环面模数不能直接从它的几何形象上推出。但若环面 T 是回轉曲面，則 (t) 一定有一矩形的基本区域，因此 $\alpha=\frac{\pi}{2}$。因为，在这种情况下映射 $U\to E$ 能够显明地給出：它将正交的經圓和緯圓网变为 E 上的二族正交直綫。在特殊情况下，如果 T 是由圓产生的回轉曲面，則 t 的矩形基本区域二边之比 m 仅依賴經圓半徑和心軸半徑之比。因此由圓产生的二环面能互为保形映射的充要条件是它們相似。

在四維空間里，我們可以找到一环面，其复盖曲面 U 甚至能等距地映射成欧氏平面(参看本章附录 2)。

現在不难綜合描述将一已知环面 T 映成自身的所有保形映射方法。这些映射所成的群 (k) 必然对应 E 上保持 (t) 不变的剛体运动和相似变換的群 (l)。显然 (l) 包含所有在 E 上的平移。一般地說，这些运动就构成 (l) 的全体。但如 (t) 有特别的正則性，例如有正方形的基本区域，則 (l) 还包含旋轉和反射。

上面对于环面讲的方法也适用于另外的曲面。但在大多数情况下复盖曲面不像环面的情形那样保形地映射成欧氏平面，而是

映射成双曲平面。这句断語对于例如所有亏数 $p>1$ 的可定向閉曲面皆能适用。这类曲面引出双曲平移群，而且只有当二曲面的平移群可以經过双曲剛体运动而相互轉变时，这二曲面才能相互保形映射。在双曲几何中可以证明，如果一个双曲平移群的有限基本区域有 $4p$ 个边，那么这个双曲平移群由 $6p-6$ 个常数决定。因此每一亏数 $p>1$ 的可定向閉曲面有 $6p-6$ 个模数。

在函数論中，这种方法主要地用在代数函数的黎曼曲面上。若 $p=1$，映射 $U\to E$ 导出椭圓函数；若 $p>1$，导出克来因和布安加雷自守函数。

非閉曲面引出有无限基本区域的群。这种群时常在函数論中碰到，例如，在研究超越函数和椭圓模函数的时候。

§51. 接壤(相邻域)問題，绳綫問題和着色問題

作为本章的結尾，我們試一探討由剖分曲面为若干区域而产生的三个密切相关的問題。普通的地图就是平面剖分的例子。其次，在組合拓扑中，当一弯曲曲面用拓扑等价的多面体来代換时便遇到任意曲面的剖分問題。要想得到多面体的各面，必須先把曲面剖分成若干区域。

接壤問題是这样的：在已給的曲面上找出最大数目的区域，使得每一区域都同其余的每一区域沿着一条曲綫相邻①。我們先討論在平面上的問題。設在平面上已經选好了沿一曲綫相邻的两个区域 1 和 2。如果选擇第三个区域，使这个区域完全包圍前两个，就不可能找到第四个区域，使与前三个两两相邻 (图 323)。但是，假如象图 324 上那样选擇第三个区域，那么便很容易找到第四个。可是不論第四个区域怎样选擇，前三个中的一个必被其余的三个

① 不要求諸区域蓋滿整个曲面。

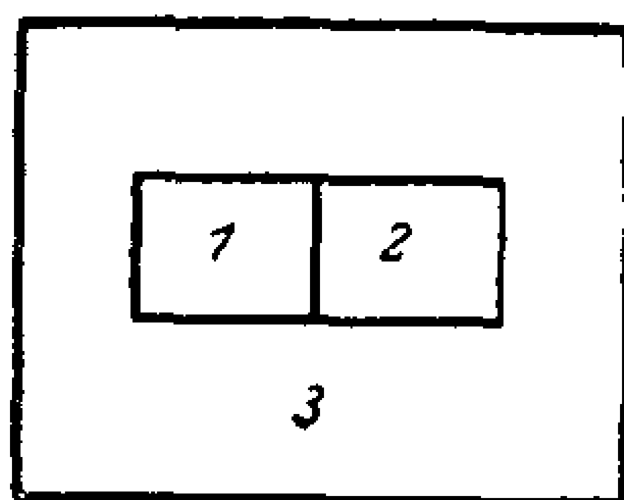


图 323

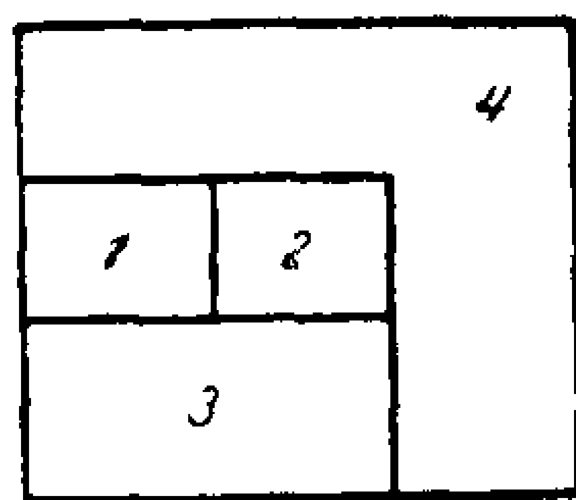


图 324

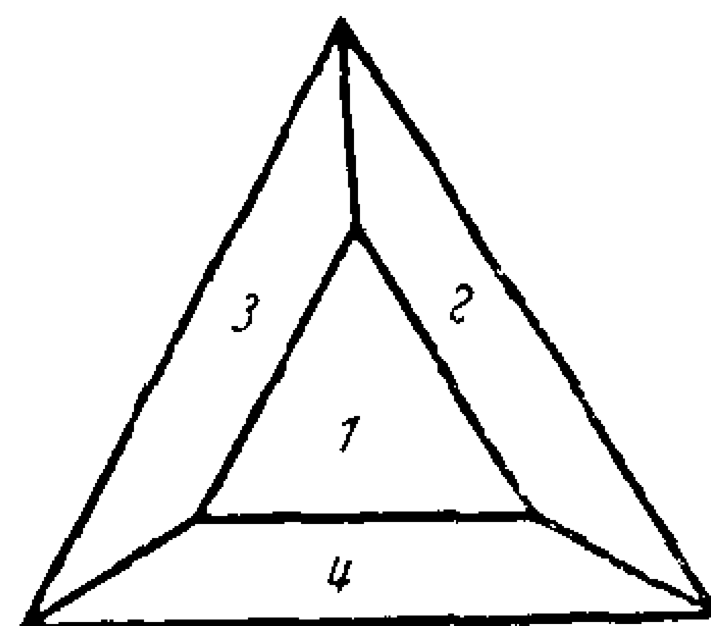


图 325

完全包圍。这样也就不能再找出第五个，使与前四个两两沿一曲綫相邻了。經驗表明，在平面上我們不能找到四个以上的两两相邻的区域。在平面上相邻区域的最大数是 4 这件事实是可以严格证明的。图 325 表示这样的四个区域的一种特别对称的布列。

绳綫問題是接壤問題的对偶逆問題（这里所說的对偶系指投影几何中空間对偶原則的拓扑推广）。所謂绳綫問題是，在曲面上找出最大数目的点，使每一点到其他任一点都可連以在曲面上的曲綫，而且沒有两条是相交的。下面簡单的論证說明最大的点数就等于同一曲面上相邻域的最大数目。为了证明，我們从每一区域中选擇一点。因为任二相邻域以曲綫为界，所以在这些点中的每两点皆可連以一条只在这两点所屬的区域内的曲綫。其次，这样得到的許多曲綫还可以如此选擇，使在任意給定的区域内的曲綫段不相交。事实上，只要在这区域内連結一内点和边界上的一些定点即可。这样說来，n 个相邻域的每一种布列法給出绳綫問題的一个 n 点解。所以绳綫問題中最大的点数至少等于相邻域問題中最大的区域数。反之，绳綫問題中的每一个 n 点解也給出 n 个相邻域的一种布列。要找出这种布列，我們把連接每一对点的曲綫分为两部分，并利用由每一点出发的部分曲綫，加上曲面上在这点周圍的各点，作成一个二維区域。用这种方法我們得到 n 个星形区域，每一区域同其他每一区域接壤。因此相邻域的最大数目至少等于绳綫問題中适合条件的最大点数。因为方才已經证明过

了逆命题，所以两个最大数目相等。

这个最大数目对連通度不是1的曲面也确定了。就投影平面

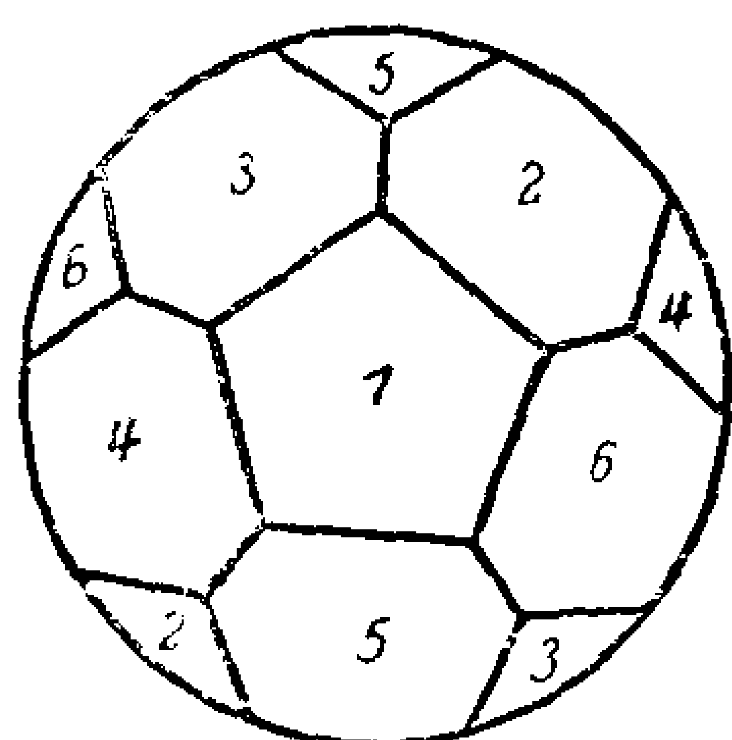


图 326

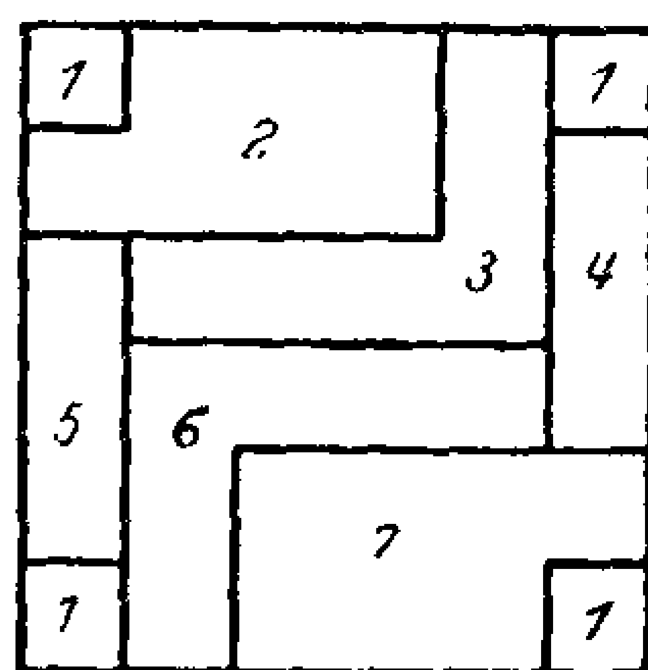


图 327

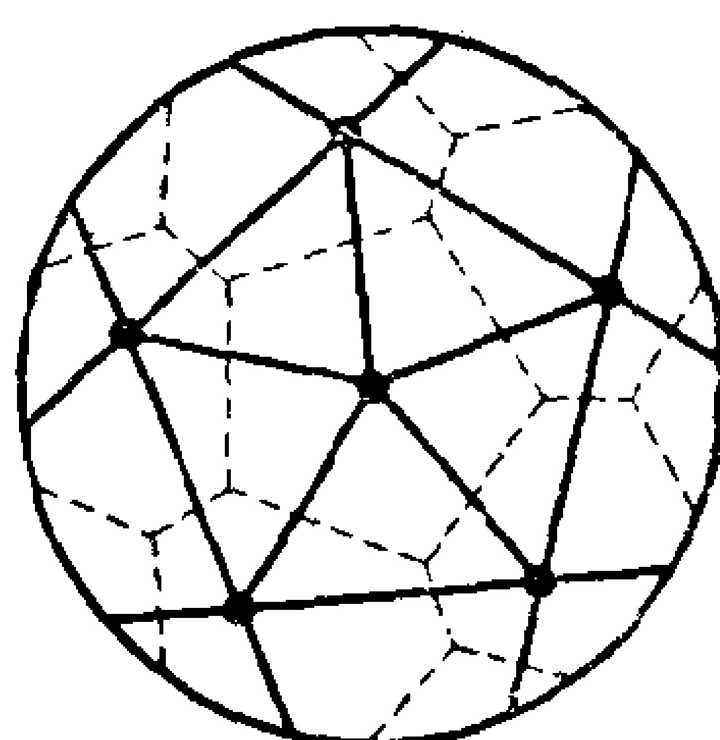


图 328

和环面来讲，最大数目分別是6和7。图326和327繪出这两种相邻域的布列状况。投影平面以圓面代表，其中的对徑点认为是叠合的。环面以正方形代表，二对边以寻常的方式叠合。图326和第152頁上表示十二面体的投影图（图167）实质上是一样的。图328表示在投影平面上绳綫問題的一个解；它同图326的剖分法成对偶对应。

同相邻域問題密切相关的是着色問題。这个問題可以作为实用制图术中的問題。說明如下：設在一片曲面上画出了若干区域。要把每一区域塗色，以一曲綫为界的二相邻域不許有同色。(但若二区域只在孤立点相遇时許可有同色)。問題是在不違反上述規則的条件下，找出最少样数的顏色，足以塗染按任何可能方式划分曲面所成的区域。

顏色的样数至少要等于曲面上可能的相邻域的最大数目。事实上，每一組相邻域的各个区域必須分別着以不同的顏色。反过来，似乎可以說这个最大数目也是足够的了。对投影平面和环面的情形，已經证明这是对的：在投影平面上六种顏色足以区分任何不同的区域；在环面上，七种顏色就够了。可是另一方面，在平面

上或球面上,[①] 四种颜色够不够呢?这个問題到現在尙未解决。

我們先举几个平面剖分的例子。象图 329a 那样的相邻域必須塗以三种不同顏色 1,2,3。同 2,3 接壤的第四个区域可塗顏色 4,

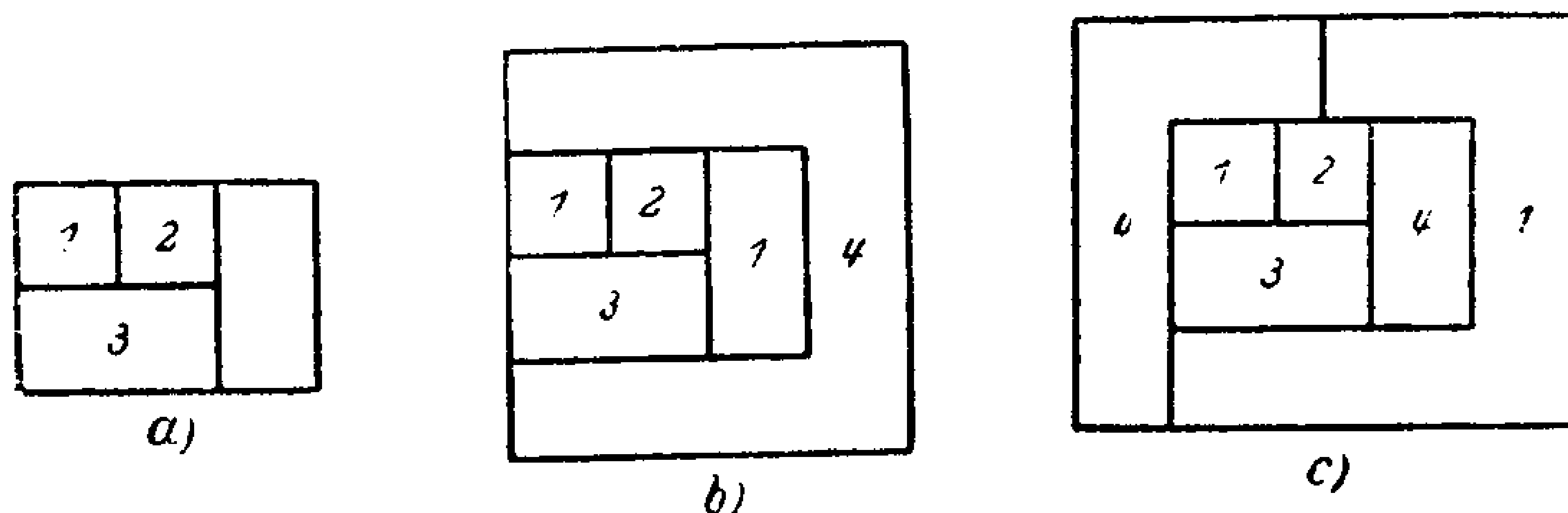


图 329

也可以塗顏色 1。如果把这个区域塗以顏色 4,那么四种顏色就不够塗染像图 329b 那样的区域。所以在这种情形下第四个区域必須塗以顏色 1。但是若遇到像图 329c 那样的区域,这个办法又行不通了。在这里第四个区域必須塗以顏色4。这个例子說明,前面四个区域的顏色取决于后面各区域布列的情况。每逢一个新区域加进来,不得不重新調配先前着色区域的顏色。这就是問題的难点根源所在。

現在我們指出一条道路,沿着这条道路可解决一系列的閉曲面的着色問題。先把曲面变形为多面体,使在曲面上的各个区域变为多面体的各个面。[②] 于是显然,只要能解决和已知曲面有相同連通度的一切多面体的問題就好了。

首先我們证明:連通度为 h 的任一多面体最多用 n 种顏色就可以塗遍,如果对于所有的整数 $F>n$,不等式

$$nF>6(F+h-3)$$

① 球面和平面的問題,实质上沒有区别。

② 从图 326 和 327 二例可以看出,这样的形变,一般只有許可几个面是弯曲的时,才成为可能。但这并不影响这里給出的证明。

成立。下面我們要决定对于任意給定的正数 h 适合不等式的最小的 n_h。这样我們就证明了，連通度为 h 的閉曲面的任意剖分可塗以 n_h 种顏色。

現在假定連通度 h 为定数，并假定某一已給整数 n 連同 h 适合上列不等式。現在我們按連通度为 h 的多面体的面数 F 把这些多面体加以分类。施归納法于 F 来证明我們的断言。对于所有的 $F\leqslant n$，結果显然是对的，因为只要把各个面塗以不同的顏色就完了。現在假定定理对于所有的 $F\leqslant F_0$ 已經证明了，求证对于 $F=F_0+1$ 定理也正确。从上文可知只須考虑 $F>n$ 的情形已足。按假定，面数 F 适合不等式

$$nF>6(F+h-3).$$

应用欧拉公式：[1] $E-K+F=3-h$，或即 $F+h-3=K-E$。通过保持面数 F 和連通度 h 不变的形变，我們可以把多面体变为每一頂点处只有三个面相遇的形状，从而每一頂点处也只有三个棱相遇（参考图 330）。所以一共有 $3E$ 个棱遇于 E 个頂点。因为每个棱計算了两次，所以 $3E=2K$，因此

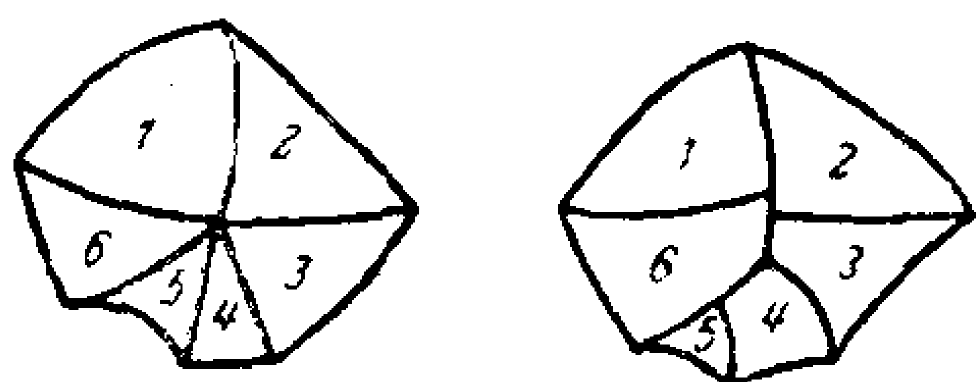


图 330

$$6(F+h-3)=6K-6E=6K-4K=2K.$$

因此对于数 n 的不等式成为

$$nF>2K.$$

从这个不等式可以推出，多面体至少有一个面由少于 n 个棱所圍成。事实上，假如反面的論断成立，則多面体的 F 个面一共将由至少是 nF 个棱所圍成，又因为每个棱已計算两次，所以有 $nF\leqslant 2K$。这个結果正是我們所要证明的核心。

① 从前在推导这个公式时我們曾对各面的布列作过一些假定，这些假定对現在的情形不成立。但是不难看出，这个公式对于現在的条件下还是对的。

现在我們考虑那些以个数少于 n 的面为邻的各面，从这些面中选定一个。把这个面挖掉，扩展其各邻面以补其缺。如此得出另一个多面体。新多面体的連通度和旧的多面体的相同，只是面数少一。因此根据假設，可以用 n 种顏色塗满新的多面体。让我們再把着色后的多面体变为原形。于是就得到旧多面体，除去挖掉的一个面外，所有的面塗有 n 种顏色。但是因为最多有 $n-1$ 个面和挖掉的面有相同的棱，所以也可以把这个面着色，而不必用新的顏色。在这里我們曾經把原来的多面体变形成任一頂点处只有三个棱相遇的形状。但是这种变换可以倒回去，不必加添新的顏色，因为逆变换不产生新的边界綫。

下一步要找出有哪些 n 适合我們規定的条件。这条件可以写成

$$n>6\left(1+\frac{h-3}{F}\right).$$

这里的 F 須取大于 n 的一切整数。若 $h=1$ 或 2，不等式的右方随 F 增大而趋近于6，但永远不会大于6。因此在这两种情形下 $n_h=6$ 是适合我們規定的最小的整数。若 $h=3$，不等式右方是定值 6，因此 $n_h=7$。若 $h>3$，不等式右方随 F 增大而减小，因此只要以 F 的最小的許可値 $n+1$ 代入計算即可。于是得到在 $h>3$ 的情况下对 n 的不等式

$$n>6\left(1+\frac{h-3}{n+1}\right).$$

这式又可以换写为

$$n(n+1)>6n+6+6h-18,\ n^2-5n>6h-12,$$

或

$$n>\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{24h-23}.$$

令 $[x]$ 为小于 x 的最大的整数，則当 $h>3$ 时，

$$n_h=\left[\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{24h-23}\right].$$

当 $h=2$ 和 $h=3$ 时，从上式也得出正确的值：$n_h=6$ 和 $n_h=7$，尽管公式对这两种情形是不能应用的。但当 $h=1$ 时，从公式得出的是4，而不是像前面得出的6。虽然到現在还未找到证明，可是最少顏色样数的正确数值很可能是4，因为直到現在还沒有人能在平面上作出一組区域，是用四种顏色填不滿的。下表列出对于 $h=1$ 到13的 n_h 之值。

$h=$	$n_h=$	$h=$	$n_h=$
1	6([4.000]=4)	8	[10.000]=10
2	6([6.000]=6)	9	[10.447]=10
3	7([7.000]=7)	10	[10.866]=10
4	[7.775]=7	11	[11.264]=11
5	[8.425]=8	12	[11.640]=11
6	[9.000]=9	13	[12.000]=12
7	[9.522]=9		

到現在为止，我們仅仅证明了表中的数是表示够用的顏色的数目。也許会有人以为連通度为 h 的曲面可以用較 n_h 为少的顏色塗滿。对 $h=2, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ 几种情形倒是已证明恰恰能作 n_h 个相邻域。因此在这些曲面上少于 n_h 种顏色是不够的，于是对于这些曲面的着色問題就算完全解决了。至于其他閉曲面，数 n_h 表示相邻域数的上界。

着色問題中特別惹人注目的是，对于平面的情形，有关的命題虽然在直观上甚为明显，但迄今还沒有找到严格的证明。数学上类似这样的困难在想要以数的概念作基础而用純邏輯的方法证明直观上明显的定理时往往会碰到。再举二例：任一无重点的平面閉曲綫必划分平面为两部分；表面积一定的一切曲面中以球面所圍的体积为最大。这两个定理的证明都十分困难而繁瑣。四色問題的例子更是奇特，因为不曉得为什么恰恰是看起来最簡单的情况竟有如此之难，而比这复杂得多的許多情况倒能够解决了！

第四章的附录

1. 四維空間中的投影平面

現在我們在欧氏四維空間 E_4 中作一个跟投影平面拓扑等价的代数曲面，它不同于鮑埃曲面，沒有自交綫，也沒有什么奇点。为了这个目的，我們从球面

$$u^2+v^2+w^2=1 \tag{1}$$

开始，考虑四維空間 E_4 中在笛卡儿坐标 x, y, z, t 下由下列方程代表

$$x=u^2-v^2,\quad y=uv,\quad z=uw,\quad t=uw, \tag{2}$$

的图形，其中参数 u, v, w 适合方程(1)。因为 x, y, z, t 是 u, v, w 的齐次二次函数，球面(1)的每对对徑点被表作 E_4 中(2)的一个点，我們現在证明，(1)中非对徑二点被表作(2)的不同二点。首先，在球面上选一点，使坐标 u, v, w 全不为零。則 y, z, t 的对应值也不为零，因而唯一决定比 $u:v:w$。因此(2)中对应 P 点的点除代表球面上的 P 点及其对徑点外，不代表别的点。如果 w 等于零，則 u^2 和 v^2 的值唯一决定于方程 $u^2+v^2=1$ 和 $u^2-v^2=x$，而(2)中的对应点只能代表 $(u, v, 0)$，$(u, -v, 0)$，$(-u, v, 0)$ 和 $(-u, -v, 0)$ 四点。如果除此之外还有 $u=0$，或 $v=0$，則四点化为一对对徑点，如此在这种情形下，再沒有需要证明的东西。如果 $u\neq0$，$v\neq0$，必須应用另一方程 $y=uv$；这样就从四点中选出一对对徑点。剩下需要考虑的情形只有当 w 不等于零时 u, v 之一等于零，換句話說，或者 $u=0, v\neq0, w\neq0$，或者 $u\neq0, v=0, w\neq0$，或者最后 $u=v=0, w=\pm1$。在第一种情形下，我們有 $x=-v^2, -x+w^2=1, vw=t$；因此 v^2，

w^2和vw是已知的。同样，在第二种情形下，v^2，w^2 和vw也是已知的。可見在这两种情形下，跟$w=0$的情形一样，(2)中的对应点只代表(1)的一对对徑点。在第三种情况下沒有什么可証明的，因为它仅仅对于(1)的二对徑点成立。这样看来，方程(2)加上輔助条件(1)按一对一的方式表示二对徑点是叠合起来的球面，也就是投影平面。

容易从决定模型的諸方程消去 u, v, w。从 (2) 的最后三个方程，得

$$\frac{yz}{t}=u^2,\quad \frac{yt}{z}=v^2,\quad \frac{zt}{y}=w^2.$$

从而(2)的第一个方程变为

$$y(z^2-t^2)=xzt, \tag{3}$$

而且(1)变为

$$y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2=yzt. \tag{4}$$

因此我們的模型是超曲面(3)和(4)的交面。

至于說模型沒有奇性，即切面到处是連續的，这一点容易证明。因为只要把球面(1)的变数u, v, w表作二独立参数的函数，然后用(2)把x, y, z, t表作新参数的形式，即可看出。

2. 四維空間中的歐氏平面

在E_3中，所有同欧氏平面等距的曲面都伸展到无穷远，因为它們必定是直紋曲面。但在E_4中，有些同欧氏平面在小范圍內等距的曲面不是直紋的。今举出这样一个曲面F。它整个在空間的有限区域內并且同环面拓扑等价。F有如下簡单的参数表达式

$$x_1=\cos u,\quad x_3=\cos v,$$
$$x_2=\sin u,\quad x_4=\sin v.$$

F 的綫性元素是

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+d_4^2$$
$$=\sin^2 u du^2+\cos^2 u du^2+\sin^2 v dv^2+\cos^2 v dv^2=du^2+dv^2.$$

因此 F 实在同以 u, v 为直角坐标的平面等距。F 之所以有限，因为它的所有点坐标在 $+1$ 和 -1 之間。F 也可以看作两个三維超柱面 $x_1^2+x_2^2=1$ 和 $x_3^2+x_4^2=1$ 的交面。F 上的所有点可以这样得到：让笛卡儿 (u, v) 平面上的一点跑过一正方形面，这正方形的边平行于二坐标軸，其长等于 2π。正方形內部的任二点对应 F 上的不同二点。另一方面，正方形边界上的二点，如果在同一直綫 $u=$ 常数或 $v=$ 常数而且在正方形的对边上，則对应 F 上的同一点。因此 F 是环面，并以 (u, v) 平面为其汎复盖曲面。

欧氏几何除实現在环面上外，是否能够实現在别种曲面上呢？可以证明，只有克来因瓶一种。但双曲几何能实現在連通度大于3的閉曲面上，而且只能实現在这类的曲面上。椭圓几何除实現在球面上和投影平面上外，不能实現在别种曲面上。以上这些定理可以从关于短程曲率的曲面积分的邦內(O. Bonnet)公式推出来。